Complementi 4 - Materiali non isotropi

[Ultima revisione 9 gennaio 2009]

In questo notebook si parte dalla legge di Hooke per solidi anisotropi, e si deducono le opportune restrizioni sulle 21 costanti elastiche, ipotizzando varie simmetrie del materiale: verranno considerate le simmetrie rispetto ad un piano, caratteristiche dei materiali monoclini, le simmetrie rispetto a due piani ortogonali tra loro, caratteristico dei materiali ortotropi, le simmetrie di rotazione introno ad un asse, che definiscono i materiali trasversalmente isotropi, ed infine i materiali isotropi, che posseggono simmetria rotazionale rispetto a due assi perpendicolari.

La legge di Hooke per materiali anisotropi

La formulazione piu' generale della legge di Hooke passa attraverso l'introduzione di 81 costanti:

$$\sigma_{ij} = c_{ijhk}\, e_{hk} \tag{1}$$

il cui carattere di tensorialita' e' garantito dalla regola del quoziente. Si ha quindi un tensore del quarto ordine, detto *tensore di elasticita'*, il cui aspetto dipende dal tipo di materiale che si sta esaminando. Alcune restrizioni sono comunque di carattere generale:
- la simmetria del tensore delle tensioni implica che:

$$\sigma_{ij} = c_{ijhk}\, e_{hk} = \sigma_{ji} = c_{jihk}\, e_{hk} \tag{2}$$

e quindi esiste simmetria rispetto ai primi due indici:

$$c_{ijhk} = c_{jihk} \tag{3}$$

- la simmetria del tensore delle deformazioni implica che esiste simmetria nche rispetto agli altri due indici:

$$c_{ijhk} = c_{ijkh} \tag{4}$$

Ed infatti, si consideri uno stato deformativo in cui la solo componente non nulla sia $e_{12} = e_{21}$. Per esso, la legge di Hooke fornisce lo stato tensionale:

$$\sigma_{ij} = c_{ij12}\, e_{12} + c_{ij21}\, e_{21} = (c_{ij12} + c_{ij21})\, e_{12} = 2\, \bar{c}_{ij12}\, e_{12} \tag{5}$$

avendo definito la nuova costante:

$$\bar{c}_{ij12} = \frac{1}{2}\, (c_{ij12} + c_{ij21}) \tag{6}$$

simmetrica rispetto al terzo e quarto indice. Le due proprieta' (3) e (4) si dicono proprieta' di simmetria minore, e riducono a 36 il numero delle costanti elastiche. Infine, si e' dimostrato che in ipotesi di esistenza di un potenziale elastico vale anche la proprieta' di simmetria maggiore:

$$c_{ijhk} = c_{hkij} \tag{7}$$

e quindi le costanti elastiche si riducono a 21. Sfruttando queste tre proprieta' di simmetria, in definitiva, la legge di Hooke si scrivera':

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & c_{1113} & c_{1123} \\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & c_{2213} & c_{2223} \\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & c_{3312} & c_{3313} & c_{3323} \\ c_{1112} & c_{2212} & c_{3312} & c_{1212} & c_{1213} & c_{1223} \\ c_{1113} & c_{2213} & c_{3313} & c_{1213} & c_{1313} & c_{1323} \\ c_{1123} & c_{2223} & c_{3323} & c_{1223} & c_{1323} & c_{2323} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2\,e_{12} \\ 2\,e_{13} \\ 2\,e_{23} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Infine, si ricordi che il carattere di tensorialita' delle costanti elastiche implica che esse varino, al variare del sistema di riferimento, secondo la relazione:

$$c'_{ijkl} = l_{im}\, l_{jn}\, l_{kp}\, l_{lq}\, c_{mnpq} \qquad i, j, k, l, m, n, p, q = 1, 2, 3 \tag{9}$$

dove **L** e' la matrice che contiene, in colonna, i coseni direttori dei nuovi assi rispetto ai vecchi assi.

I materiali monoclini

Si consideri un materiale che abbia simmetria di comportamento rispetto ad un piano Π, ossia un materiale *monoclino*. Si assuma che Π sia il piano $OX_1 - OX_2$, e si completi la terna di riferimento con un terzo asse OX_3, ortogonale a Π: il tipo di simmetria che si sta studiando implica che le costanti elastiche non mutano al variare del sistema di riferimento da (O, X_1, X_2, X_3) a (O, X_1, X_2, X'_3), come illustrato in Figura 1.

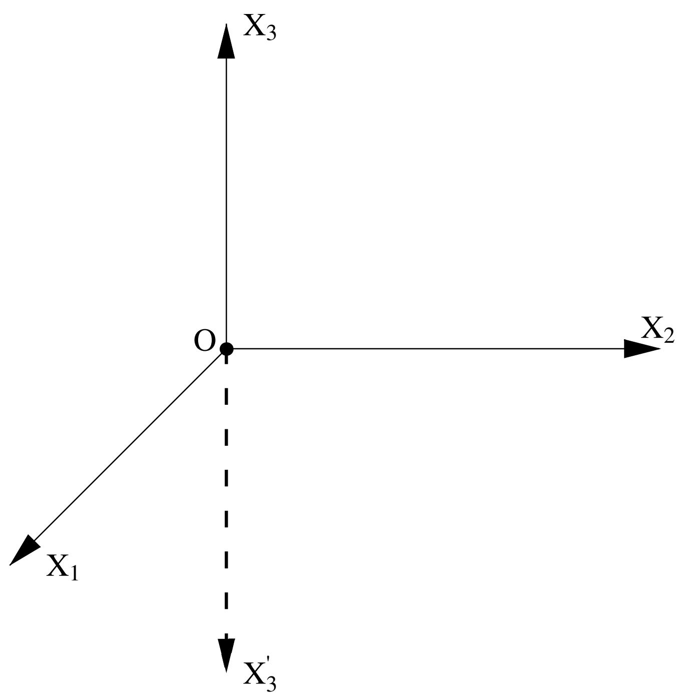

Figura 1 - La simmetria esibita dai materiali monoclini: nulla varia ribaltando l'asse verticale

La matrice **L** dei coseni direttori dei vecchi assi rispetto ai nuovi e' fornita da:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Applicando la legge di variazione (9) si ottiene:

$$c'_{1111} = l_{1\,m}\, l_{1\,n}\, l_{1\,p}\, l_{1\,q}\, c_{mnpq} = c_{1111} \tag{11}$$

e risultati simili si hanno per tutti i coefficienti elastici in cui non compare il pedice 3, oppure per tutti i coefficienti elastici in cui il pedice 3 compare un numero pari di volte (due o quattro volte). Se invece il pedice tre compare un numero dispari di volte, (una volta o tre volte), allora si ha, ad esempio:

$$c'_{1113} = l_{1\,m}\, l_{1\,n}\, l_{1\,p}\, l_{3\,q}\, c_{mnpq} = -c_{1113} \tag{12}$$

Poiche', per la richiesta simmetria, dovra' anche essere $c'_{1113} = c_{1113}$, ne resta che c_{1113} deve essere nullo, cosi' come nulli sono tutti i coefficienti con un numero dispari di pedice 3. In definitiva, la matrice delle costanti elastiche per un materiale monoclino si scrive in funzione di 13 quantita, come segue:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & 0 & 0 \\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & c_{3312} & 0 & 0 \\ c_{1112} & c_{2212} & c_{3312} & c_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} & c_{1323} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1323} & c_{2323} \end{pmatrix} \tag{13}$$

Si noti che una rotazione degli assi di riferimento modifica l'aspetto della matrice, distruggendone l'aspetto ma preservando la simmetria e la possibilita' di definire il materiale in termini di 13 costanti elastiche.

I materiali ortotropi

Si consideri un materiale che abbia simmetria di comportamento rispetto a due piani ortogonali tra loro, ossia un materiale *ortotropo*. Si assuma che i piani di simmetria siano i piani coordinati $OX_1 - OX_2$, ed $OX_2 - OX_3$: il tipo di simmetria che si sta studiando implica che le costanti elastiche non mutano al variare del sistema di riferimento da (O, X_1, X_2, X_3) a (O, X'_1, X_2, X'_3) , come illustrato in Figura 2.
La matrice **L** dei coseni direttori dei vecchi assi rispetto ai nuovi e' fornita da:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Applicando la legge di variazione (9), ed utilizzando i coseni direttori (14) si nota che dovranno essere nulli i coefficienti elastici i cui pedici contengono una combinazione di 1 e 3 in numero dispari, giungendo quindi alla matrice delle costanti elastiche in termini di 9 quantita', come segue:

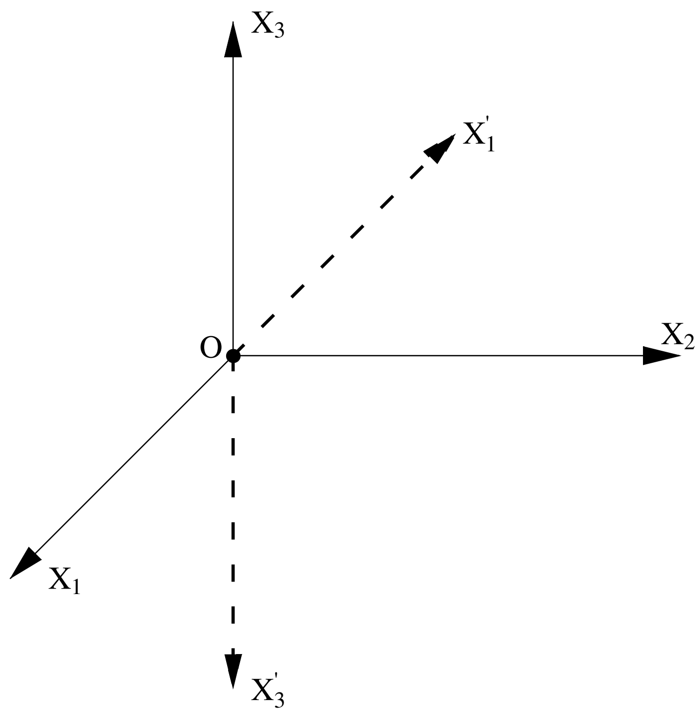

Figura 2 - La simmetria esibita dai materiali ortotropi: nulla varia ribaltando gli assi X_1 ed X_3

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{2323} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Ovviamente, l'inversa della matrice C ha lo stesso aspetto della matrice C, sicche' per un materiale ortotropo l'applicazione di una tensione normale causa solo l'insorgere di deformazioni normali, e l'applicazione di una tensione tangenziale causa l'insorgere della sola corrispondenza deformazione tagliante. Questa caratteristica e' tuttavia valida solo per questo particolare sistema di riferimento.

I materiali trasversalmente isotropi

Si consideri ora un materiale trasversalmente isotropo, ossia un materiale che possiede un asse di simmetria, e sia esso OX_3. La simmetria di rotazione rispetto ad esso significa quindi che i coefficienti elastici non devono mutare al ruotare degli assi OX_1 ed OX_2 di un arbitrario angolo ϕ, come illustrato in Figura 3.

La matrice dei coseni direttori dei nuovi assi rispetto ai vecchi e' fornita da:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

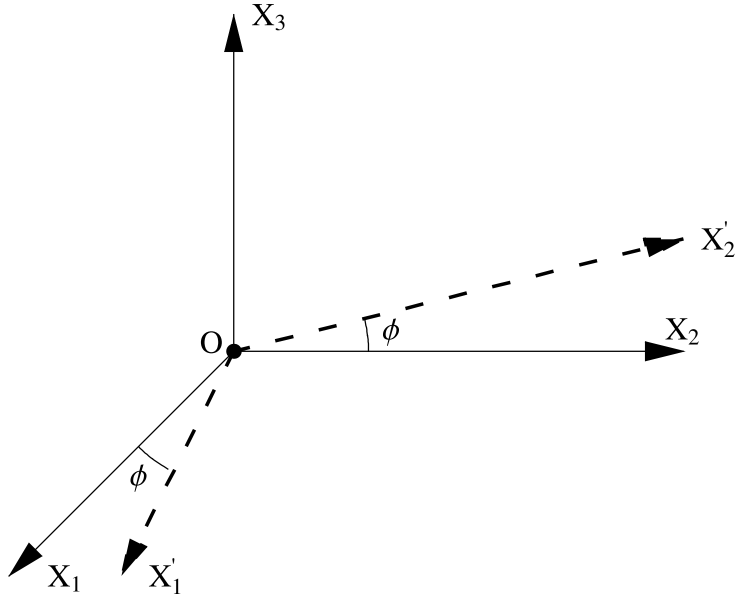

Figura 3 - La simmetria nei materiali trasversalmente isotropi: nulla varia a seguto di una rotazione intorno all'asse X_3

Per dedurre le restrizioni imposte ai coefficienti elastici da questo tipo di simmetria, si consideri che la legge di Hooke si scrivera':

$$\sigma_{ij} = c_{ijhk}\, e_{hk} \tag{17}$$

nel sistema di riferimento originario, e:

$$\sigma'_{pq} = c_{pqrs}\, e'_{rs} \tag{18}$$

nel sistema di riferimento ruotato. Mentre i coefficienti elastici dovranno rimanere costanti, tensioni e deformazioni si trasformano secondo le leggi di trasformazione dei tensori del secondo ordine. Sara' quindi $\sigma'_{pq} = l_{pi}\, l_{qj}\, \sigma_{ij}$, ed esplicitando:

$$\begin{aligned}\sigma'_{11} = l_{1i}\, l_{1j}\, \sigma_{ij} &= l_{11}\, l_{11}\, \sigma_{11} + 2\, l_{11}\, l_{12}\, \sigma_{12} + l_{12}\, l_{12}\, \sigma_{22} = \\ &\sigma_{11} \operatorname{Cos}^2\phi + 2\, \sigma_{12} \operatorname{Cos}\phi \operatorname{Sin}\phi + \sigma_{22} \operatorname{Sin}^2\phi\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\sigma'_{12} = l_{1i}\, l_{2j}\, \sigma_{ij} &= l_{11}\, l_{21}\, \sigma_{11} + l_{11}\, l_{22}\, \sigma_{12} + l_{12}\, l_{21}\, \sigma_{12} + l_{12}\, l_{22}\, \sigma_{22} = \\ &(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \operatorname{Cos}\phi \operatorname{Sin}\phi + \sigma_{12} (\operatorname{Cos}^2\phi - \operatorname{Sin}^2\phi)\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\sigma'_{22} = l_{2i}\, l_{2j}\, \sigma_{ij} &= l_{21}\, l_{21}\, \sigma_{11} + 2\, l_{21}\, l_{22}\, \sigma_{12} + l_{22}\, l_{22}\, \sigma_{22} = \\ &\sigma_{11} \operatorname{Sin}^2\phi - 2\, \sigma_{12} \operatorname{Cos}\phi \operatorname{Sin}\phi + \sigma_{22} \operatorname{Cos}^2\phi\end{aligned} \tag{21}$$

$$\sigma'_{13} = l_{1i}\, l_{3j}\, \sigma_{ij} = l_{11}\, l_{33}\, \sigma_{13} + l_{12}\, l_{33}\, \sigma_{23} = \sigma_{13} \operatorname{Cos}\phi + \sigma_{23} \operatorname{Sin}\phi \tag{22}$$

$$\sigma'_{23} = l_{2i}\, l_{3j}\, \sigma_{ij} = l_{21}\, l_{33}\, \sigma_{13} + l_{22}\, l_{33}\, \sigma_{23} = -\sigma_{13} \operatorname{Sin}\phi + \sigma_{23} \operatorname{Cos}\phi \tag{23}$$

$$\sigma'_{33} = l_{3i}\, l_{3j}\, \sigma_{ij} = l_{33}\, l_{33}\, \sigma_{33} = \sigma_{33} \tag{24}$$

con risultati analoghi per le deformazioni. Si scriva ora in extenso la relazione che fornisce σ'_{11}:

$$\sigma'_{11} = c_{1111}\, e'_{11} + c_{1122}\, e'_{22} + c_{1133}\, e'_{33} + 2\, c_{1112}\, e'_{12} + 2\, c_{1113}\, e'_{13} + 2\, c_{1123}\, e'_{23} \tag{25}$$

e la si esprima in termini di tensioni σ_{ij} e deformazioni e_{ij}:

$$\begin{aligned}&\sigma_{11}\,\mathrm{Cos}^2\phi + 2\,\sigma_{12}\,\mathrm{Cos}\phi\,\mathrm{Sin}\phi + \sigma_{22}\,\mathrm{Sin}^2\phi =\\ &\quad c_{1111}\,(e_{11}\,\mathrm{Cos}^2\phi + 2\,e_{12}\,\mathrm{Cos}\phi\,\mathrm{Sin}\phi + e_{22}\,\mathrm{Sin}^2\phi) +\\ &\quad c_{1122}\,(e_{11}\,\mathrm{Sin}^2\phi - 2\,e_{12}\,\mathrm{Cos}\phi\,\mathrm{Sin}\phi + e_{22}\,\mathrm{Cos}^2\phi) + c_{1133}\,e_{33} +\\ &\quad 2\,c_{1112}\,((e_{22}-e_{11})\,\mathrm{Cos}\phi\,\mathrm{Sin}\phi + e_{12}\,(\mathrm{Cos}^2\phi - \mathrm{Sin}^2\phi)) +\\ &\quad 2\,c_{1113}\,(e_{13}\,\mathrm{Cos}\phi + e_{23}\,\mathrm{Sin}\phi) + 2\,c_{1123}\,(-e_{13}\,\mathrm{Sin}\phi + e_{23}\,\mathrm{Cos}\phi)\end{aligned} \tag{26}$$

D'altro canto, si ha anche:

$$\sigma_{11} = c_{1111}\,e_{11} + c_{1122}\,e_{22} + c_{1133}\,e_{33} + 2\,c_{1112}\,e_{12} + 2\,c_{1113}\,e_{13} + 2\,c_{1123}\,e_{23} \tag{27}$$

$$\sigma_{22} = c_{2211}\,e_{11} + c_{2222}\,e_{22} + c_{2233}\,e_{33} + 2\,c_{2212}\,e_{12} + 2\,c_{2213}\,e_{13} + 2\,c_{2223}\,e_{23} \tag{28}$$

$$\sigma_{12} = c_{1211}\,e_{11} + c_{1222}\,e_{22} + c_{1233}\,e_{33} + 2\,c_{1212}\,e_{12} + 2\,c_{1213}\,e_{13} + 2\,c_{1223}\,e_{23} \tag{29}$$

e qindi la (26) puo' esprimersi interamente in termini di deformazioni:

$$\begin{aligned}&(c_{1111}\,e_{11} + c_{1122}\,e_{22} + c_{1133}\,e_{33} + 2\,c_{1112}\,e_{12} + 2\,c_{1113}\,e_{13} + 2\,c_{1123}\,e_{23})\\ &\quad \mathrm{Cos}^2\phi +\\ &\quad 2\,(c_{1211}\,e_{11} + c_{1222}\,e_{22} + c_{1233}\,e_{33} + 2\,c_{1212}\,e_{12} + 2\,c_{1213}\,e_{13} + 2\,c_{1223}\,e_{23})\\ &\quad \mathrm{Cos}\phi\,\mathrm{Sin}\phi +\\ &\quad (c_{2211}\,e_{11} + c_{2222}\,e_{22} + c_{2233}\,e_{33} + 2\,c_{2212}\,e_{12} + 2\,c_{2213}\,e_{13} + 2\,c_{2223}\,e_{23})\\ &\quad \mathrm{Sin}^2\phi = c_{1111}\,(e_{11}\,\mathrm{Cos}^2\phi + 2\,e_{12}\,\mathrm{Cos}\phi\,\mathrm{Sin}\phi + e_{22}\,\mathrm{Sin}^2\phi) +\\ &\quad c_{1122}\,(e_{11}\,\mathrm{Sin}^2\phi - 2\,e_{12}\,\mathrm{Cos}\phi\,\mathrm{Sin}\phi + e_{22}\,\mathrm{Cos}^2\phi) + c_{1133}\,e_{33} +\\ &\quad 2\,c_{1112}\,((e_{22}-e_{11})\,\mathrm{Cos}\phi\,\mathrm{Sin}\phi + e_{12}\,(\mathrm{Cos}^2\phi - \mathrm{Sin}^2\phi)) +\\ &\quad 2\,c_{1113}\,(e_{13}\,\mathrm{Cos}\phi + e_{23}\,\mathrm{Sin}\phi) + 2\,c_{1123}\,(-e_{13}\,\mathrm{Sin}\phi + e_{23}\,\mathrm{Cos}\phi)\end{aligned} \tag{30}$$

Uguagliando a zero il coefficiente di e_{11} si ottiene

$$c_{1211} = 0 \tag{31}$$

Uguagliando a zero il coefficiente di e_{22} si ottiene

$$2\,c_{1222}\,\mathrm{Cos}\phi + c_{2222}\,\mathrm{Sin}\phi = c_{1111}\,\mathrm{Sin}\phi + 2\,c_{1112}\,\mathrm{Cos}\phi \tag{32}$$

e quindi si puo' dedurre:

$$\begin{aligned}c_{1222} &= c_{1112}\\ c_{2222} &= c_{1111}\end{aligned} \tag{33}$$

Uguagliando a zero il coefficiente di e_{33} si ottiene

$$c_{1133}\,\mathrm{Cos}^2\phi + 2\,c_{1233}\,\mathrm{Cos}\phi\,\mathrm{Sin}\phi + c_{2233}\,\mathrm{Sin}^2\phi = c_{1133} \tag{34}$$

ossia:

$$\begin{aligned}c_{2233} &= c_{1133}\\ c_{1233} &= 0\end{aligned} \tag{35}$$

Uguagliando a zero il coefficiente di e_{12} si ottiene

$$\begin{aligned}&4\, c_{1212}\, \mathrm{Cos}\phi\, \mathrm{Sin}\phi + 2\, c_{2212}\, \mathrm{Sin}^2\phi = \\ &2\, c_{1111}\, 2\, \mathrm{Cos}\phi\, \mathrm{Sin}\phi - 2\, c_{1122}\, \mathrm{Cos}\phi\, \mathrm{Sin}\phi - 2\, c_{1112}\, \mathrm{Sin}^2\phi\end{aligned} \tag{36}$$

da cui e' possibile dedurre:

$$c_{1212} = \frac{1}{2}\,(c_{1111} - c_{1122}) \tag{37}$$

$$c_{2212} = -c_{1112} \tag{38}$$

e dal confronto con la prima delle (33) si ha anche:

$$\begin{aligned}&c_{2212} = 0\\ &c_{1112} = 0\end{aligned} \tag{39}$$

Uguagliando a zero il coefficiente di e_{13} si ottiene

$$c_{1113}\, \mathrm{Cos}^2\phi + 2\, c_{1213}\, \mathrm{Cos}\phi\, \mathrm{Sin}\phi + c_{2213}\, \mathrm{Sin}^2\phi = c_{1113}\, \mathrm{Cos}\phi - c_{1123}\, \mathrm{Sin}\phi \tag{40}$$

e quindi si puo' dedurre:

$$\begin{aligned}&c_{1113} = 0\\ &c_{1213} = 0\\ &c_{2213} = 0\end{aligned} \tag{41}$$

Infine, uguagliando a zero il coefficiente di e_{23} si ottiene

$$c_{1123}\, \mathrm{Cos}^2\phi + 2\, c_{1223}\, \mathrm{Cos}\phi\, \mathrm{Sin}\phi + c_{2223}\, \mathrm{Sin}^2\phi = c_{1113}\, \mathrm{Sin}\phi + c_{1123}\, \mathrm{Cos}\phi \tag{42}$$

da cui:

$$\begin{aligned}&c_{1123} = 0\\ &c_{1223} = 0\\ &c_{2223} = 0\end{aligned} \tag{43}$$

La matrice delle costanti elastiche si e' cosi' semplificata:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{1111} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1133} & c_{1133} & c_{3333} & 0 & c_{3313} & c_{3323} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\,(c_{1111} - c_{1122}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{3313} & 0 & c_{1313} & c_{1323} \\ 0 & 0 & c_{3323} & 0 & c_{1323} & c_{2323} \end{pmatrix} \tag{44}$$

Si scriva ora la relazione che lega la σ'_{33} alla σ_{33}:

$$\begin{aligned}&c_{3311}\, e'_{11} + c_{3322}\, e'_{22} + c_{3333}\, e'_{33} + 2\, c_{3312}\, e'_{12} + 2\, c_{3313}\, e'_{13} + 2\, c_{3323}\, e'_{23} = \\ &c_{3311}\, e_{11} + c_{3322}\, e_{22} + c_{3333}\, e_{33} + 2\, c_{3312}\, e_{12} + 2\, c_{3313}\, e_{13} + 2\, c_{3323}\, e_{23}\end{aligned} \tag{45}$$

ossia:

$$\begin{aligned}&c_{3311}\,(e_{11}\, \mathrm{Cos}^2\phi + 2\, e_{12}\, \mathrm{Cos}\phi\, \mathrm{Sin}\phi + e_{22}\, \mathrm{Sin}^2\phi) + \\ &c_{3322}\,(e_{11}\, \mathrm{Sin}^2\phi - 2\, e_{12}\, \mathrm{Cos}\phi\, \mathrm{Sin}\phi + e_{22}\, \mathrm{Cos}^2\phi) + c_{3333}\, e_{33} +\end{aligned}$$

$$2\, c_{3312}\, ((e_{22} - e_{11})\, \text{Cos}\phi\, \text{Sin}\phi + e_{12}\, (\text{Cos}^2\, \phi - \text{Sin}^2\, \phi)) + 2\, c_{3313}\, (e_{13}\, \text{Cos}\phi + e_{23}\, \text{Sin}\phi) + 2\, c_{3323}\, (-e_{13}\, \text{Sin}\phi + e_{23}\, \text{Cos}\phi) = c_{3311}\, e_{11} + c_{3322}\, e_{22} + c_{3333}\, e_{33} + 2\, c_{3312}\, e_{12} + 2\, c_{3313}\, e_{13} + 2\, c_{3323}\, e_{23}$$

Annullando i coefficienti di e_{13} si giunge a scrivere:

$$c_{3313}\, \text{Cos}\phi - c_{3323}\, \text{Sin}\phi = c_{3313} \tag{47}$$

da cui:

$$\begin{aligned} c_{3313} &= 0 \\ c_{3323} &= 0 \end{aligned} \tag{48}$$

e la matrice delle costanti elastiche si e' cosi' ulteriormente semplificata:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{1111} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1133} & c_{1133} & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} & c_{1323} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1323} & c_{2323} \end{pmatrix} \tag{49}$$

Scrivendo infine la relazione che lega σ'_{13} a σ_{13} si giunge ad annullare anche il coefficiente c_{1323}, giungendo alla forma finale della matrice di elasticita' per materiali trasversalmente isotropi:

$$c_{1311}\, e'_{11} + c_{1322}\, e'_{22} + c_{1333}\, e'_{33} + 2\, c_{1312}\, e'_{12} + 2\, c_{1313}\, e'_{13} + 2\, c_{1323}\, e'_{23} = (c_{1311}\, e_{11} + c_{1322}\, e_{22} + c_{1333}\, e_{33} + 2\, c_{1312}\, e_{12} + 2\, c_{1313}\, e_{13} + 2\, c_{1323}\, e_{23})\, \text{Cos}\phi + (c_{2311}\, e_{11} + c_{2322}\, e_{22} + c_{2333}\, e_{33} + 2\, c_{2312}\, e_{12} + 2\, c_{2313}\, e_{13} + 2\, c_{2323}\, e_{23})\, \text{Sin}\phi \tag{50}$$

ed ancora, esprimendo le e'_{ij} in termini di e_{ij}:

$$c_{1311}\, (e_{11}\, \text{Cos}^2\, \phi + 2\, e_{12}\, \text{Cos}\phi\, \text{Sin}\phi + e_{22}\, \text{Sin}^2\, \phi) + c_{1322}\, (e_{11}\, \text{Sin}^2\, \phi - 2\, e_{12}\, \text{Cos}\phi\, \text{Sin}\phi + e_{22}\, \text{Cos}^2\, \phi) + c_{1333}\, e_{33} + 2\, c_{1312}\, ((e_{22} - e_{11})\, \text{Cos}\phi\, \text{Sin}\phi + e_{12}\, (\text{Cos}^2\, \phi - \text{Sin}^2\, \phi)) + 2\, c_{1313}\, (e_{13}\, \text{Cos}\phi + e_{23}\, \text{Sin}\phi) + 2\, c_{1323}\, (-e_{13}\, \text{Sin}\phi + e_{23}\, \text{Cos}\phi) = (c_{1311}\, e_{11} + c_{1322}\, e_{22} + c_{1333}\, e_{33} + 2\, c_{1312}\, e_{12} + 2\, c_{1313}\, e_{13} + 2\, c_{1323}\, e_{23})\, \text{Cos}\phi + (c_{2311}\, e_{11} + c_{2322}\, e_{22} + c_{2333}\, e_{33} + 2\, c_{2312}\, e_{12} + 2\, c_{2313}\, e_{13} + 2\, c_{2323}\, e_{23})\, \text{Sin}\phi \tag{51}$$

Annullando il coefficiente di e_{13} si ottiene:

$$2\, c_{1313}\, \text{Cos}\phi - 2\, c_{1323}\, \text{Sin}\phi = 2\, c_{1313}\, \text{Cos}\phi + 2\, c_{2313}\, \text{Sin}\phi \tag{52}$$

e quindi:

$$c_{1323} = 0 \tag{53}$$

mentre l'annullarsi del coefficiente di e_{23} implica:

$$c_{1313}\, \text{Sin}\phi + c_{1323}\, \text{Cos}\phi = c_{1323}\, \text{Cos}\phi + c_{2323}\, \text{Sin}\phi \tag{54}$$

ossia:

$$c_{1313} = c_{2323} \tag{55}$$

Si e' giunti infine alla forma finale della matrice di elasticita' per *materiali trasversalmente isotropi*:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{1111} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1133} & c_{1133} & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} \end{pmatrix} \tag{56}$$

Come si vede, il materiale trasversalmente isotropo puo' definirsi attraverso l'introduzione di 5 costanti elastiche indipendenti.

I materiali isotropi

Si e' cosi' giunti al caso piu' stringente di simmetria, quella posseduta dai materiali indifferenti alla scelta del riferimento. Equivalentemente, si considerano ora i materiali che godono della proprieta' di simmetria rotazionale rispetto a due assi mutuamente ortogonali, i cosiddetti *materiali isotropi*. Per essi, un ragionamento identico a quello svolto per il materiale trasversalmente isotropo porta a concludere che dovra' essere:

$$\begin{aligned} c_{1313} &= \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) \\ c_{3333} &= c_{1111} \\ c_{1133} &= c_{1122} \end{aligned} \tag{57}$$

e quindi il solido isotropo e' definito da due costanti elastiche, e dalla matrice di elasticita':

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{1111} & c_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{1122} & c_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{1111} - c_{1122}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{1111} - c_{1122}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{1111} - c_{1122}}{2} \end{pmatrix} \tag{58}$$

E' infine usuale, seguendo Lame', definire le due costanti elastiche:

$$\begin{aligned} \lambda &= c_{1122} \\ \mu &= \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) \end{aligned} \tag{59}$$

da cui subito:

$$c_{1111} = \lambda + 2\,\mu \tag{60}$$

e la matrice di elasticita' assume la forma canonica:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\,\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\,\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\,\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \tag{61}$$

Grafici