
Complementi 2 - Le trasformazioni simmetriche ed antisimmetriche

[Ultima revisione 25 dicembre 2008]

Ogni matrice \mathbf{A} puo' essere espressa come somma di una matrice simmetrica ed una matrice antisimmetrica:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) = \mathbf{E} + \mathbf{\Omega} \quad (1)$$

In questa Lezione si studiano separatamente le proprieta' delle trasformazioni lineari rette da una matrice antisimmetrica e delle trasformazioni lineari rette da una matrice simmetrica.

Le trasformazioni antisimmetriche

Si consideri la trasformazione lineare $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, col suo associato vettore spostamento $\mathbf{u} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} \equiv \mathbf{B}\mathbf{x}$. La trasformazione lineare si dira' antisimmetrica se la matrice \mathbf{B} e' antisimmetrica:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & 0 & -b_{23} \\ -b_{13} & b_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} \\ -a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Per illustrare le proprieta' geometriche dello spostamento \mathbf{u} dovuto ad una trasformazione antisimmetrica si consideri anzitutto la seguente:

Prop. 1 - Sia $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ una trasformazione antisimmetrica. Il punto H, di coordinate (a_{23}, a_{13}, a_{12}) non subisce spostamenti.

Dim. Si ha immediatamente:

$$\begin{pmatrix} u_{1H} \\ u_{2H} \\ u_{3H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} \\ -a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{23} \\ a_{13} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{12} a_{13} + a_{13} a_{12} \\ a_{12} a_{23} - a_{23} a_{12} \\ -a_{13} a_{23} + a_{23} a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

La retta che congiunge l'origine al punto H e' costituita da punti con coordinate $(ka_{23}, ka_{13}, ka_{12})$, e quindi non subiscono spostamenti. Essa e' quindi una direzione invariante, ed i suoi punti restano fissi a seguito della trasformazione.

Si consideri ora un punto generico M, il cui spostamento $\overrightarrow{MM'}$ e' esprimibile come:

$$\begin{pmatrix} u_{1M} \\ u_{2M} \\ u_{3M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} \\ -a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ a_{12} x_1 - a_{23} x_3 \\ -a_{13} x_1 + a_{23} x_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Calcolando il prodotto scalare tra il vettore \overrightarrow{OM} ed il vettore spostamento $\overrightarrow{MM'}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MM'} &= x_1 u_{1M} + x_2 u_{2M} + x_3 u_{3M} = \\ &= x_1 (-a_{12} x_2 + a_{13} x_3) + x_2 (a_{12} x_1 - a_{23} x_3) + x_3 (-a_{13} x_1 + a_{23} x_2) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\tan \alpha = \frac{(MM')}{(QM)} = OH = \sqrt{a_{23}^2 + a_{13}^2 + a_{12}^2} \quad (10)$$

e quindi:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a_{23}^2 + a_{13}^2 + a_{12}^2}} \quad (11)$$

Accanto a questa rotazione, si ha un allungamento in direzione normale all'asse OH, definito da:

$$E_{MM'} = \frac{(QM') - (QM)}{(QM)} = \frac{(QM') - (QM) \cos \alpha}{(QM') \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + a_{23}^2 + a_{13}^2 + a_{12}^2} - 1 \quad (12)$$

Poiche' sia l'angolo di rotazione α che l'allungamento percentuale $E_{MM'}$ dipendono solo dai coefficienti della matrice \mathbf{A} , ma non dalle coordinate del punto M considerato, si puo' concludere che per effetto della trasformazione antisimmetrica tutti i punti subiscono una rotazione di ampiezza α , intorno all'asse della trasformazione, unita ad una dilatazione cilindrica intorno allo stesso asse. Se pero' l'angolo di rotazione e' piccolo, si potra' scrivere:

$$E_{MM'} = \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \approx \frac{1 - 1 + \frac{\alpha^2}{2}}{1 - \frac{\alpha^2}{2}} \approx \frac{\alpha^2}{2} \quad (13)$$

Le trasformazioni simmetriche

La trasformazione lineare $\xi = \mathbf{A}x$ retta da una matrice \mathbf{A} simmetrica si dice una *trasformazione simmetrica*. La sua importanza in Scienza delle Costruzioni puo' difficilmente essere sottostimata, in quanto molto frequente in analisi della deformazione, della tensione, etc. Gia' si e' dimostrato che tale tipo di trasformazione ammette solo autosoluzioni reali, e che gli autovettori di \mathbf{A} sono ortogonali. Puo' anche dimostrarsi un interessante proprieta' di reciprocita':

Prop.1 - Sia $\xi = \mathbf{A}x$ una trasformazione simmetrica. Se il vettore x e' trasformato in un vettore ξ ed un vettore y e' trasformato in η , allora si ha $x \cdot \eta = y \cdot \xi$

Dim. - I due prodotti scalari sono forniti da:

$$x \cdot \eta = x_1 (a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3) + x_2 (a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3) + x_3 (a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3) \quad (14)$$

$$y \cdot \xi = y_1 (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3) + y_2 (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3) + y_3 (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3) \quad (15)$$

e quindi:

$$x \cdot \eta - y \cdot \xi = x_1 y_2 (a_{12} - a_{21}) + x_1 y_3 (a_{13} - a_{31}) + x_2 y_3 (a_{23} - a_{32}) + x_2 y_1 (a_{21} - a_{12}) + x_3 y_1 (a_{31} - a_{13}) + x_3 y_2 (a_{32} - a_{23}) \quad (16)$$

Se la matrice \mathbf{A} e' simmetrica, si ha $x \cdot \eta - y \cdot \xi = 0$ ■

Si evince anche dalla dimostrazione precedente, che questa proprieta' di reciprocita' e' caratteristica delle trasformazioni simmetriche, nel senso che altre trasformazioni non la rispettano.

Dalla proprieta' di reciprocita' discende un'altra interessante proprieta' delle trasformazioni simmetriche:

Prop.2 - Sia $\xi = Ax$ una trasformazione simmetrica. Per essa, ogni direzione invariante e' una direzione principale.

Dim. - Si ricordi che una direzione e' invariante se un punto appartenente ad essa si muove lungo la retta stessa, mentre una direzione, ed il piano ad esso ortogonale, sono principali se si trasformano in una retta ed un piano ancora ortogonali tra loro.

Cio' premesso, sia y un vettore lungo una direzione invariante, che si trasforma nel vettore η ancora appartenente alla stessa retta, e sia P il piano ortogonale ad y . Sia ora x e' un vettore giacente nel piano P , e ξ il suo trasformato. Poiche' x e' ortogonale ad η , ne segue che il loro prodotto scalare e' nullo, $x \cdot \eta = 0$, e per la proprieta' di reciprocita', anche il prodotto scalare tra y e ξ e' nullo, e quindi ξ appartiene anch'esso al piano P . Ne segue l'asserto, in quanto anche il piano P ortogonale alla direzione invariante e' invariante.

Se si considerano ora due vettori a e b , giacenti nel piano P lungo le altre due direzioni principali, e' immediato realizzare che i due vettori trasformati α e β non possono ruotare, in quanto sarebbe violata la proprieta' di reciprocita': e' infatti evidente dalla Figura 2 che $a \cdot \beta$ e' negativo, mentre il prodotto scalare $\alpha \cdot b$ e' positivo. Ne segue che anche le altre due direzioni principali sono invarianti. ■

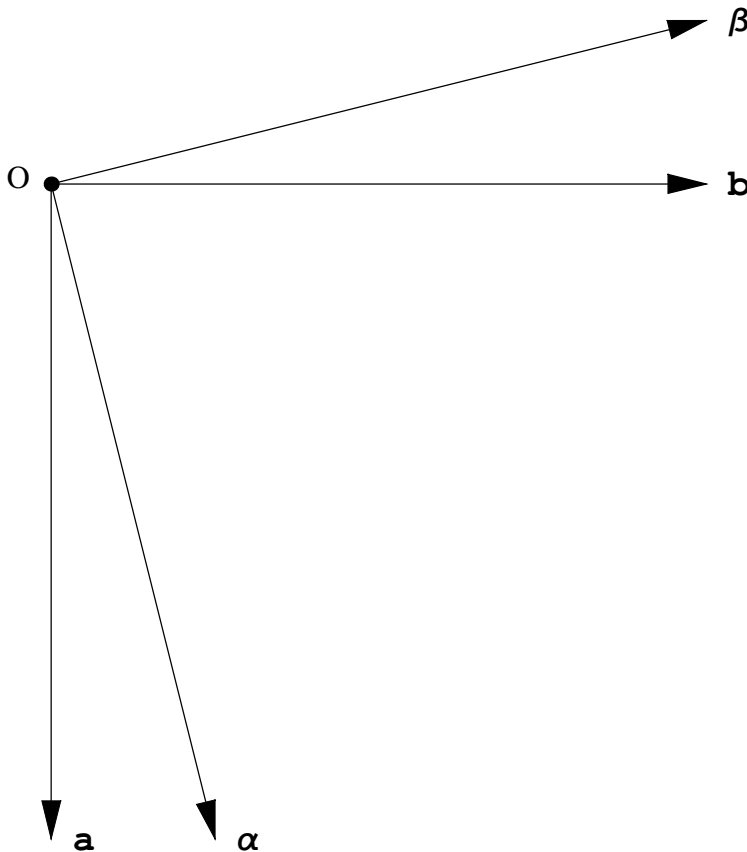


Figura 2 - Una rotazione che viola la proprieta' di reciprocita'

Una trasformazione per cui ogni direzione invariante e' una direzione principale si dice una trasformazione non-rotazionale. E' possibile dimostrare la:

Prop.3 - Le trasformazioni non-rotazionali sono le sole trasformazioni a godere della proprieta' di reciprocita'

Dim - Si consideri una trasformazione generica $\xi = \mathbf{A}\mathbf{x}$, e siano \mathbf{a} e \mathbf{b} due vettori giacenti lungo due direzioni invarianti, come riportato in Figura 3. Essi si trasformano in due vettori α e β , ancora appartenenti alle due direzioni invarianti, sicche' si potra' scrivere:

$$\begin{aligned}\alpha &= \lambda_1 \mathbf{a} \\ \beta &= \lambda_2 \mathbf{b}\end{aligned}\tag{17}$$

e quindi:

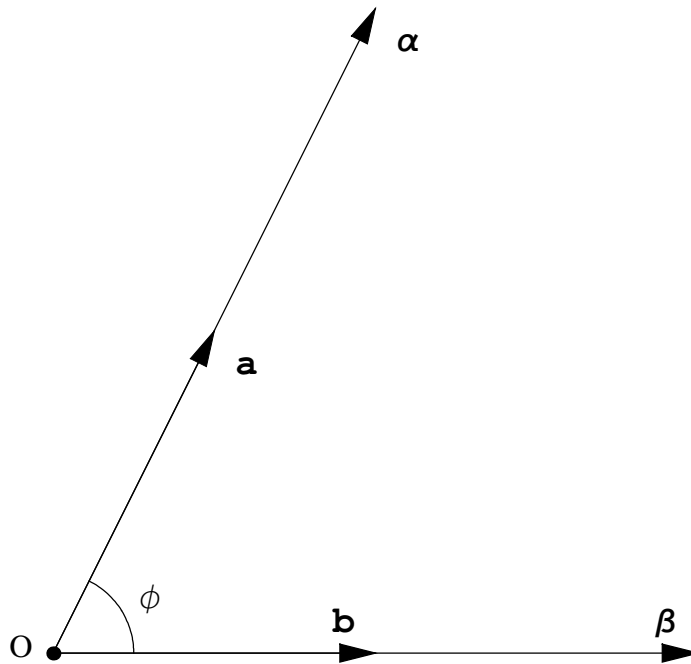


Figura 3

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \beta &= \lambda_2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \lambda_2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \phi \\ \alpha \cdot \mathbf{b} &= \lambda_1 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \lambda_1 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \phi\end{aligned}\tag{18}$$

Poiche' in generale $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $\cos \phi \neq 0$, la proprieta' di reciprocita' non e' rispettata. Se invece fosse $\cos \phi = 0$, le due direzioni sarebbero anche principali, quindi la trasformazione sarebbe simmetrica, e la proprieta' di reciprocita' sarebbe rispettata. ■

Da queste tre proposizioni si puo' dedurre che la simmetria della matrice implica la condizione di reciprocita', che implica a sua volta che l'applicazione e' non-rotazionale. A loro volta, l'essere non-rotazionale implica la reciprocita' e quindi la simmetria.

■ Direzioni principali in una trasformazione simmetrica

In questa sezione si scrivera' la trasformazione simmetrica da studiare nella forma:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 1 + a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 1 + a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\tag{19}$$

Mentre in tal modo non si perde di generalita', e' pero' possibile esprimere la terna di spostamenti nella forma:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Come si è visto, nelle trasformazioni simmetriche le direzioni invarianti sono anche direzioni principali, ed esistono necessariamente tre direzioni principali, ortogonali tra loro, atteso che le radici della equazione secolare devono essere reali. Siano esse $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ i tre autovalori della (20), e siano $O1, O2, O3$ tre assi cartesiani orientati secondo le sue tre direzioni principali. Le componenti del vettore generico \overrightarrow{OM} secondo questi tre assi si esprimeranno come:

$$\begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad (21)$$

ed il vettore spostamento $\overrightarrow{MM'}$ sarà esprimibile come:

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Come evidenziato anche in Figura 4, lo spostamento $\overrightarrow{MM'}$ del punto M ha componenti che sono semplici allungamenti o accorciamenti lungo i tre assi principali, delle proiezioni di \overrightarrow{OM} sugli assi stessi

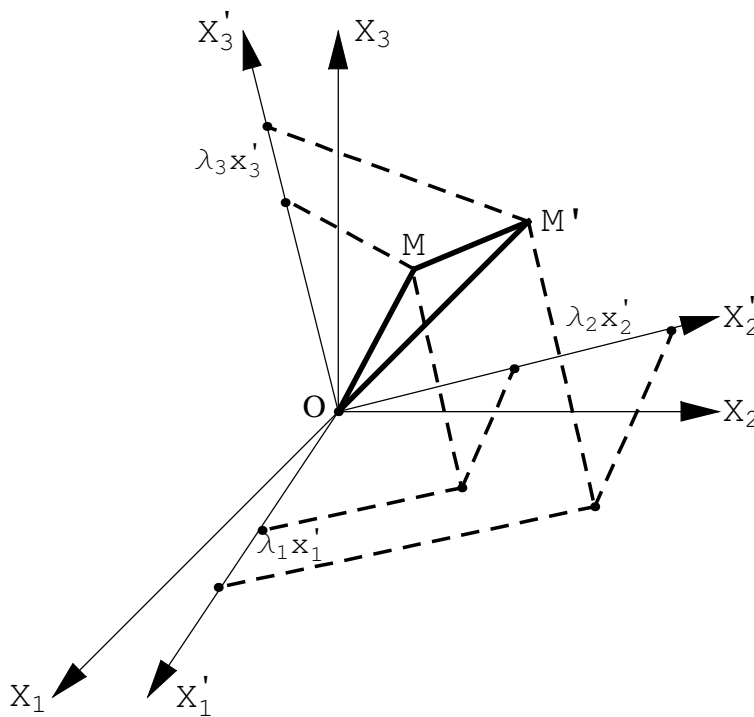


Figura 4 - Le componenti di spostamento come semplici allungamenti ed accorciamenti rispetto agli assi principali

I piani coordinati, nel sistema principale, sono piani principali ed invarianti.

Nel caso, finora non discusso, in cui le radici non sono distinte, è ancora possibile trovare tre direzioni principali ortogonali tra loro. Se ad esempio è $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3$, allora si calcola normalmente la direzione principale in corrispondenza della radice λ_3 , poi si identifica il piano ortogonale ad essa, e due qualsiasi assi ortogonali giacenti su questo piano possono assumersi quali assi principali. Se invece $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, allora una qualsiasi terna triortogonale di assi risulta principale.

■ Le componenti normali e tangenziali di spostamento in una trasformazione simmetrica

Si considerino ora i punti M appartenenti alla sfera unitaria, ossia i punti M le cui coordinate soddisfano l'equazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad (23)$$

Per effetto di una trasformazione lineare simmetrica, il generico punto M della sfera si porta in M' , venendo così a definire il piano OMM' . In questo piano, la proiezione $\mathbf{n} = \overline{MN}$ di $\overline{MM'}$ sulla retta OMN si dice la *componente normale* dello spostamento $\overline{MM'}$. Analogamente, il vettore $\mathbf{t} = \overline{MT}$ è la proiezione di $\overline{MM'}$ sul piano tangente alla sfera in M , ed è definita la *componente tangenziale* dello spostamento.

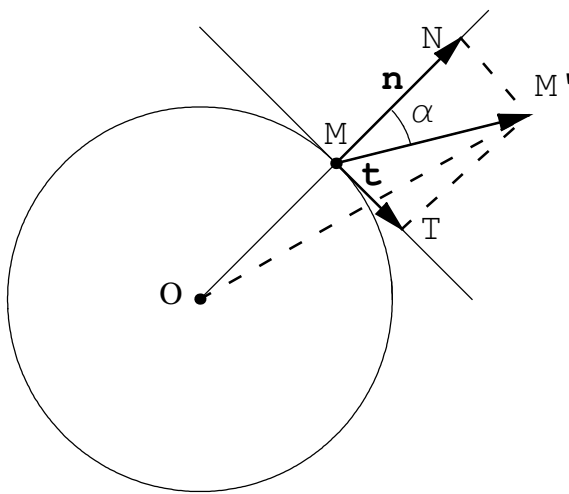


Figura 5 - Le componenti normali e tangenziali di spostamento di un punto appartenente alla sfera unitaria

Per calcolare la componente dello spostamento $u = MM'$ lungo la retta OMN si consideri che il punto M giace sulla sfera unitaria, e quindi il vettore $\mathbf{x} = OM$ ha lunghezza unitaria. Ne segue che potrà scriversi:

$$n = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 \quad (24)$$

e ponendosi in un riferimento principale:

$$n = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 \quad (25)$$

La componente tangenziale si ottiene considerando che lo spostamento u è suddiviso nelle due componenti normale e tangenziale, e quindi la sua ampiezza sarà pari a $\sqrt{n^2 + t^2}$. Ne segue:

$$t^2 = u^2 - n^2 = \lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 + \lambda_3^2 x_3^2 - (\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2)^2 \quad (26)$$

Un interessante studio grafico-analitico delle componenti normali e tangenziali di spostamento è dovuto ad O.Mohr. Si considerino le (23), (25) e (26) come tre equazioni lineari nelle tre incognite x_1^2 , x_2^2 ed x_3^2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ n^2 \\ n^2 + t^2 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Il determinante della matrice dei coefficienti e' un determinante di Vandermonde, ed e' fornito da $(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)$. Se quindi si ipotizza che i tre autovalori siano distinti, esso e' diverso da zero, e le equazioni (27) possono risolversi, a fornire:

$$x_1^2 = \frac{t^2 + (n - \lambda_2)(n - \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} \quad (28)$$

$$x_2^2 = \frac{t^2 + (n - \lambda_3)(n - \lambda_1)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (29)$$

$$x_3^2 = \frac{t^2 + (n - \lambda_1)(n - \lambda_2)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \quad (30)$$

L'idea di Mohr consiste nel riportare nel piano (n,t) le componenti normali e tangenziali dello spostamento di ciascun punto della sfera unitaria. In via preliminare si osservi che le (28-30) sono relazioni che coinvolgono solo i quadrati delle coordinate x_i , e che quindi basta limitarsi alla sfera unitaria contenuta nell'ottante positivo. Se si ipotizza, come sempre, che sia $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, i punti della sfera appartenenti al piano principale $X_1 - X_2$ sono caratterizzati dall'essere $x_3 = 0$, (curva AB nella Figura seguente) e quindi i loro spostamenti avranno componenti normali e tangenziali legati dall'equazione:

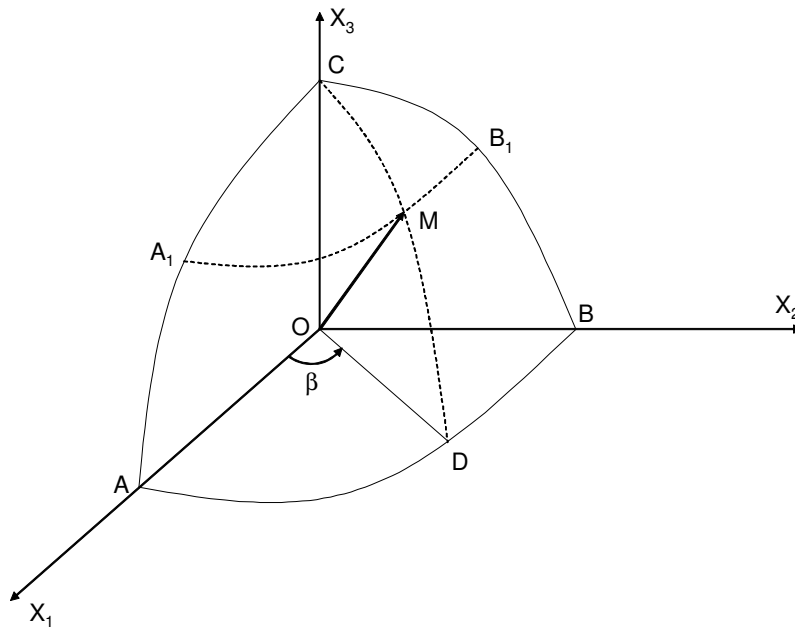


Figura 6 - L'ottavo della sfera unitaria considerato

$$t^2 + (n - \lambda_1)(n - \lambda_2) = 0 \quad (31)$$

che puo' scriversi anche come:

$$t^2 + \left(n - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2 \quad (32)$$

E' questa l'equazione di un cerchio di centro $C_3 = (0, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2})$ e raggio $R = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}$. Analogamente, la curva BC e' definita dai punti per cui $x_1 = 0$, ed i suoi punti hanno spostamenti le cui componenti normali e tangenziali giacciono sul cerchio di equazione:

$$t^2 + \left(n - \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2} \right)^2 = \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2} \right)^2 \quad (33)$$

quindi con centro $C_1 = \left(0, \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2} \right)$ e raggio $R = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2}$. I tre cerchi sono disegnati in Figura 7, e sono detti *cerchi principali di Mohr*.

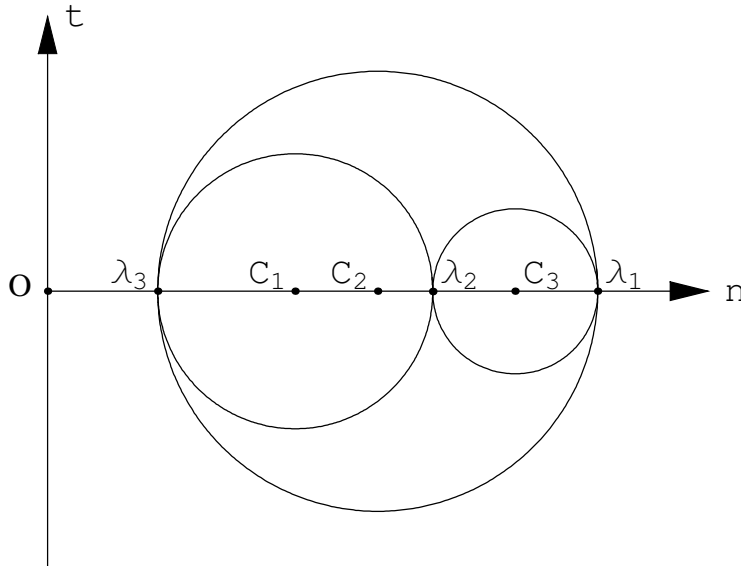


Figura 7 -I tre cerchi principali di Mohr

Si consideri ora il generico punto D appartenente alla curva AB, le cui componenti di spostamento si troveranno quindi rappresentate sul cerchio di centro C_3 . Esso è identificato dall'angolo β che il suo raggio vettore forma con l'asse X_1 , ed avrà coordinate $x_{1D} = \cos \beta$, $x_{2D} = \sin \beta$, $x_{3D} = 0$. Ne segue che le sue componenti di spostamento possono ottenersi, dalla (25) e (26) come:

$$n_D = \lambda_1 \cos^2 \beta + \lambda_2 \sin^2 \beta = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \cos 2\beta \quad (34)$$

$$\begin{aligned} t_D^2 &= \lambda_1^2 \cos^2 \beta + \lambda_2^2 \sin^2 \beta - (\lambda_1 \cos^2 \beta + \lambda_2 \sin^2 \beta)^2 = \\ &= \lambda_1^2 \cos^2 \beta + \lambda_2^2 \sin^2 \beta - \lambda_1 \cos^4 \beta - \lambda_2 \sin^4 \beta - \\ &\quad \lambda_1 \lambda_2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta = \lambda_1^2 \cos^2 \beta (1 - \cos^2 \beta) + \\ &\quad \lambda_2^2 \sin^2 \beta (1 - \sin^2 \beta) - \lambda_1 \lambda_2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta = \lambda_1^2 \cos^2 \beta \sin^2 \beta + \\ &\quad \lambda_2^2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta - \lambda_1 \lambda_2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \left(\frac{\sin 2\beta}{2} \right)^2 \end{aligned} \quad (35)$$

e quindi l'ampiezza della componente tangenziale di spostamento è pari a:

$$t_D = \pm \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \sin 2\beta \quad (36)$$

In definitiva, il punto D percorre l'arco AB, mentre il suo punto rappresentativo δ percorre il corrispondente cerchio di Mohr.

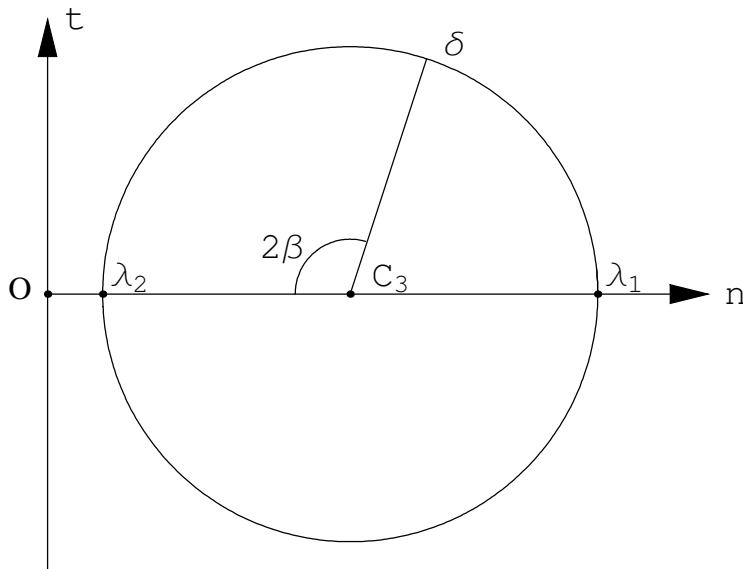


Figura 8 - L'immagine sul cerchio di Mohr del punto D riportato in Figura 6

Quanto detto vale per le altre due curve AC e BC, e solo per esse.

Si consideri invece il *generico* parallelo, ad esempio quello di equazione $x_3 = h$, rappresentato in Figura come la curva $A_1 B_1$, ed il *generico* meridiano, ad esempio il meridiano di equazione $x_2 = Kx_1$, rappresentato in Figura 6 come l'arco CD, e si voglia considerare la loro immagine nel piano (n, t) . Per il parallelo, si ha subito, dalla (30), che le componenti normale e tangenziale di spostamento devono soddisfare l'equazione:

$$t^2 + (n - \lambda_1)(n - \lambda_2) = h^2 (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \quad (37)$$

e quindi devono appartenere ad un cerchio di centro C_3 e raggio:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2 + h^2 (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \quad (38)$$

Analogamente, il meridiano di equazione $x_2 = Kx_1$ ha immagine, nel piano (n, t) di equazione:

$$\frac{t^2 + (n - \lambda_3)(n - \lambda_1)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)} = K^2 \frac{t^2 + (n - \lambda_2)(n - \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} \quad (39)$$

ossia ancora un cerchio con centro sull'asse orizzontale, che passerà per le immagini di C, ossia per il punto λ_3 , e di D, ossia δ .

L'immagine del generico punto M sul piano (n, t) si ottiene tracciando i cerchi relativi al meridiano ed al parallelo passante per esso, ed è possibile dimostrare che essa appartiene alla regione contenuta tra i tre cerchi principali, il cosiddetto *arbelo di Mohr*. In particolare, il meridiano ha immagine in un cerchio di cui si conosce il centro ed il raggio, mentre il parallelo si trasforma in un cerchio il cui centro appartiene all'asse orizzontale, che deve passare per λ_3 e δ . L'unica difficoltà potrebbe essere esprimere opportunamente l'angolo β che compare nelle (34) e (36). Si osservi però che M appartiene alla sfera unitaria, e quindi le sue coordinate assumono anche il significato di coseni direttori del vettore OM. Dalla Figura seguente è pertanto possibile dedurre $OD = \sqrt{l_1^2 + l_2^2} = \sqrt{1 - l_3^2}$, e quindi:

$$\cos \beta = \frac{l_1}{\sqrt{1 - l_3^2}} \quad (40)$$

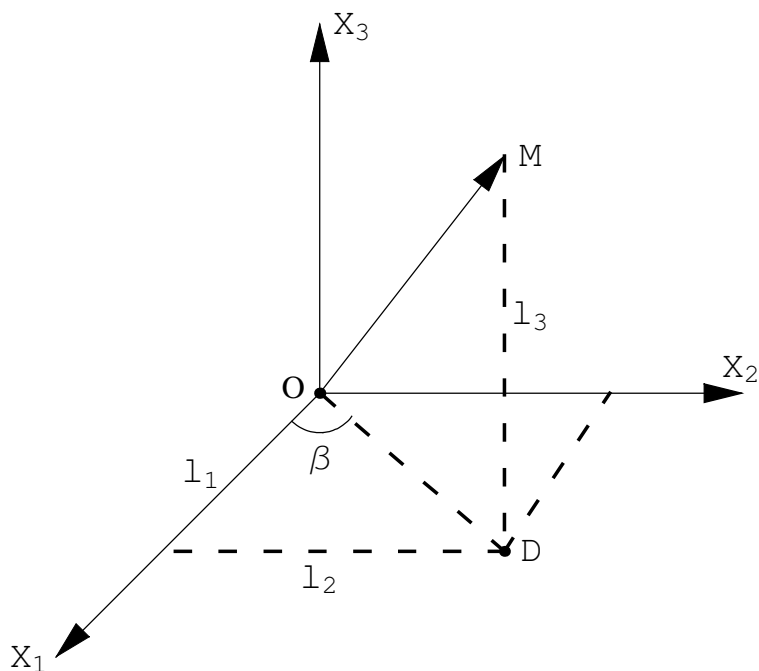


Figura 9 - Le coordinate del punto M sulla sfera unitaria diventano i coseni direttori del segmento OM

L'intero procedimento per ottenere le coordinate del punto m, immagine del generico punto M sulla sfera unitaria, e' riportato in Figura 10

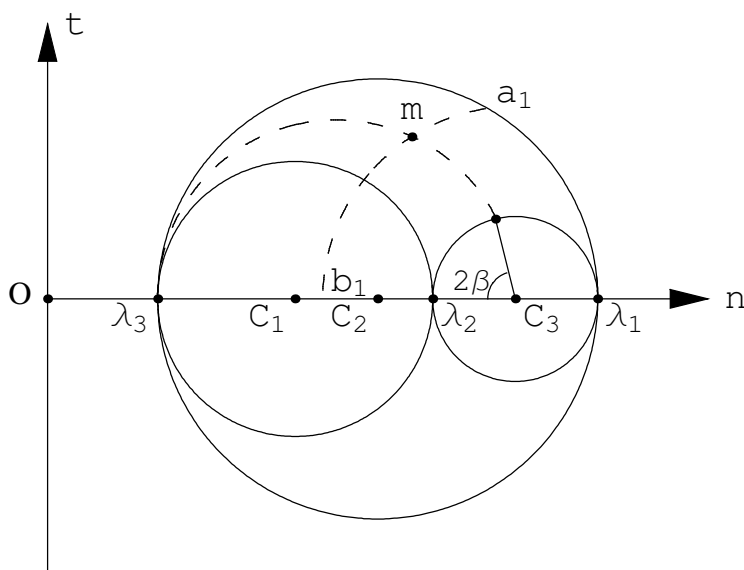


Figura 10 - L'immagine m del punto M generico ottenuta come intersezione tra due cerchi

■ **La componente sferica e deviatorica in una trasformazione lineare simmetrica**

Si consideri una trasformazione lineare simmetrica, ponendola nella forma $\xi = (\mathbf{I}+\mathbf{A})\mathbf{x}$. Si supponga inoltre di porsi in un sistema di riferimento principale, in cui gli spostamenti siano esprimibili come:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (41)$$

E' talvolta conveniente esprimere la matrice \mathbf{A} come somma di due matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_m & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_m & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda'_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda'_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_d \quad (42)$$

avendo definito la media delle tre radici:

$$\lambda_m = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3} \quad (43)$$

e, di conseguenza:

$$\begin{aligned} \lambda'_1 &= \lambda_1 - \lambda_m \\ \lambda'_2 &= \lambda_2 - \lambda_m \\ \lambda'_3 &= \lambda_3 - \lambda_m \end{aligned} \quad (44)$$

Adottando la decomposizione (42) lo spostamento \mathbf{u} si esprime come somma di due componenti:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_d = \begin{pmatrix} \lambda_m & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_m & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda'_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (45)$$

La prima aliquota di spostamento avviene, per costruzione, lungo la retta OM, e quindi corrisponde ad una dilatazione sferica, estensione o contrazione che sia:

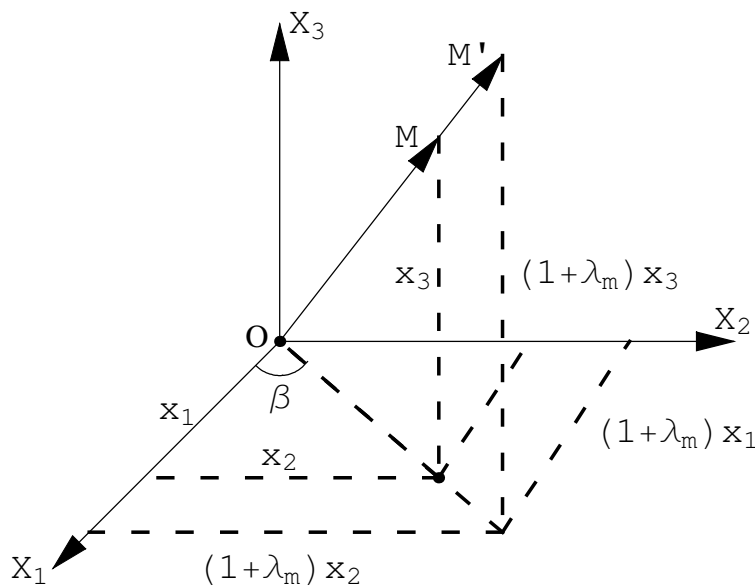


Figura 11 - La dilatazione sferica dovuta alla componente sferica dello spostamento

La restante parte dello spostamento e' caratterizzato da una matrice a traccia nulla, in quanto:

$$\lambda'_1 + \lambda'_2 + \lambda'_3 = \lambda_1 - \lambda_m + \lambda_2 - \lambda_m + \lambda_3 - \lambda_m = 0 \quad (46)$$

ed e' detta la *parte deviatorica dello spostamento*. E' interessante notare che questa decomposizione dello spostamento e' facilmente rappresentata sul piano di Mohr:

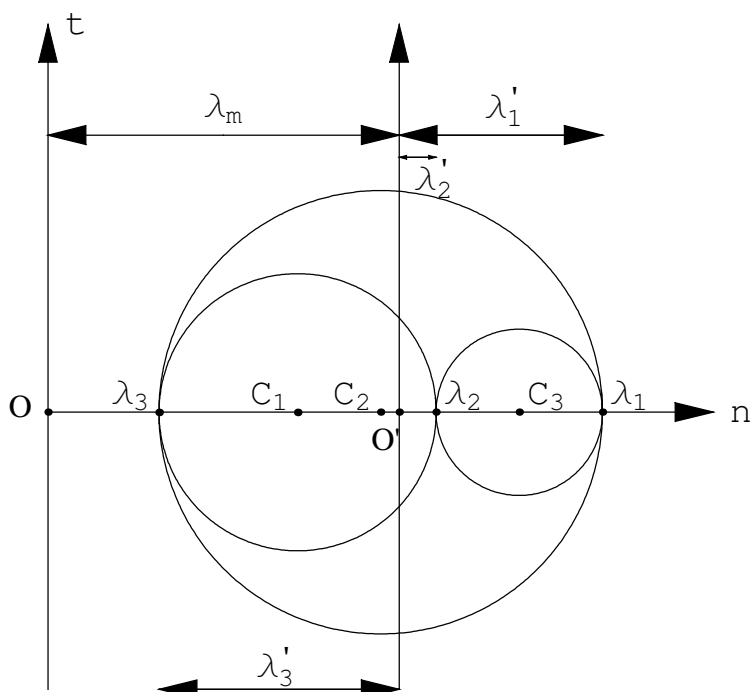


Figura 12 - La decomposizione dello spostamento in parte sferica e deviatorica sul cerchio di Mohr

Sfruttando infatti la proprieta' dei cerchi di Mohr e' possibile traslare l'origine dell'asse verticale di una quantita' pari a λ_m , per poi utilizzare questo nuovo asse per calcolare le componenti deviatoriche dello spostamento.

Le trasformazioni simmetriche piane

Sia Π un piano principale di una trasformazione simmetrica, e siano OX_1 ed OX_2 due assi di riferimento situati nel piano Π , mentre il terzo asse OX_3 e' ortogonale al piano stesso. In una trasformazione simmetrica, il piano principale e' anche un piano invariante, e quindi la dinamica su Π puo' essere studiata in un contesto bi-dimensionale. Si consideri allora la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & 1 + a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (47)$$

sicche' gli spostamenti sono esprimibili come:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (48)$$

A seguito di una rotazione θ del sistema di riferimento i nuovi assi OX'_1 ed OX'_2 potranno essere identificati dai loro coseni direttori rispetto ai vecchi assi. Dalla Figura 13 si legge:

$$\begin{aligned}
l_{11}' &= \text{Cos}(X_1', X_1) = \text{Cos}(2\pi - \theta) = \text{Cos } \theta \\
l_{21}' &= \text{Cos}(X_2', X_1) = \text{Cos}\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\text{Sin } \theta \\
l_{12}' &= \text{Cos}(X_1', X_2) = \text{Cos}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{Sin } \theta \\
l_{22}' &= \text{Cos}(X_2', X_2) = \text{Cos}(2\pi - \theta) = \text{Cos } \theta
\end{aligned} \tag{49}$$

e quindi nel nuovo sistema di riferimento la matrice A' della trasformazione lineare ha elementi $a'_{ik} = l_{ij} l_{km} a_{jm}$:

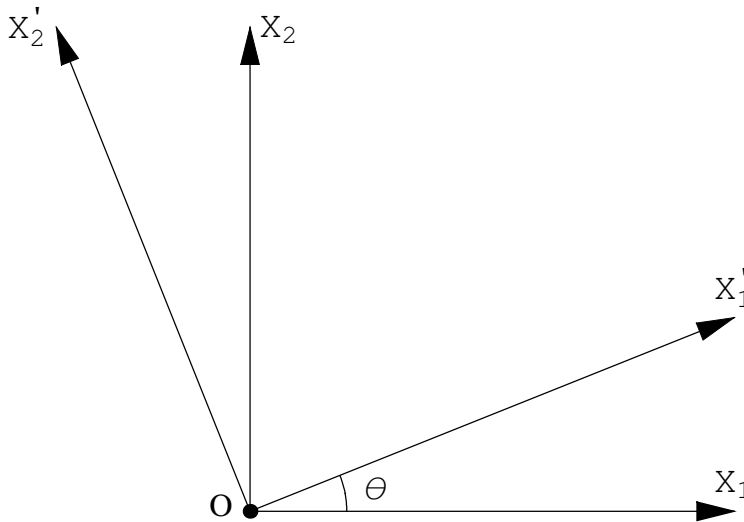


Figura 13 - La rotazione del sistema di riferimento in un contesto bidimensionale

$$\begin{aligned}
a'_{11} &= a_{11} l_{11}'^2 + a_{22} l_{12}'^2 + 2 a_{12} l_{11}' l_{12}' = \\
&= a_{11} \text{Cos}^2 \theta + a_{22} \text{Sin}^2 \theta + 2 a_{12} \text{Sin} \theta \text{Cos} \theta = \\
&= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{a_{11} - a_{22}}{2} \text{Cos}(2\theta) + a_{12} \text{Sin}(2\theta) \\
a'_{22} &= a_{11} l_{21}'^2 + a_{22} l_{22}'^2 + 2 a_{12} l_{21}' l_{22}' = \\
&= a_{11} \text{Sin}^2 \theta + a_{22} \text{Cos}^2 \theta - 2 a_{12} \text{Sin} \theta \text{Cos} \theta = \\
&= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} - \frac{a_{11} - a_{22}}{2} \text{Cos}(2\theta) - a_{12} \text{Sin}(2\theta) \\
a'_{12} &= a_{11} l_{11}' l_{21}' + a_{22} l_{12}' l_{22}' + a_{12} (l_{11}' l_{22}' + l_{12}' l_{21}') = \\
&= (a_{22} - a_{11}) \text{Sin} \theta \text{Cos} \theta + a_{12} (\text{Cos}^2 \theta - \text{Sin}^2 \theta) = \\
&= -\frac{a_{11} - a_{22}}{2} \text{Sin}(2\theta) + a_{12} \text{Cos}(2\theta)
\end{aligned} \tag{50}$$

La rotazione ϕ per cui a'_{12} si annulla fornisce la posizione degli assi principali:

$$a'_{12} = -\frac{a_{11} - a_{22}}{2} \text{Sin}(2\phi) + a_{12} \text{Cos}(2\phi) = 0 \tag{51}$$

ossia:

$$\phi = \frac{1}{2} \text{ArcTan}\left[\frac{2 a_{12}}{a_{11} - a_{22}}\right] \tag{52}$$

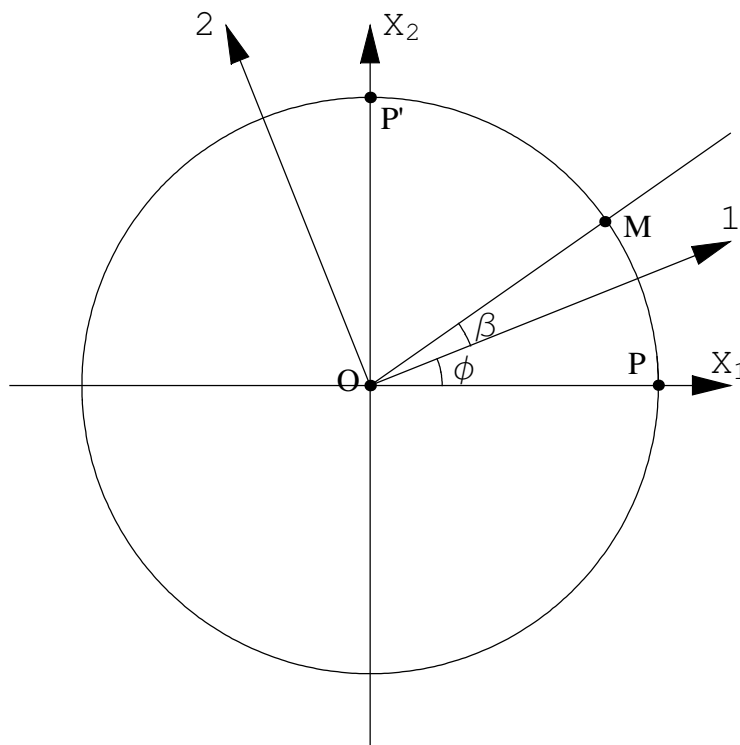


Figura 14 - La rotazione del sistema di riferimento fino a giungere agli assi coordinati

Il calcolo degli autovalori λ_1 e λ_2 puo' condursi analiticamente, risolvendo l'equazione secolare:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (53)$$

ossia:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \lambda + a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0 \quad (54)$$

con radici:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4 a_{11} a_{22} + 4 a_{12}^2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2} \quad (55)$$

Equivalentemente, i valori di λ_1 e λ_2 possono leggersi dal cerchio di Mohr relativo ai fasci di piani che si appoggiano all'asse principale OX_3 .

Assegnato un punto generico M sul cerchio unitario, come indicato in Figura 14, esso e' identificato dall'angolo β che il segmento OM forma con l'asse principale 1. Per ottenere l'immagine m sul cerchio principale di Mohr basta ruotare l'asse orizzontale el doppio di β , ottenendo le componenti normali e tangenziali dello spostamento di M. Scegliendo invece, sul cerchio unitario, il punto P appartenente all'asse X_1 , la sua immagine nel piano di Mohr si ottiene ruotando l'asse orizzontale del doppio dell'angolo ϕ , mentre l'immagine del punto P' appartenente all'asse X_2 e' situata in posizione simmetrica rispetto al centro del cerchio principale di Mohr.

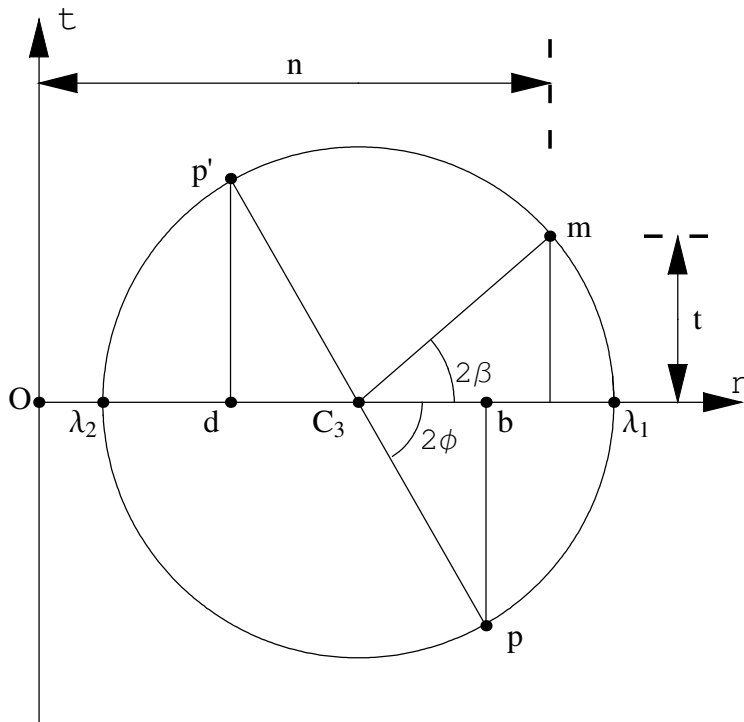


Figura 15 - Il cerchio di Mohr relativo ai piani che si appoggiano all'asse OX_3

Per un punto generico M sul cerchio unitario si puo' scrivere:

$$\vec{OM} = \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (56)$$

e quindi la componente normale di spostamento e' fornita da:

$$\begin{aligned} n &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = \\ &= (a_{11} \cos \beta + a_{12} \sin \beta) \cos \beta + (a_{12} \cos \beta + a_{22} \sin \beta) \sin \beta = \\ &= a_{11} \cos^2 \beta + a_{22} \sin^2 \beta + 2 a_{12} \sin \beta \cos \beta = \\ &= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{a_{11} - a_{22}}{2} \cos (2 \beta) + a_{12} \sin (2 \beta) \end{aligned} \quad (57)$$

L'ampiezza della componente tangenziale si ottiene come:

$$\begin{aligned} t^2 &= u^2 - n^2 = (a_{11} x_1 + a_{12} x_2)^2 + \\ &+ (a_{12} x_1 + a_{22} x_2)^2 - [(a_{11} x_1 + a_{12} x_2) x_1 + (a_{12} x_1 + a_{22} x_2) x_2]^2 = \\ &= -\frac{a_{11} - a_{22}}{2} \sin (2 \beta) + a_{12} \cos (2 \beta) \end{aligned} \quad (58)$$

e dopo qualche passaggio si giunge a:

$$|t| = \left| -\frac{a_{11} - a_{22}}{2} \sin (2 \beta) + a_{12} \cos (2 \beta) \right| \quad (59)$$

L'immagine del punto P si ottiene ponendo $\beta = 0$, e quindi il punto p sul cerchio di Mohr avra' coordinate (a_{11}, a_{12}) , mentre l'immagine del punto P' si ottiene per $\beta = \pi/2$, e quindi p' avra' coordinate (a_{22}, a_{12}) . Sfruttando questa circostanza, il cerchio di Mohr puo' essere costruito a partire dalla sola conoscenza dei tre elementi a_{11} , a_{22} ed a_{12} della trasformazione:

- si riportano le immagini del punto P , a_{11} positiva verso destra ed a_{12} positiva verso il basso, ottenendo il punto p , detto *polo della trasformazione*.

- si riportano le immagini del punto P' , a_{22} positiva verso destra ed a_{12} positiva verso l'alto, ottenendo il punto p' detto *antipolo della trasformazione*
- congiungendo p e p' si ottiene il diametro del cerchio, mentre l'intersezione del segmento pp' con l'asse n e' il centro C_3 del cerchio.

Grafici