Complementi 3 - Richiami di algebra tensoriale

[Ultima revisione 9 gennaio 2009]

In questo notebook si richiamano brevemente alcune definizioni ed alcune proprieta' di algebra tensoriale, limitatamente ai sistemi di riferimento cartesiani.
In generale, un tensore di ordine n e' definito da 3^n numeri, e descrive un fenomeno fisico restando invariante al variare del sistema di riferimento. Tuttavia, si dedichera' particolare attenzione ai tensori di ordine zero (scalari), uno (vettori), due, tre e quattro, in quanto piu' frequenti in analisi strutturale, e si forniscono alcune regole per la loro manipolazione.

Scalari e vettori

Una quantita' scalare non e' ovviamente influenzata da un cambio di riferimento, e quindi gli scalari hanno proprieta' tensoriali. Essi sono tensori di ordine zero, e sono definiti da $3^0 = 1$ quantita'. Un esempio ovvio e' la densita' di massa di un corpo B.

Si consideri ora un vettore **x**, che nel sistema di riferimento $(0, X_1, X_2, X_3)$ abbia componenti:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Un nuovo sistema di riferimento $(0, X_1', X_2', X_3')$ e' definito dai coseni direttori dei nuovi assi rispetto ai vecchi assi, ossia dalla matrice:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \tag{2}$$

ed il vettore **x**, nel nuovo sistema di riferimento, ha componenti **x' = Lx.** Indicialmente si ha:

$$x_i' = l_{ij}\, x_j \qquad i, j = 1, 2, 3 \tag{3}$$

Per definizione, tre quantita' che si trasformano secondo questa legge costituiscono un vettore, o un *tensore di ordine uno*.

Si notino le seguenti:

Prop.1 - La moltiplicazione di un tensore di ordine uno per un tensore di ordine zero fornisce un tensore di ordine uno.

Prop.2 - La somma di due tensori di ordine uno e' un tensore di ordine uno.

Dim. - Se infatti **x** ed **y** sono due vettori, la somma **x+y** si trasforma secondo òa (3):

$$x'_i + y'_i = l_{ij}\, x_j + l_{ij}\, y_j = l_{ij}\, (x_i + y_i) \qquad i, j = 1, 2, 3 \qquad (4)$$

Tensori di ordine due e matrici

Def.1 - Nove quantita' w_{km} , riferite ad un sistema di riferimento $(0, X_1, X_2, X_3)$, che si trasformano secondo le leggi:

$$w'_{ij} = l_{ik}\, l_{jm}\, w_{km} \qquad i, j, k, m = 1, 2, 3 \qquad (5)$$

quando riferite al nuovo sistema di riferimento $(0, X'_1, X'_2, X'_3)$, costituiscono un *tensore di ordine due*.

Un esempio immediato di tensore di ordine due si ottiene immediatamente considerando il *prodotto esterno* di due tensori di ordine uno, ossia di due vettori **x** ed **y**. Per definizione si ha:

$$(x \otimes y)_{ij} = w_{ij} = x_i\, y_j \qquad (6)$$

e poiche' in un nuovo sistema di riferimento:

$$(x' \otimes y')_{ij} = x'_i\, y'_j = l_{ik}\, l_{jm}\, x_k\, y_m = l_{ik}\, l_{jm}\, (x \otimes y)_{km} \qquad (7)$$

si puo' concludere che il prodotto esterno di due tensori di ordine uno fornisce un tensore di ordine due.

L'importanza dei tensori di ordine due in scienza delle costruzioni e' evidente: il tensore delle tensioni, il tensore delle deformazioni, il tensore dei momenti di inerzia, sono solo alcuni tra gli esempi piu' usuali.

■ Tensori e matrici

Una matrice quadrata di ordine tre e' una tabella ordinata in righe e colonne, in cui trovano posto nove quantita' scalari. Un tensore di ordine due puo' essere rappresentato da una simile tabella, ma le sue componenti devono anche obbedire alla legge (5) di trasformazione. Quindi, non ogni matrice quadrata e' la rappresentazione matriciale di un tensore.

■ Il δ di Kroneker

Si considerino le nove quantita' cosi' definite:

$$\delta_{ij} = 1 \qquad (8)$$

se $i = j$, e

$$\delta_{ij} = 0 \qquad (9)$$

se $i \neq j$.

Per dimostrare che esse costituiscono un tensore, si consideri che nel nuovo sistema di riferimento le nove quantita' trasformate δ'_{ij} dovranno essere comunque pari ad uno se gli indici sono uguali, e a zero altrimenti. D'altro canto si ha:

$$\delta'_{ij} = l_{ik}\, l_{jm}\, \delta_{km} = l_{ik}\, l_{jk} \qquad (10)$$

e poiche' la matrice **L** e' ortogonale, si ha:

$$\delta'_{ij} = \delta_{ij} \qquad (11)$$

Le nove quantita' δ_{ij} costituiscono quindi un tensore del secondo ordine, detto *tensore di Kroneker*, o *tensore di sostituzione*.

■ Gli invarianti tensoriali

Assegnato un tensore T di ordine due, si puo' dimostrare che esistono tre quantita' che non variano al variare del sistema di riferimento, e che pertanto vengono denotati invarianti tensoriali. Si ha allora:

$$T^{(1)} = T_{ii} = T'_{ii} \qquad (12)$$

$$T^{(2)} = T_{ij}\, T_{ji} = T'_{ij}\, T'_{ji} \qquad (13)$$

$$T^{(3)} = T_{ij}\, T_{jk}\, T_{ki} = T'_{ij}\, T'_{jk}\, T'_{ki} \qquad (14)$$

La (12) puo' dimostrarsi a partire dalla legge di trasformazione tensoriale:

$$T'_{ij} = l_{ik}\, l_{jm}\, T_{km} \qquad i, j, k, m = 1, 2, 3 \qquad (15)$$

ponendo $i = j$,e quindi forzando la somma su i:

$$T'_{ii} = l_{ik}\, l_{im}\, T_{km} \qquad (16)$$

Ora, per l'ortogonalita' della matrice **L** dei coseni direttori si ha $l_{ik}\, l_{im} = \delta_{km}$, e quindi:

$$T'_{ii} = \delta_{km}\, T_{km} = T_{kk} \qquad (17)$$

Analogamente, la (13) puo' dimostrarsi come segue:

$$\begin{aligned} T'_{ij}\, T'_{ji} &= (l_{ik}\, l_{jl}\, T_{kl})\, (l_{jm}\, l_{in}\, T_{mn}) = \\ &\quad l_{ik}\, l_{jl}\, l_{jm}\, l_{in}\, T_{kl}\, T_{mn} = \delta_{kn}\, \delta_{lm}\, T_{kl}\, T_{mn} = T_{nm}\, T_{mn} \end{aligned} \qquad (18)$$

e la (14):

$$\begin{aligned} T'_{ij}\, T'_{jk}\, T_{ki} &= (l_{im}\, l_{jn}\, T_{mn})\, (l_{jr}\, l_{ks}\, T_{rs})\, (l_{kt}\, l_{ip}\, T_{tp}) = \\ &\quad l_{im}\, l_{jn}\, l_{jr}\, l_{ks}\, l_{kt}\, l_{ip}\, T_{mn}\, T_{rs}\, T_{tp} = \delta_{mp}\, \delta_{nr}\, \delta_{st}\, T_{mn}\, T_{rs}\, T_{tp} = T_{mn}\, T_{ns}\, T_{sm} \end{aligned} \qquad (19)$$

Nota - Qualsiasi combinazione dei tre invarianti appena definiti e' ancora invariante. Ad esempio, in analisi della tensione si incontrano gli invarianti lineari, quadratici e cubici, correlati agli invarianti tensoriali attraverso le relazioni:

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= \sigma_{ii} = I_{1\sigma} \\ T^{(2)} &= \sigma_{ij}\, \sigma_{ji} = I_{1\sigma}^2 - 2\, I_{2\sigma} \\ T^{(3)} &= \sigma_{ij}\, \sigma_{jk}\, \sigma_{ki} = I_{1\sigma}^3 - 3\, I_{1\sigma}\, I_{2\sigma} + 3\, I_{3\sigma} \end{aligned} \qquad (20)$$

Tensori di ordine tre e quattro

Def. - Un insieme di $3^3 = 27$ quantita' w_{rst} , riferite ad un sistema di riferimento $(0, X_1, X_2, X_3)$, che si trasformano secondo le leggi:

$$w'_{ijk} = l_{ir}\, l_{js}\, l_{kt}\, w_{rst} \qquad i, j, k, r, s, t = 1, 2, 3 \qquad (21)$$

quando riferite al nuovo sistema di riferimento $(0, X'_1, X'_2, X'_3)$, costituiscono un *tensore di ordine tre*.

A somiglianza di quanto detto per i tensori di ordine due, il prodotto esterno di tre vettori fornisce un tensore di ordine tre

■ Il tensore di Ricci

Si considerino ora le 27 quantita' ϵ_{ijk} definite da:

$$\epsilon_{ijk} = 0 \qquad (22)$$

quando due o tre indici sono uguali,

$$\epsilon_{ijk} = 1 \qquad (23)$$

quando i tre indici sono diversi tra loro, e si susseguono in ordine ciclico $i \to j \to k \to i$,

$$\epsilon_{ijk} = -1 \qquad (24)$$

quando i tre indici sono diversi tra loro, e non si susseguono in ordine ciclico. Il determinante di una matrice A puo' scriversi, usando tali quantita', come $\epsilon_{ijk}\, a_{1\,i}\, a_{2\,j}\, a_{3\,k}$.

Per dimostrare il carattere di tensorialita' di queste ventisette quantita' occorre provare che:

$$\epsilon'_{ijk} = l_{ir}\, l_{js}\, l_{kt}\, \epsilon_{rst} \qquad i, j, k, r, s, t = 1, 2, 3 \qquad (25)$$

Svolgendo i prodotti si puo' controllare che $\epsilon'_{ijk} = \epsilon_{ijk}$, ossia che anche il tensore di Ricci resta invariante al variare del sistema di riferimento.

Def. - Un insieme di $3^4 = 81$ quantita' C_{mnpq} , riferite ad un sistema di riferimento $(0, X_1, X_2, X_3)$, che si trasformano secondo le leggi:

$$C'_{ijkl} = l_{im}\, l_{jn}\, l_{kp}\, l_{lq}\, C_{mnpq} \qquad i, j, k, l, m, n, p, q = 1, 2, 3 \qquad (26)$$

quando riferite al nuovo sistema di riferimento $(0, X'_1, X'_2, X'_3)$, costituiscono un *tensore di ordine quattro*.

A somiglianza di quanto detto per i tensori di ordine due, il prodotto esterno di quattro vettori fornisce un tensore di ordine quattro, ed anche il prodotto esterno di due tensori di ordine due porta ad untensore di ordine quattro. Siano infatti a_{ij} e b_{ij} due tensori di ordine due, e si definisca il prodotto esterno come:

$$C_{ijhk} = (A \otimes B)_{ijhk} = a_{ij}\, b_{hk} \qquad (27)$$

A seguito di un cambio del sistema di riferimento,

$$C'_{ijhk} = a'_{ij}\, b'_{hk} = l_{im}\, l_{jn}\, a_{mn}\, l_{hr}\, l_{ks}\, b_{rs} = l_{im}\, l_{jn}\, l_{hr}\, l_{ks}\, C_{mnrs} \qquad (28)$$

dimostrando la tensorialita' delle 81 quantita' (18).

Un esempio classico di tensore di ordine quattro in scienza delle costruzioni e' costituito dalle 81 costanti elastiche di Hooke.

Operazioni sui tensori: contrazioni e regole del quoziente

L'operazione di contrazione consiste nel porre, in una formula, due indici uguali l'uno all'altro, cosi' forzando implicitamente la somma su di essi. In tal modo l'ordine del tensore si abbassa di due. Ad esempio, considerando un tensore di ordine due, T_{ij}, contrarre i due indici significa porre $i = j$, ottenenendo lo scalare T_{ii}.
Considerando invece il tensore di ordine tre $A_{ij}\, v_k$, prodotto di un tensore di ordine due per un vettore, si possono contrare gli indici i e j, ottenendo $A_{ii}\, v_k$, ossia il prodotto tra uno scalare ed il vettore v, oppure si possono contrarre j e k, ottenendo $A_{ij}\, v_j$, che non e' altro che l'usuale prodotto matriciale tra A e v. Infine, si possono contrarre gli indici i e k, giungendo al vettore $A_{ij}\, v_i$, che puo' identificarsi con il prodotto tra A^T e v.
Considerando, come ultimo esempio, il tensore di ordine quattro $A_{ij}\, B_{hk}$, prodotto di due tensori di ordine quattro, e' facile verificare che possono ottenersi, tramite contrazione, i seguenti tensori di ordine due: $A_{ij}\, B_{ki}$, $A_{ij}\, B_{ik}$, $A_{ij}\, B_{kj}$ ed infine $A_{ij}\, B_{jk}$, e che queste quattro operazioni sono equavalenti ai prodotti matriciali **BA**, $\boldsymbol{A^T B}$, $\mathbf{AB}^{\boldsymbol{T}}$ ed **AB**.

Si consideri ora di dover verificare se un insieme di nove quantita' a_{ij} abbiano, o meno, carattere di tensorialita'. A tal fine, la regola del quoziente stabilisce che occorre considerare un arbitrario vettore x_i, e verificare se il prodotto $a_{ij}\, x_j$ e' o meno un vettore. Se la risposta e' affermativa, allora le a_{ij} hanno carattere di tensorialita'.

Per dimostrare la validita' di tale regola, si consideri una rotazione del sistema di riferimento, per cui:

$$a'_{ij}\, x'_j = \xi'_i = l_{ik}\, \xi_k = l_{ik}\, a_{km}\, x_m \qquad (29)$$

Ma $x_m = l_{nm}\, x'_n$ e quindi:

$$a'_{ij}\, x'_j = l_{ik}\, l_{nm}\, a_{km}\, x'_n \qquad (30)$$

da cui:

$$(a'_{in} - l_{ik}\, l_{nm}\, a_{km})\, x'_n = 0 \qquad (31)$$

e data l'arbitrarieta' del vettore x, si ottiene che A deve variare secondo la legge dei tensori del secondo ordine.

La regola del quoziente non e' ovviamente limitata a questo caso di oridne due. Ad esempio, e' possibile dimostrare la tensorialita' delle 81 costanti elastiche partendo dalla legge di Hooke:

$$\sigma_{ij} = C_{ijhk}\, e_{hk} \qquad (32)$$

ed osservare che sia le deformazioni sono esprimibili come tensori di ordine due.