

---

# Complementi 15 - L'approccio semi-analitico

[Ultima revisione: 20 febbraio 2009]

Si illustrano in questa Lezione alcuni approcci semi-analitici, che conducono a soluzioni approssimate ma pur sempre esprimibili in formule. In particolare, si deduce l'espressione dell'energia potenziale totale, ed utilizzando il principio di stazionarietà di essa, si calcola una soluzione approssimata attraverso la metodologia di Ritz.

---

## L'energia potenziale totale della trave soggetta a torsione

Si consideri una trave di luce  $L$ , soggetta ad una coppia torcente  $\mathcal{M}_t$  all'estremo di destra, e per l'equilibrio ad una coppia  $-\mathcal{M}_t$  all'altro estremo. Il risultante stato tensionale, come sappiamo, è puramente tangenziale, e l'energia elastica domiciliata nella trave può facilmente esprimersi come integrale di volume del potenziale elastico:

$$L_e = \frac{1}{2G} \int_V (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) dV = \frac{L}{2G} \int_{\Sigma} (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) d\Sigma = \quad (1)$$

mentre l'energia potenziale delle forze esterne, pari al contrario del lavoro da esse compiuto, è pari a:

$$P = -\mathcal{M}_t \theta' L \quad (2)$$

Ora, si possono esprimere le tensioni in termini di funzione di torsione  $\phi$ , utilizzando allo scopo le (2) dei Complementi 13, ed essendo la coppia torcente pari al momento torcente  $M_t$ , si potrà utilizzare la (11) della stessa Lezione, giungendo ad esprimere anche l'energia potenziale in termini di funzione di torsione. Si ha quindi:

$$E_t = \frac{L}{2G} \int_{\Sigma} \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right)^2 \right) d\Sigma - 2 \theta' L \int_{\Sigma} \phi d\Sigma \quad (3)$$

## Il metodo di Ritz per le soluzioni approssimate semi-analitiche

La funzione di Prandtl  $\phi$  rende stazionario il funzionale (3) dell'energia potenziale totale. Ne segue che occorrerebbe calcolare la variazione prima dell'energia potenziale totale, annullarla, e dedurre l'espressione corretta della funzione  $\phi$ , secondo i classici dettami del calcolo delle variazioni.

Se tuttavia ci si accontenta di una soluzione approssimata, ci si può ricondurre al più semplice problema della ricerca di un punto di stazionarietà di una funzione ad  $N$  variabili. A tal fine, si cominci con lo scrivere la funzione  $\phi$  nella forma:

$$\phi = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i \quad (4)$$

dove le funzioni  $\phi_i$  devono soddisfare le opportune condizioni ai limiti, ossia nel caso in esame devono annullarsi sulla frontiera, mentre i coefficienti  $c_i$  devono essere determinati nel modo che segue. Introducendo le (4) nell'espressione dell'energia potenziale totale, si trasforma il funzionale  $E_t$  in una funzione delle N variabili  $c_i$ , e quindi le condizioni di stazionarieta' si scrivono come:

$$\frac{\partial E_t}{\partial c_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (5)$$

Sono queste N equazioni algebriche e lineari nelle N incognite  $c_i$ , usualmente solvibili senza difficolta', a fornire una soluzione approssimata della funzione di torsione  $\phi$ . Alcune precisazioni sono d'obbligo:

1. le funzioni  $\phi_i$  potranno convenientemente scegliersi facendosi guidare dall'analogia della membrana, potranno far parte di una serie polinomiale, oppure trigonometrica, e saranno soggette a tutte le restrizioni cui sono soggette le funzioni di Ritz. Si consulti, a questo proposito, il classico testo di Mikllin [Mikhlin]



Figura 1 - Walter Ritz

2. all'aumentare del numero N di funzioni scelte migliorerà l'approssimazione, se sono stati rispettati i criteri di cui al punto 1.

3. e' talvolta possibile porre  $N = \infty$ , utilizzando l'intera serie di funzioni  $\phi_i$ , ed in tal caso la soluzione cui si giunge e' la soluzione esatta

## Il caso della sezione rettangolare

Si consideri a titolo di esempio il caso della sezione rettangolare di lati  $2a$  e  $2b$ , la cui frontiera puo' quindi essere descritta dalle equazioni:

$$\begin{aligned}x_1 &= \pm a \\x_2 &= \pm b\end{aligned}\quad (6)$$

Ne segue che la funzione  $(x_1^2 - a^2)(x_2^2 - b^2)$  rispettera' le condizioni di nullita' al contorno, e quindi potra' essere usata come funzione di Ritz. Inoltre, una serie polinomiale opportuna sara' fornita da:

$$\phi = (x_1^2 - a^2)(x_2^2 - b^2) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} x_1^i x_2^j \quad (7)$$

e, per la simmetria, gli indici  $i$  e  $j$  dovranno essere pari.

Un risultato di prima approssimazione si puo' ottenere anche manualmente, utilizzando una sola funzione di Ritz, ossia scrivendo:

$$\phi = c_0 (x_1^2 - a^2)(x_2^2 - b^2) \quad (8)$$

Se questa approssimazione viene inserita nella formula (3), l'energia potenziale totale si trasforma in una funzione, quadratica, della singola incognita  $c_0$ :

$$E_t = \frac{32}{45} a^3 b^3 c (2 a^2 c + 2 b^2 c - 5 G \theta') \quad (9)$$

Le condizioni di stazionarieta' si riducono alla singola condizione:

$$\frac{dE_t}{dc_0} = \frac{32}{45} a^3 b^3 (4 a^2 c + 4 b^2 c - 5 G \theta') = 0 \quad (10)$$

che permette il calcolo della costante incognita  $c_0$ :

$$c_0 = \frac{5 G \theta'}{4 (a^2 + b^2)} \quad (11)$$

Quindi, una approssimazione della funzione di Prandtl nel caso della sezione rettangolare e' fornita da:

$$\phi = \frac{5 G \theta'}{4 (a^2 + b^2)} (x_1^2 - a^2)(x_2^2 - b^2) \quad (12)$$

con un momento torcente fornito da:

$$M_t = 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \phi \, dx_1 \, dx_2 = \frac{40 a^3 b^3 G \theta'}{9 (a^2 + b^2)} \quad (13)$$

e tensioni pari a:

$$\sigma_{13} = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \frac{5 G \theta' (x_1^2 - a^2) x_2}{2 (a^2 + b^2)} \quad (14)$$

$$\sigma_{23} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{5 G \theta' x_1 (b^2 - x_2^2)}{2 (a^2 + b^2)} \quad (15)$$

Mentre il momento torcente risulta ben approssimato, non altrettanto puo' dirsi per le tensioni, che sono ottenute con un processo di derivazione della funzione incognita, e quindi con perdita di precisione. [Timoshenko]

## ■ Le approssimazioni successive con Mathematica

Se si vuole ottenere una migliore approssimazione, occorre aggiungere ulteriori termini alla (8), ed il calcolo manuale diviene laborioso. Fortunatamente, un programma di calcolo simbolico e' in grado di svolgere le necessarie operazioni. Cosi', limitandosi al caso  $N = 2$  si inizia a definire la funzione  $\phi$ :

$$\phi = (x_1^2 - a^2) (x_2^2 - b^2) (c_0 + c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2);$$

poi si calcola l'approssimazione dell'energia potenziale totale, assieme alle sue derivate rispetto alle costanti  $c_i$ :

$$E_t = \text{Simplify}\left[\frac{1}{2} \int_{-b}^b \int_{-a}^a ((\partial_{x_1} \phi)^2 + (\partial_{x_2} \phi)^2 - 4 G \beta \phi) dx_1 dx_2\right];$$

$$d_0 = \text{Simplify}[D[E_t, c_0]]; \quad d_1 = \text{Simplify}[D[E_t, c_1]]; \quad d_2 = \text{Simplify}[D[E_t, c_2]];$$

Infine, si calcolano le costanti annullando le derivate appena calcolate, e si esplicita la forma finale della funzione  $\phi$ :

$$\text{Const} = \text{Simplify}[\text{Solve}[\{d_0 == 0, d_1 == 0, d_2 == 0\}, \{c_0, c_1, c_2\}]];$$

$$\phi = \text{Simplify}[\phi /. \text{Const}]$$

$$\left\{ \frac{(35 G \beta (a^2 - x_1^2) (b^2 - x_2^2) (9 a^4 + 130 a^2 b^2 + 9 b^4 + 3 (9 a^2 + b^2) x_1^2 + 3 (a^2 + 9 b^2) x_2^2))}{(8 (45 a^6 + 509 a^4 b^2 + 509 a^2 b^4 + 45 b^6))} \right\}$$

Ottenuta l'approssimazione richiesta, si possono subito dedurre le tensioni, attraverso opportuna derivazione, ed il momento torcente, attraverso integrazione sulla sezione retta:

$$\sigma_{13} = \text{Simplify}[\partial_{x_2} \phi]$$

$$\left\{ -\frac{35 G \beta (a^2 - x_1^2) x_2 (9 a^4 + 127 a^2 b^2 - 18 b^4 + 3 (9 a^2 + b^2) x_1^2 + 6 (a^2 + 9 b^2) x_2^2)}{4 (45 a^6 + 509 a^4 b^2 + 509 a^2 b^4 + 45 b^6)} \right\}$$

$$\sigma_{23} = -\text{Simplify}[\partial_{x_1} \phi]$$

$$\left\{ \frac{35 G \beta x_1 (b^2 - x_2^2) (-18 a^4 + 127 a^2 b^2 + 9 b^4 + 6 (9 a^2 + b^2) x_1^2 + 3 (a^2 + 9 b^2) x_2^2)}{4 (45 a^6 + 509 a^4 b^2 + 509 a^2 b^4 + 45 b^6)} \right\}$$

$$M_t = \text{Simplify}\left[2 \int_{-b}^b \int_{-a}^a \phi dx_1 dx_2\right]$$

$$\left\{ \frac{224 a^3 (a^2 + 9 b^2) (9 a^2 b^3 + b^5) G \beta}{9 (45 a^6 + 509 a^4 b^2 + 509 a^2 b^4 + 45 b^6)} \right\}$$

E' evidente che approssimazioni piu' raffinate non creano problemi di sorta, se non quelli di una maggiore complessita' computazionale.

## ■ La soluzione esatta in termini di serie trigonometrica

In questo caso particolare, sfruttando le proprieta' di ortogonalita' della serie trigonometrica, puo' ottenersi una soluzione esatta, scrivendo la funzione di torsione nella forma:

$$\phi = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} \cos\left(\frac{i\pi x_1}{2a}\right) \cos\left(\frac{j\pi x_2}{2b}\right) \quad (16)$$

dove la sommatoria va estesa ai soli termini dispari,  $i, j = 1, 3, 5, \dots$ , per evidenti motivi di simmetria. Inserendo la (16) nell'espressione dell'energia potenziale si ha, tenendo conto delle suddette proprieta' di ortogonalita':

$$\begin{aligned} E_t = & \frac{L\pi^2}{8G} \int_{\Sigma} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} \frac{i^2 \cos^2\left[\frac{j\pi x_2}{2b}\right] \sin^2\left[\frac{i\pi x_1}{2a}\right]}{a^2} + \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} \frac{j^2 \cos^2\left[\frac{i\pi x_1}{2a}\right] \sin^2\left[\frac{j\pi x_2}{2b}\right]}{b^2} \right) d\Sigma - \\ & 2\theta' L \int_{\Sigma} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} \cos\left(\frac{i\pi x_1}{2a}\right) \cos\left(\frac{j\pi x_2}{2b}\right) d\Sigma \end{aligned} \quad (17)$$

ossia:

$$E_t = \frac{L\pi^2 ab}{8G} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij}^2 \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right) - 2\theta' L \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} \frac{(16ab)}{ij\pi^2} (-1)^{\frac{i+j}{2}-1} \quad (18)$$

Le condizioni di stazionarieta' si possono quindi scrivere in una forma disaccoppiata:

$$\frac{dE_t}{dc_{ij}} = \frac{\pi^2 ab}{4G} c_{ij} \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right) - 2\theta' \frac{(16ab)}{ij\pi^2} (-1)^{\frac{i+j}{2}-1} = 0 \quad (19)$$

a fornire ciascuna un coefficiente  $c_{ij}$ :

$$c_{ij} = \frac{128}{\pi^4} G\theta' \frac{b^2}{ij \left( i^2 \frac{b^2}{a^2} + j^2 \right)} (-1)^{\frac{i+j}{2}-1} \quad (20)$$

La funzione di torsione esatta, percio', sara' data da:

$$\begin{aligned} \phi = & \\ & \frac{128}{\pi^4} G\theta' \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b^2}{ij \left( i^2 \frac{b^2}{a^2} + j^2 \right)} \cos\left(\frac{i\pi x_1}{2a}\right) \cos\left(\frac{j\pi x_2}{2b}\right) (-1)^{\frac{i+j}{2}-1} \end{aligned} \quad (21)$$

Il momento torcente sara' infine fornito da:

$$M_t = 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \phi \, dx_1 \, dx_2 =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{128}{\pi^4} G\theta \cdot \frac{b^2}{i j (i^2 \frac{b^2}{a^2} + j^2)} (-1)^{\frac{i+j}{2}-1} \frac{32}{\pi^2} \frac{a b}{i j} \quad (22)$$

coincidente con quella ottenuta per altra via nei Complementi 12, considerato che:

$$\frac{1}{i^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2 (i^2 \frac{b^2}{a^2} + j^2)} = \frac{\pi^4}{96 i^2} \frac{\text{Tanh} \left( \frac{i\pi b}{2a} \right) - \left( \frac{i\pi b}{2a} \right)}{-\frac{1}{3} \left( \frac{i\pi b}{2a} \right)^3}$$

### ■ La sezione rettangolare allungata

Nel caso della sezione rettangolare allungata di base  $b$  ed altezza  $h$ , con  $h \ll b$ , l'approccio energetico permette di tener conto in modo brillante del contributo tensionale in vicinanza dei lati corti.

Ed infatti, se si usa la stessa approssimazione che ha condotto allo studio dei Complementi 14, allora si ipotizza che la funzione di torsione è funzione della sola coordinata  $x_2$ , e pari alla (15) dei Complementi 14:

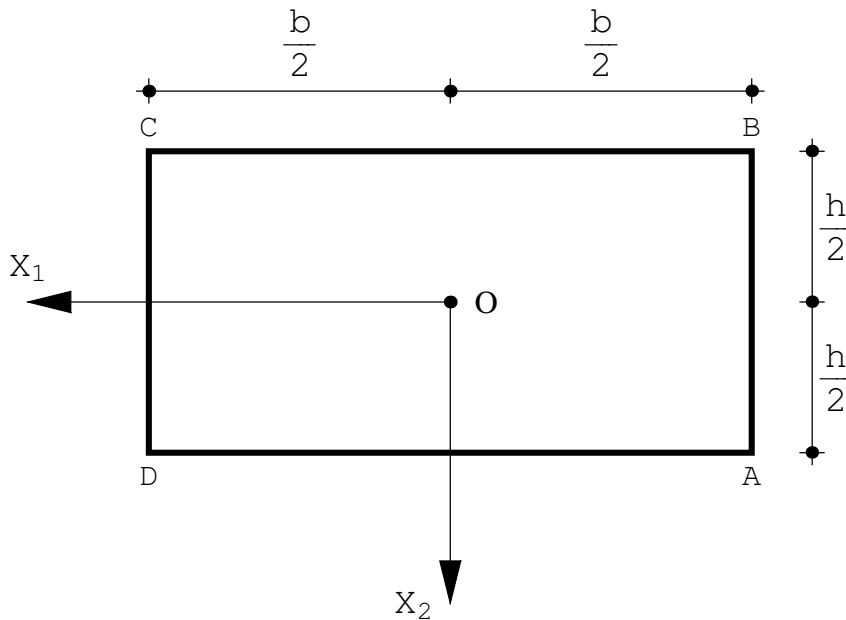


Figura 2 - La sezione rettangolare allungata

$$\phi = c_0 \left( \frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) \quad (23)$$

Ne segue immediatamente che l'energia potenziale totale è fornita da:

$$\phi = c_0 \left( \frac{h^2}{4} - x_2^2 \right);$$

$$\mathbf{E}_t = \text{Simplify}\left[\frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} ((\partial_{x_1} \phi)^2 + (\partial_{x_2} \phi)^2 - 4 G \beta \phi) \, d\mathbf{x}_2 \, d\mathbf{x}_1\right]$$

$$\frac{1}{6} b h^3 c_0 (-2 G \beta + c_0)$$

e quindi la costante  $c_0$  e' calcolabile annullando la derivata prima della e.p.t.:

$$\mathbf{d}_0 = \text{Simplify}[D[\mathbf{E}_t, c_0]]$$

$$\frac{1}{3} b h^3 (-G \beta + c_0)$$

$$\text{Const} = \text{Simplify}[\text{Solve}[\mathbf{d}_0 == 0, c_0]]$$

$$\{\{c_0 \rightarrow G \beta\}\}$$

La funzione di torsione, quindi, le tensioni ed il momento torcente, sono fornite da:

$$\phi = \text{Simplify}[\phi /. \text{Const}]$$

$$\left\{\frac{1}{4} G \beta (h^2 - 4 x_2^2)\right\}$$

$$\sigma_{13} = \text{Simplify}[\partial_{x_2} \phi]$$

$$\{-2 G \beta x_2\}$$

$$\sigma_{23} = -\text{Simplify}[\partial_{x_1} \phi]$$

$$\{0\}$$

$$\mathbf{M}_t = \text{Simplify}\left[2 \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \phi \, d\mathbf{x}_2 \, d\mathbf{x}_1\right]$$

$$\left\{\frac{1}{3} b G h^3 \beta\right\}$$

Se pero' si vuole tener conto del contributo delle tensioni in un intorno dei lati corti, e contemporaneamente soddisfare le condizioni di nullo anche sui due lati corti, si puo' porre:

$$\phi = G \beta \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2\right) \left(1 - e^{-\gamma \left(\frac{b^2}{4} - x_1^2\right)}\right) \quad (24)$$

dove  $\gamma$  e' una costante da determinare. In tal modo, la funzione di torsione assume l'aspetto di Figura 3, annullandosi lungo tutto il contorno.

$$\phi = G \beta \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2\right) \left(1 - \text{Exp}\left[-\gamma \left(\frac{b^2}{4} - x_1^2\right)\right]\right);$$

```
Plot3D[φ /. {G → 1, β → 1, b → 6, h → 1, γ → .5},
  {x1, -3, 3}, {x2, -1/2, 1/2}]
```

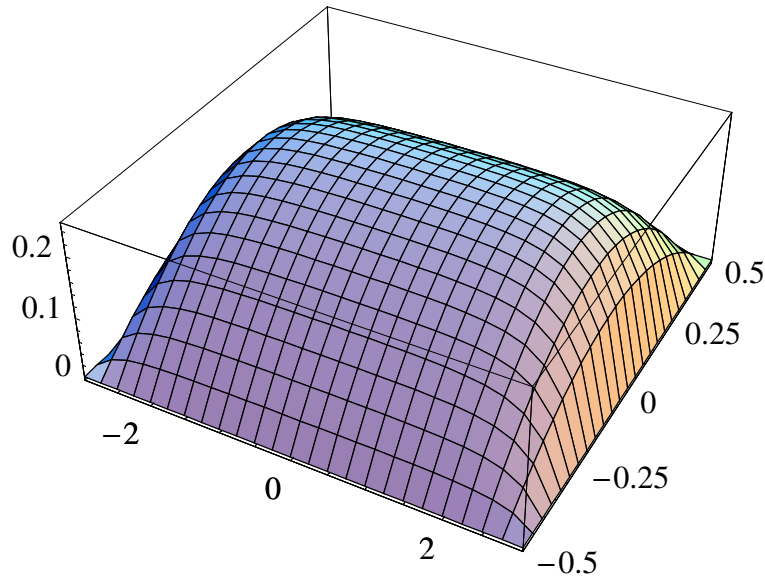


Figura 3 - La funzione di torsione per una sezione rettangolare allungata

L'energia potenziale totale assume l'aspetto:

$$\mathbf{E}_t = \text{Simplify}\left[\frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} ((\partial_{x_1} \phi)^2 + (\partial_{x_2} \phi)^2 - 4 G \beta \phi) dx_2 dx_1\right]$$

$$\frac{e^{-\frac{b^2 \gamma}{2}} G^2 h^3 \beta^2 (-10 + h^2 \gamma) \left(2 b e^{\frac{b^2 \gamma}{2}} \sqrt{\gamma} - \sqrt{2 \pi} \operatorname{Erfi}\left[\frac{b \sqrt{\gamma}}{\sqrt{2}}\right]\right)}{120 \sqrt{\gamma}}$$

La costante  $\gamma$  può calcolarsi in modo da rendere minima l'energia potenziale totale. A tal fine, si calcoli la derivata di  $E_t$  rispetto a  $\gamma$ :

$$\mathbf{d}_1 = \text{Simplify}[D[\mathbf{E}_t, \gamma]]$$

$$\frac{1}{240 \gamma^{3/2}} \left( e^{-\frac{b^2 \gamma}{2}} G^2 h^3 \beta^2 \left( 2 b e^{\frac{b^2 \gamma}{2}} \sqrt{\gamma} (10 + h^2 \gamma) + \sqrt{2 \pi} (-10 - h^2 \gamma + b^2 \gamma (-10 + h^2 \gamma)) \operatorname{Erfi}\left[\frac{b \sqrt{\gamma}}{\sqrt{2}}\right] \right) \right)$$

E' immediato realizzare che tale derivata e' nulla se risulta nulla la seguente quantita':

$$2 b \sqrt{\gamma} (10 + h^2 \gamma) + \sqrt{2 \pi} (-10 - h^2 \gamma + b^2 \gamma (-10 + h^2 \gamma)) e^{-\frac{b^2 \gamma}{2}} \operatorname{Erfi}\left[\frac{b \sqrt{\gamma}}{\sqrt{2}}\right] \quad (25)$$

ossia, ponendo  $\gamma = \frac{\sigma^2}{h^2}$  ed  $\alpha = \frac{b}{h}$ :



$$2 \alpha \sigma (10 + \sigma^2) + \sqrt{2 \pi} (-10 - \sigma^2 + \alpha^2 \sigma^2 (-10 + \sigma^2)) e^{-\frac{\alpha^2 \sigma^2}{2}} \operatorname{Erfi} \left[ \frac{\alpha \sigma}{\sqrt{2}} \right] = 0 \quad (26)$$

In tabella 1 sono riportati, per vari rapporti  $\alpha$ , i valori di  $\sigma$  per cui l'energia potenziale ha un minimo [Tabella]:

$\alpha$	$\sigma$
1	1.83008
2	1.36604
3	1.09843
4	0.93541
5	0.826748
10	0.572031
20	0.400903
100	0.178111

Tabella 1 - I valori dell'esponente scalato  $\sigma$  per vari rapporti geometrici  $b/h$

Per un rapporto  $\alpha = 10$ , ad esempio, la funzione di torsione sarà pari a:

$$\psi = \phi / \cdot \{ \gamma \rightarrow 0.572031^2 / h^2, \mathbf{b} \rightarrow 10 h \}$$

$$\left( 1 - e^{-\frac{0.327219 (25 h^2 - x_1^2)}{h^2}} \right) G \beta \left( \frac{h^2}{4} - x_2^2 \right)$$

con un momento torcente corrispondente pari a:

$$M_t = 2 \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \psi \, dx_2 \, dx_1 = \quad (27)$$

$$\frac{1}{3} G b h^3 \beta \left( 1 - \frac{0.000867784}{\alpha} \operatorname{Erfi} [0.286016 \alpha] \right)$$

ossia, essendo  $\alpha = 10$ :

$$M_t = 0.311347 G b h^3 \beta \quad (28)$$

in ottimo accordo con quanto predetto dalla teoria esatta. Posto  $M_t = k G b h^3 \beta$ , il coefficiente moltiplicativo  $k$  è riportato in tabella 2 per vari valori della snellezza  $\alpha$ . Confrontando tali risultati con i valori esatti si deduce un buon accordo solo per valori di  $\alpha > 4$ , come del resto insito nella trattazione: [Tabella 2]

$\alpha$	$k$	$k_{Tim}$
1	0.1363	.1406
2	0.2196	.229
3	0.2551	.263
4	0.2746	.281
5	0.2869	.291
10	0.3113	.312
20	0.3226	□
100	0.3312	.333

Tabella 2 - Il coefficiente moltiplicativo del momento torcente in funzione della snellezza  $\alpha$

## Note

[Mikhlin] - S.G. Mikhlin, "The numerical performance of variational methods" Wolters-Noordhoff Publishing Groningen, The Netherlands (1971) [Torna al testo]

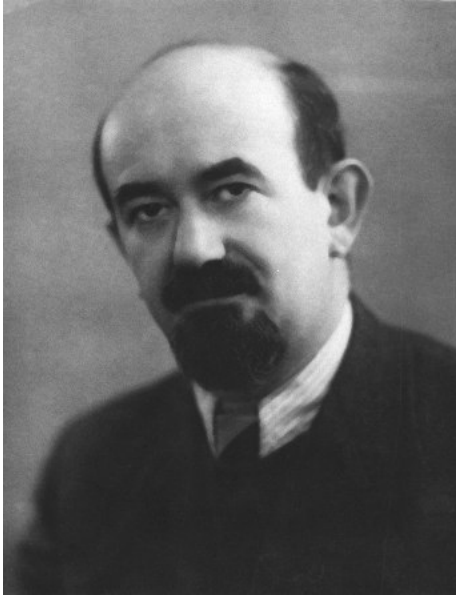


Figura 2 - Solomon Grigor'evich Mikhlin

[Timoshenko] - L'esposizione teorica si puo' ritrovare nel classico libro di Timoshenko, "Theory of Elasticity", McGraw-Hill Book Company (1934), pp. 251-254, insieme ad alcuni risultati limitati alla sezione quadrata.[-Torna al testo]

[Tabella] - La tabella e' stata generata col ripetuto utilizzo del comando *Mathematica*:

```
FindRoot [
  ( ( 2 α σ (10 + σ²) + e-α²σ²/2 √(2π) (-10 - σ² + α² σ² (-10 + σ²)) Erfi [ α σ / √2 ] ) / .
  α → 4 ) == 0, {σ, 1, 2} ]
{σ → 0.93541}
```

per gli indicati valori di  $\alpha$ . [Torna al testo]

[Tabella 2] - Anche questa tabella puo' essere calcolata applicando ripetutamente la seguente procedura:

1. assegnato il rapporto di snellezza  $\alpha$ , calcola  $\sigma$ :

```

FindRoot[
  ( ( ( 2 α σ (10 + σ²) + e-α²σ²/2 √(2π) (-10 - σ² + α² σ² (-10 + σ²)) Erfi[ασ/√2] ) ) / .
  α → 10 ) == 0, {σ, 1, 2}]
{σ → 0.572031}

```

2. calcola la forma specifica della funzione di Prandtl:

```

φ = G β ( (h²/4 - x₂²) ( 1 - Exp[-γ ( (b²/4 - x₁²) ) ] ) );
ψ = φ / . {γ -> 0.572031² / h², b -> 10 h}
( 1 - e-0.327219 (25 h² - x₁²) / h² ) G β ( (h²/4 - x₂²)

```

3. calcola il momento torcente, secondo la definizione:

```

Mt = Simplify[ 2 ∫-b/2b/2 ∫-h/2h/2 ψ d $\mathbf{x}_2$  d $\mathbf{x}_1$  ]
2 G h³ β ( 0.166667 b - 0.000144632 h Erfi[ (0.286016 b) / h ] )

```

4. Si deduce il coefficiente numerico k:

```

2 G b h³ β ( 0.16666666666666669 -
  ( 0.00014463184314999166 / α Erfi[0.2860155 α] ) ) / . α → 10
0.311347 G b h³ β

```

[Torna al testo]

## Grafici