Complementi 5 - Le equazioni di Beltrami e l'equilibrio elastico

[Ultima revisione: 15 gennaio 2009]

In questi complementi vengono dedotte le equazioni dell'equilibrio elastico in termini di tensioni, partendo dalle equazioni di compatibilita' di De Saint-Venant. Introducendo in esse la legge di Hooke le si trasforma in equazioni in termini di tensioni, poi si utilizzando le equazioni indefinite dell'equilibrio, giungendo infine ad un sistema di sei equazioni nelle sei incognite σ_{ij}

La deduzione delle equazioni di Beltrami

Per ottenere le equazioni di equilibrio in termini di tensioni, si parta dalle equazioni di compatibilita' di De saint venant, si utilizzi in esse le leggi di Hooke (equazioni costitutive) e le equazioni indefinite dell'equilibrio. Si giungera' ad un sistema di sei equazioni nelle sei incognite σ_{ij}, cui andranno associate le opportune condizioni ai limiti.

■ Il primo gruppo

Si parta allora dall'equazione di compatibilita':

$$2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1\,\partial x_2} = \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} \tag{1}$$

e si utilizzino le relazioni costitutive nella forma:

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} \tag{2}$$

Si ha:

$$2(1+\nu)\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1\,\partial x_2} = (1+\nu)\left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2}\right) - \nu\left(\frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_2^2}\right) \tag{3}$$

Si considerino ora le equazioni indefinite dell'equilibrio elastico:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + X_1 = 0\\
&\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + X_2 = 0\\
&\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Derivando la prima rispetto ad x_1, la seconda rispetto ad x_2, e la terza rispetto ad x_3 si ottiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \sigma_{13}^2}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \\
\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial X_2}{\partial x_2}
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} = 0 \tag{6}$$

e sommando le prime due:

$$2\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \sigma_{13}^2}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \tag{7}$$

Dalla(6) si ottiene:

$$-\frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \tag{8}$$

e quindi la (7) si scrive:

$$2\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} - \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \tag{9}$$

Questa espressione puo' essere sostituita nella (3), che cosi' diviene:

$$\begin{aligned}
&(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} - \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - \frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right) = \\
&(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2}\right) - \nu\left(\frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_2^2}\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

ossia ancora:

$$\begin{aligned}
&(1+\nu)\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_3} - \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - \frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right) = \\
&(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2}\right) - \\
&\nu\left(\frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_2^2}\right)
\end{aligned} \tag{11}$$

Aggiungendo e sottraendo si ottiene:

$$\begin{aligned}
&(1+\nu)\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_3} - \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - \frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right) = \\
&(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_3^2} - \right. \\
&\left. \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^2}\right) - \nu\left(\frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_3^2}\right)
\end{aligned} \tag{12}$$

che puo' scriversi:

$$(1+\nu)\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_3}-\frac{\partial X_1}{\partial x_1}-\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)= (1+\nu)\left(\nabla^2\sigma_{kk}-\nabla^2\sigma_{33}-\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_3^2}\right)-\nu\left(\nabla^2\sigma_{kk}-\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_3^2}\right) \tag{13}$$

avendo introdotto l'operatore ∇:

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \tag{14}$$

Dalle altre due equzioni di compatibilita' dello stesso gruppo, operando nello stesso modo, si ottengono altre due equazioni:

$$(1+\nu)\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}-\frac{\partial X_2}{\partial x_2}-\frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right)= (1+\nu)\left(\nabla^2\sigma_{kk}-\nabla^2\sigma_{11}-\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_1^2}\right)-\nu\left(\nabla^2\sigma_{kk}-\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_1^2}\right) \tag{15}$$

$$(1+\nu)\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2}-\frac{\partial X_3}{\partial x_3}-\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right)= (1+\nu)\left(\nabla^2\sigma_{kk}-\nabla^2\sigma_{22}-\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_2^2}\right)-\nu\left(\nabla^2\sigma_{kk}-\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_2^2}\right) \tag{16}$$

Sommando le (13-15) si ottiene:

$$(1+\nu)\left(-\frac{\partial X_2}{\partial x_2}-\frac{\partial X_3}{\partial x_3}-\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right)= (1+\nu)\,\nabla^2\sigma_{kk}-2\,\nu\,\nabla^2\sigma_{kk} \tag{17}$$

ossia:

$$\nabla^2\sigma_{kk}=-\frac{1+\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right) \tag{18}$$

Questa espressione puo' essere sostituita nella (13), ottenendo:

$$(1+\nu)\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_3}-\frac{\partial X_1}{\partial x_1}-\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)= \nabla^2\sigma_{kk}-(1+\nu)\left(\nabla^2\sigma_{33}+\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_3^2}\right)+\nu\,\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_3^2} \tag{19}$$

$$\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_3}-\frac{\partial X_1}{\partial x_1}-\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)+\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right)= -\nabla^2\sigma_{33}-\frac{1}{1+\nu}\,\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_3^2} \tag{20}$$

ed infine:

$$\nabla^2\sigma_{33}+\frac{1}{1+\nu}\,\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_3^2}=-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right)-2\,\frac{\partial X_3}{\partial x_3} \tag{21}$$

con due equazioni simili ottenute per permutazione circolare degli indici:

$$\nabla^2\sigma_{11}+\frac{1}{1+\nu}\,\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_1^2}=-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right)-2\,\frac{\partial X_1}{\partial x_1} \tag{22}$$

$$\nabla^2 \sigma_{22} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_2^2} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right) - 2 \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \tag{23}$$

■ Il secondo gruppo

Si parta ora da una equazione di compatibilita' del secondo gruppo:

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}\right) \tag{24}$$

e si introduca la legge di Hooke:

$$(1+\nu) \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_2 \partial x_3} = (1+\nu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_3}\right) \tag{25}$$

ossia:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_2 \partial x_3} = -\frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{31}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} \tag{26}$$

Aggiungendo e sottraendo:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_2 \partial x_3} = \\ -\frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{31}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_3}\end{gathered} \tag{27}$$

ossia:

$$\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{31}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} \tag{28}$$

Si derivi la seconda equazione indefinita dell'equilibrio rispetto ad x_3, e la terza rispetto ad x_2 :

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial X_2}{\partial x_3} = \\ 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2 \partial x_3} = -\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \\ \frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial^2 x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial X_3}{\partial x_2} = \\ \\ 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_2 \partial x_3} = -\frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial^2 x_2} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2}\end{gathered} \tag{29}$$

e si sostituisca nella (27):

$$\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_2 \partial x_3} = -\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial^2 x_2} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{31}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} \tag{30}$$

Semplificando si giunge a scrivere:

$$\nabla^2 \sigma_{23} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_2 \partial x_3} = -\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3} + \frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right) \tag{31}$$

con le altre due:

$$\nabla^2 \sigma_{13} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_1 \partial x_3} = -\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} + \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right) \tag{32}$$

$$\nabla^2 \sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_1 \partial x_2} = -\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right) \tag{33}$$

■ Le sei equazioni

Le sei equazioni (20-22) e (30-32) si possono scrivere, in termini indiciali:

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_i\ \partial x_j} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}\,\mathrm{Div}\,(X) - \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right) \tag{34}$$

e ad esse vanno associate le condizioni ai limiti

$$\sigma_{ij}\, n_j = p_i \tag{35}$$

sulla parte di frontiera dove sono assegnate le forze superficiali. Le eqn.(34) si chiamano equazioni di Beltrami, o anche equazioni di Beltrami-Michell [Beltrami]

Note

[Beltrami] - In assenza di forze di massa, le equazioni (34) sono state dedotte da Enrico Beltrami in "*Osservazioni alla nota del prof.Morera*", Rendiconti della R.Accademia dei Lincei, serie V, tomo I, 141-142 (1892), cfr. anche Opere Vol.IV, pagg.510-512, oppure il sito http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk, nella sezione Ricerca. In presenza di forze di massa le equazioni furono dedotte da Luigi Donati, "*Ulteriori osservazioni intorno al teorema di Menabrea*", Mem. Accad. Sci.Bologna (5), 4, 449-474 (1894) e solo in seguito riscoperte da J.H. Michell in "*On the direct determination of stress in an elastic solid, with applications to the theory of plates*", Proc.Lond. Math. Soc. 31, 100-124 (1900).
Un ricordo del pressocche' dimenticato prof. Donati e' riportato nel sito http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk, nella sezione Ricerca.

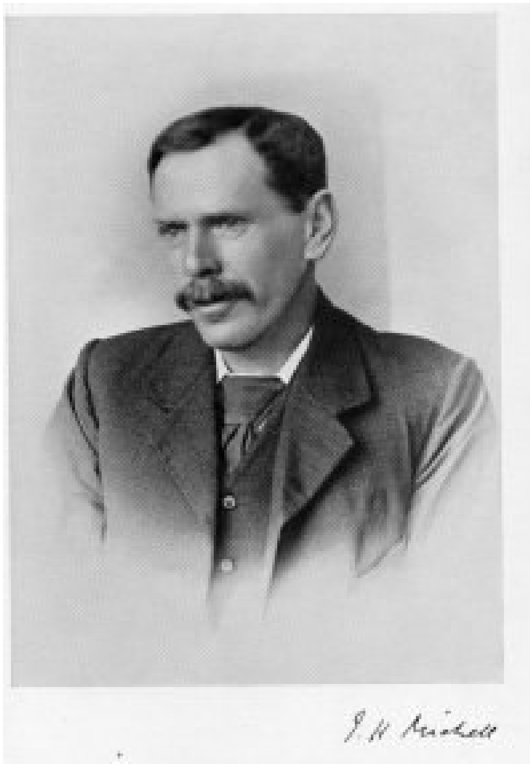

Figura 1 - J.H.Michell