
Complementi 14 - Le analogie

[Ultima revisione: 19 febbraio 2009]

L'introduzione della funzione di tensione di Prandtl ha trasformato il problema di Dini-Neumann per il calcolo della funzione di torsione $\Psi(x_1, x_2)$ in un problema di Poisson per il calcolo della funzione di Prandtl $\phi(x_1, x_2)$. Le condizioni ai limiti si semplificano corrispondentemente, e questo conduce alla possibilita' di studiare con una certa facilita' le sezioni di forma semplice.

Un aspetto ancora piu' importante di questo approccio alternativo risiede nella possibilita' di ricondurre lo studio del comportamento a torsione di una trave allo studio di analoghi fenomeni fisici, piu' semplici da visualizzare intuitivamente e da simulare sperimentalmente. La prima di queste analogie fu presentata dallo stesso Prandtl nel 1903 [Prandtl]

La formulazione dell'analogia della membrana

Si consideri una membrana sottile, di area Σ e di forma uguale alla forma della sezione retta che si vuole studiare, e si tenda questa membrana con una forza di trazione $S(x_1, x_2)$ costante, applicata lungo il contorno in modo da rendere piana la membrana. Si vincoli inoltre la membrana in modo tale da annullare gli spostamenti lungo tutto il contorno Γ .

Si applichi poi un carico trasversale $p(x_3)$, che provoca spostamenti lungo l'asse X_3 , e di conseguenza la membrana diverra' una superficie curva. Assumendo che il carico $p(x_3)$ sia abbastanza contenuto da non provocare una variazione dello sforzo di trazione S , si potra' dedurre l'equazione di equilibrio della membrana utilizzando, ad esempio, la via geometrica.

A tal fine, si isoli, come usuale, un elemento rettangolare di membrana di lati dx_1 e dx_2 , come riportato in Figura 1, e tenuto in equilibrio dalle forze di trazione $S dx_1$ ed $S dx_2$, e dal carico trasversale $p dx_1 dx_2$. Poiche' si puo' assumere che lo spostamento $u_3(x_1, x_2)$ e' dello stesso ordine di grandezza del carico $p(x_3)$, si potranno anche approssimare le rotazioni secondo i due assi X_1 ed X_2 come:

$$\phi_{x_1} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1}; \quad \phi_{x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \quad (1)$$

Nel punto A le rotazioni saranno pari a ϕ_{x_1} e ϕ_{x_2} , rispettivamente, mentre in B si avranno le rotazioni $\phi_{x_1} + \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} dx_1$ e ϕ_{x_2} , ed infine in C si avranno le rotazioni ϕ_{x_1} e $\phi_{x_2} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} dx_2$.

Le due equazioni di equilibrio alla traslazione lungo gli assi X_1 ed X_2 sono identicamente soddisfatte, atteso che anche le rotazioni ϕ_{x_1} e ϕ_{x_2} sono piccole. La terza equazione di equilibrio, in direzione X_3 fornira' invece:

$$\begin{aligned} S dx_2 \left(\phi_{x_1} + \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} dx_1 \right) - S dx_2 \phi_{x_1} + \\ S dx_1 \left(\phi_{x_2} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} dx_2 \right) - S dx_1 \phi_{x_2} + p dx_1 dx_2 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Semplificando, ed inserendo le (1) si giunge all'equazione differenziale dell'equilibrio:

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = -\frac{p}{S} \quad (3)$$

da affiancare alla condizione al contorno imposta:

$$u_3(\Gamma) = 0 \quad (4)$$

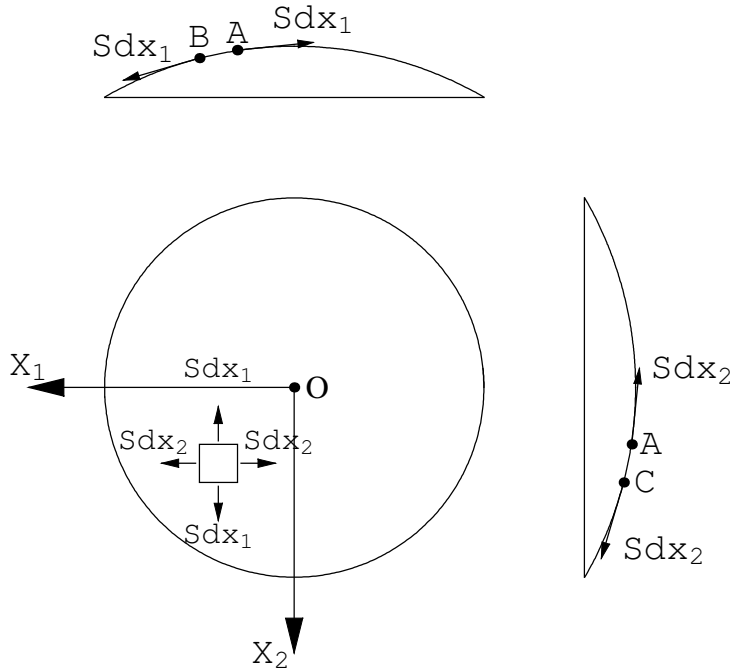


Figura 1. - L'equilibrio dell'elemento di membrana

Si e' quindi giunti ad un problema di Poisson matematicamente identico a quello incontrato nell'approccio di Prandtl alla torsione. Rendendo allora p/S numericamente pari a $2G\theta'$, gli abbassamenti u_3 divengono numericamente pari ai valori della funzione di Prandtl ϕ ; inoltre, possono trarsi parecchie altre interessanti conclusioni. Ad esempio vale la seguente:

Prop.1 - Il vettore risultante delle tensioni tangenziali e' tangente alle linee di livello $u_3 = \text{costante}$.

Dim. Lungo le curve di livello $u_3 = \text{costante}$, e quindi:

$$\frac{du_3}{ds} = 0 \rightarrow \frac{d\phi}{ds} = 0 \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} = 0 \quad (5)$$

Utilizzando le relazioni:

$$\sigma_{13} = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}; \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \quad (6)$$

$$n_1 = \frac{dx_2}{ds}; \quad n_2 = -\frac{dx_1}{ds} \quad (7)$$

si giunge a scrivere:

$$\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (8)$$

Quindi, il vettore τ delle tensioni tangenziali e' ortogonale alla normale alle curve di livello, da cui l'asserto.

Si ha anche:

Prop.2 - L'ampiezza del vettore risultante delle tensioni tangenziali e' pari alla pendenza della membrana secondo la normale alle curve di livello, ossia e' pari alla massima pendenza della membrana.

Dim. Per la proposizione precedente, se \mathbf{t} e' il versore tangente, si ha:

$$|\boldsymbol{\tau}| = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t} = \sigma_{13} t_1 + \sigma_{23} t_2 = -\sigma_{13} n_2 + \sigma_{23} n_1 = -\sigma_{13} \frac{dx_2}{dn} + \sigma_{23} \frac{dx_1}{dn} = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dn} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dn} \right) = -\frac{d\phi}{dn} = -\frac{du_3}{dn} \quad (9)$$

Ovvie sono poi le seguenti deduzioni:

Prop.3 - Le massime tensioni tangenziali si verificano laddove le curve di livello piu' si avvicinano tra loro.

Prop.4 - Le massime tensioni tangenziali si verificano al contorno, poiche' al contorno risulta massima la pendenza della membrana.

Prop.5 - Il momento torcente e' uguale al doppio del volume contenuto tra la membrana indeformata e la membrana deformata

■ La sezione rettangolare allungata

Si consideri la sezione rettangolare allungata di Figura 2, in cui la base b sia molto piu' grande dell'altezza h . Se ne deduce, qualitativamente, che la deformata della corrispondente membrana abbia una forma simile a quella riportata in Figura. In altri termini, a parte l'appiattirsi della membrana sui due lati, si potra' assumere che le curve di livello in tutta la porzione centrale della sezione siano assimilabili a linee rette parallele all'asse X_1 . Segue immediatamente che l'equazione differenziale (3) si semplifica in:

$$\frac{d^2 u_3}{dx_2^2} = -\frac{p}{S} \quad (10)$$

ed integrando:

$$u_3(x_2) = -\frac{p}{2S} x_2^2 + c_1 x_2 + c_0 \quad (11)$$

Sulla frontiera, ossia per $x_2 = \pm h/2$, dovra' essere $u_3 = 0$, e quindi le due costanti di integrazione saranno pari a $c_1 = 0$ e $c_0 = ph^2/8S$. Lo spostamento u_3 sara' allora fornito dalla parabola:

$$u_3(x_2) = \frac{p}{2S} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) \quad (12)$$

la cui area e' pari a $\frac{ph^3}{12S}$.

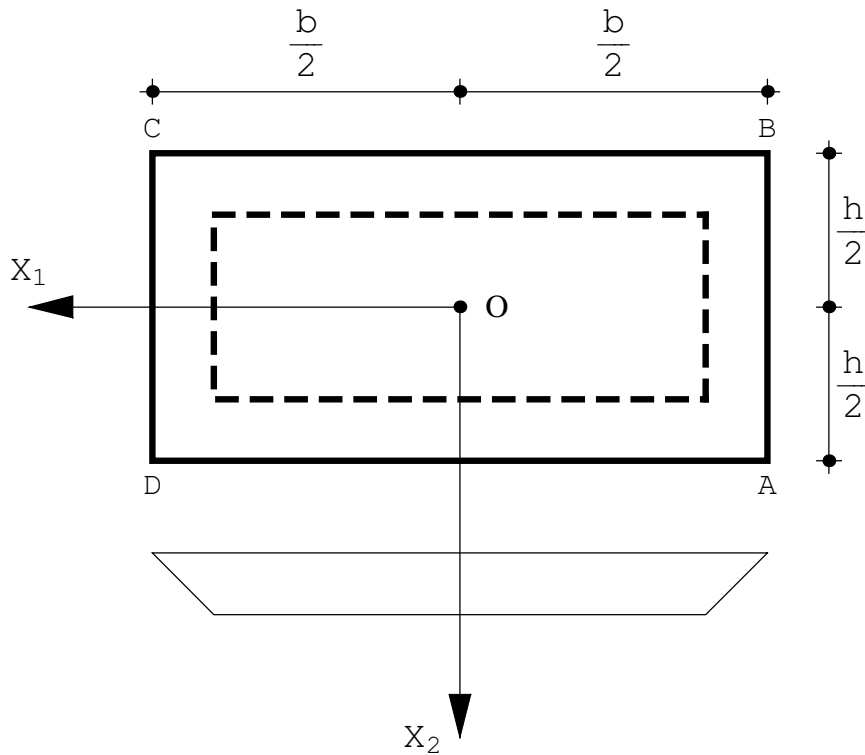


Figura 2. Le curve di livello e la deformazione della membrana di Prandtl per una sezione rettangolare allungata

Il volume compreso tra la membrana deformata e la membrana indeformata può calcolarsi facilmente, se si trascura il piccolo appiattimento della membrana stessa nei dintorni dei lati corti $x_1 = \pm b$. Si ha allora subito che tal volume è pari a $V = p b h^3 / (12 S)$ e quindi il momento torcente sarà fornito da:

$$M_t = 2 V = \frac{p}{S} \frac{b h^3}{6} = 2 G \theta' \frac{b h^3}{6} = \frac{G b h^3 \theta'}{3} \quad (13)$$

da cui l'espressione della rigidità torsionale della sezione rettangolare allungata:

$$C_t = \frac{M_t}{\theta'} = \frac{G b h^3}{3} \quad (14)$$

La funzione di torsione di Prandtl è fornita, in base alla (12), da:

$$\phi = G \theta' \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) \quad (15)$$

e quindi lo stato tensionale è dato da:

$$\sigma_{13} = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -2 G \theta' x_2; \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0 \quad (16)$$

La tensione massima si raggiunge sul contorno, e vale

$$\tau_{\max} = \sigma_{13} \left(x_2 = \frac{h}{2} \right) = -2 G \theta' \frac{h}{2} = -G \theta' h = -3 \frac{M_t}{b h^2} \quad (17)$$

■ Il caso dell'altezza variabile linearmente

Se la sezione ha altezza variabile linearmente tra h_1 a destra ed h_2 a sinistra bisognerà porre:

$$h(x_2) = h_1 + \frac{(h_2 - h_1)}{b} x_1 \quad (18)$$

e quindi l'area della parabola (12) e' calcolabile come:

$$h = s_1 + \frac{(s_2 - s_1)}{b} x_1;$$

$$\text{Simplify} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \frac{p}{2s} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) dx_2 \right]$$

$$\frac{p (s_1 (b - x_1) + s_2 x_1)^3}{12 b^3 s}$$

ed il volume compreso tra la sezione e la membrana deformata e' dato da:

$$\text{Simplify} \left[\int_0^b \frac{p (s_1 (b - x_1) + s_2 x_1)^3}{12 b^3 s} dx_1 \right]$$

$$\frac{b p (s_1 + s_2) (s_1^2 + s_2^2)}{48 s}$$

Il momento torcente e' allora fornito da:

$$M_t = 2V = \frac{b (h_1 + h_2) (h_1^2 + h_2^2) p}{24 s} =$$

$$2 G \Theta \cdot \frac{b (h_1 + h_2) (h_1^2 + h_2^2)}{24} = G \Theta \cdot \frac{b (h_1 + h_2) (h_1^2 + h_2^2)}{12} \quad (19)$$

con rigidita' torsionale pari a:

$$C_t = G \frac{b (h_1 + h_2) (h_1^2 + h_2^2)}{12} \quad (20)$$

Sezioni sottili aperte

Si consideri il profilato metallico a forma di L, descritto in Figura 3, di lati con lunghezza b_1 e b_2 ed altezza (d'ora in poi, *spessore*) costante e pari ad h . Esso puo' pensarsi ottenuto da una sezione rettangolare allungata di base $b_1 + b_2$ e spessore h , attraverso un opportuno piegamento di $\pi/2$ di parte della sezione. A parte gli effetti locali in corrispondenza del gomito, la membrana dell'analogia di Prandtl non cambiera' la sua forma, ed il volume compreso tra la sezione e la membrana deformata rimarra' lo stesso.

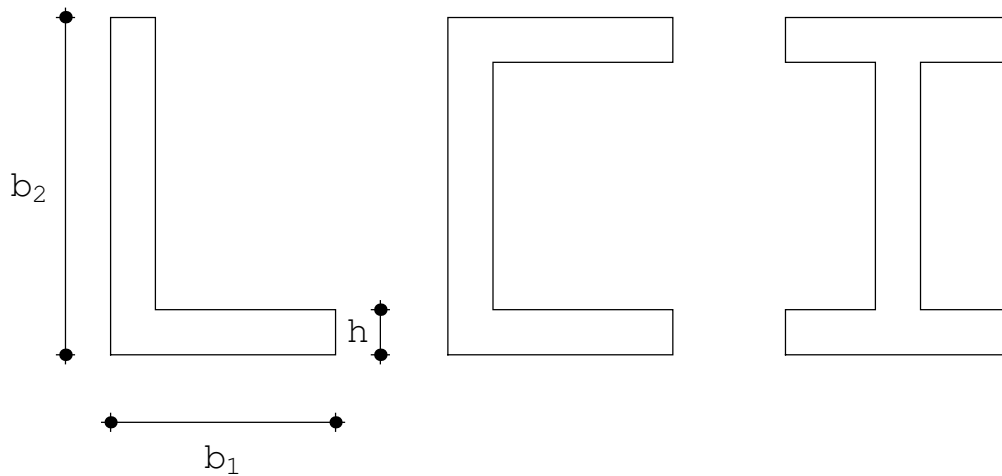


Figura 3. Alcuni profilati di uso comune

Ne segue che la (13) potrà ritenersi valida, a patto di porre $b = b_1 + b_2$:

$$M_t = \frac{Gb_1 h^3 \theta'}{3} + \frac{Gb_2 h^3 \theta'}{3} \quad (21)$$

Analogo ragionamento può farsi per un profilato a T, ad I, o per qualsiasi profilato che possa considerarsi come l'unione di più sezioni rettangolari allungate a uguale spessore.

Se invece lo spessore, pur mantenendosi costante lungo ciascun tratto, varia da tratto a tratto, occorre imporre che, per la congruenza, l'angolo specifico di torsione θ' risulti lo stesso per ciascun tratto. Se quindi la sezione è formata da n tratti, ciascuno di essi sarà soggetto ad un momento torcente proporzionale alla sua rigidità torsionale, e risulterà:

$$\theta' = \frac{M_{t1}}{C_{t1}} = \dots = \frac{M_{ti}}{C_{ti}} = \dots = \frac{M_{tn}}{C_{tn}} = \frac{\sum_{i=1}^n M_{ti}}{\sum_{i=1}^n C_{ti}} = \frac{M_t}{\sum_{i=1}^n C_{ti}} = \frac{M_t}{C_t} \quad (22)$$

da cui l'espressione della rigidità torsionale della sezione formata da n tratti rettangolari allungati:

$$C_t = \sum_{i=1}^n C_{ti} = \frac{G}{3} \sum_{i=1}^n b_i^3 h_i \quad (23)$$

La tensione massima si ottiene in corrispondenza del tratto a spessore maggiore, sia esso il tratto i -mo, e per esso sarà, secondo la (16)

$$\tau_{\max} = G\theta' h_i = 3 M_t \frac{h_i}{\sum_{i=1}^n b_i^3 h_i} \quad (24)$$

■ Il caso del profilato con ali a sezione variabile

Per il caso di Figura 4 si possono utilizzare i risultati (20), ottenendo una rigidità torsionale pari a:

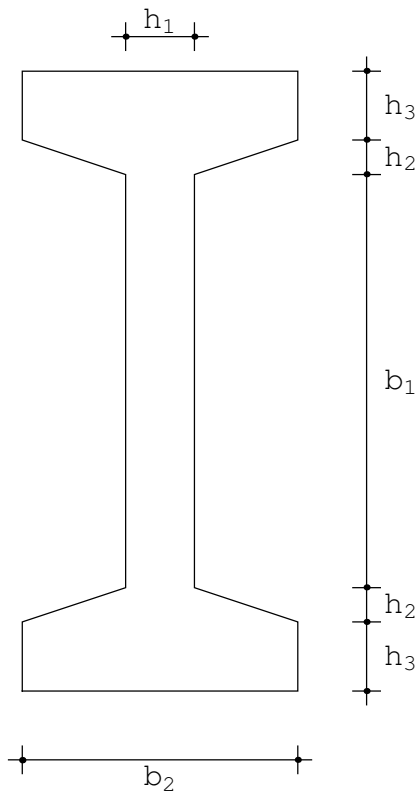


Figura 4. Un profilato a sezione variabile

$$C_t = G \frac{b_1 h_1^3}{3} + 4 \frac{b_2}{2} \frac{(h_2 + h_3) (h_2^2 + h_3^2)}{12} \quad (25)$$

e la tensione massima si ottiene nel punto di mezzeria delle ali, dove massimo e' lo spessore:

$$\tau_{\max} = G\theta' h_3 \quad (26)$$

L' analogia idrodinamica

A partire dalle proprietà dello stato tensionale da torsione, e dalla formulazione del risultante problema matematico, e' possibile formulare alcune analogie con problemi di idrodinamica, in modo da poter visualizzare piu' intuitivamente la distribuzione di tensioni sulla sezione retta. La prima di queste analogie fu introdotta da J. Boussinesq, in *J. Math. Pure Appl.*, ser.2, vol. 16 (1871), mostrando come il problema di Poisson, formulato per la funzione di Prandtl nei precedenti Complementi, sia formalmente identico al problema idrodinamico che conduce alla ricerca della velocità in un moto laminare di un fluido viscoso lungo un tubo che abbia la stessa sezione retta della trave soggetta a torsione.

Thompson e Tait in "*Natural Philosophy*", parte 2, pag. 242 (1903) hanno invece proposto di trasformare il problema della torsione nel problema della ricerca di una funzione di flusso di un moto irrotazionale di un fluido ideale contenuto in un contenitore con la stessa sezione retta della trave soggetta a torsione.

Infine, A.G.Greenhill, in *Hydromechanics*, articolo della Enciclopedia Britannica, undicesima edizione, pag. 115 (1910), fa osservare che le proprietà dello stato tensionale da torsione, sintetizzate nelle due equazioni (57) e (58) della Lezione 26, sono anche caratteristiche del campo vettoriale delle velocità di un fluido ideale che circoli con moto permanente in un tubo con sezione retta uguale alla sezione retta della trave soggetta a torsione.

E' a questa terza analogia che dedicheremo maggiore attenzione.



Fig.5 - A.G. Greenhill

■ La formulazione dell'analogia di Greenhill

Si consideri un recipiente cilindrico pieno di liquido, con sezione retta uguale alla sezione retta della trave che si vuole studiare, e si imprima ad esso un moto di rotazione intorno ad un asse parallelo all'asse geometrico X_3 del cilindro. Si arresti poi il cilindro, e si studi il moto del fluido negli istanti immediatamente successivi, prima che le inevitabili resistenze viscosive ne rallentino il moto, e quindi ancora in condizioni di *stazionarietà*.

Ipotizzando che la velocità impressa al fluido non sia eccessiva, può presumersi con buona approssimazione che il moto risultante sia piano, ossia definito dalle componenti di velocità:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_1, x_2) \\ u_2 &= u_2(x_1, x_2) \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

Si noti che le componenti di velocità non dipendono dal tempo, attesa la stazionarietà del moto. Ora, il principio di conservazione della massa permette di dedurre la cosiddetta equazione di continuità, che potrà scriversi, in generale, come:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{28}$$

dove ρ è la densità di massa del fluido considerato (cfr. ad esempio D. Citrini e G. Nosedà, "Idraulica", Editrice Ambrosiana, Milano, pag. 81-83). Se poi il fluido in moto è *incomprimibile*, allora la densità di massa ρ è costante nel tempo e nello spazio, e quindi il campo di velocità è solenoidale:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad (29)$$

formalmente identica alla condizione (58) della Lezione 25 sulle tensioni tangenziali da torsione:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0 \quad (30)$$

Infine, nella stessa ipotesi di stazionarietà si dovrà ammettere che la velocità di rotazione ω rimanga costante negli istanti successivi all'arresto del serbatoio, e quindi dovrà essere:

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = 2 \omega \quad (31)$$

ossia ancora:

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} u)_1 &= 0 \\ (\operatorname{rot} u)_2 &= 0 \\ (\operatorname{rot} u)_3 &= \text{Cost.} \end{aligned} \quad (32)$$

formalmente identica alla condizione (57) della Lezione 26 sulle tensioni tangenziali da torsione:

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \tau)_1 &= 0 \\ (\operatorname{rot} \tau)_2 &= 0 \\ (\operatorname{rot} \tau)_3 &= 2 G \theta' = \text{Cost.} \end{aligned} \quad (33)$$

Ne segue che le tensioni tangenziali sono proporzionali in ciascun punto alle componenti della velocità. Infine, le condizioni ai limiti nei due casi sono identiche: infatti sia la tensione che la velocità del fluido devono essere tangenzialmente al contorno Γ della sezione retta.

■ Le conseguenze pratiche dell'analogia

Lo studio sperimentale del comportamento torsionale attraverso l'analogia idrodinamica non è particolarmente agevole, sia per la difficoltà nel misurare le velocità del fluido, sia per la presenza della viscosità del fluido stesso, che falsifica l'ipotesi di stazionarietà. Tuttavia, l'analogia è utilissima per deduzioni di carattere qualitativo, attraverso l'esame delle linee di flusso della corrente, che sono facilmente intuibili e disegnabili. È ad esempio evidente che il modulo della tensione tangenziale aumenta laddove le linee di flusso si infittiscono.

■ L'effetto di un intaglio o di un buco

Si voglia studiare l'effetto di un piccolo foro all'interno della sezione retta, o equivalentemente, di un piccolo intaglio sulla frontiera. Secondo l'analogia appena introdotta, occorre esaminare come variano le linee di flusso a seguito dell'introduzione di un cilindro solido con sezione retta uguale al foro, ed è quindi facile dedurre che nelle immediate vicinanze dell'ostacolo si avrà una notevole alterazione dello stato tensionale. Se ad esempio la sezione retta è circolare, ed il foro è anch'esso circolare, come in Figura 6, le velocità del fluido nei punti frontale e posteriore si viene ad annullare, mentre nei due punti laterali 3 e 4 si viene a raddoppiare, e di conseguenza lo stato tensionale subirà analoghe importanti modifiche. Stessa situazione si ripresenta nel caso di una sezione circolare con un intaglio semicircolare, e nel punto inferiore 3 si ha in pratica un raddoppio dello stato tensionale.

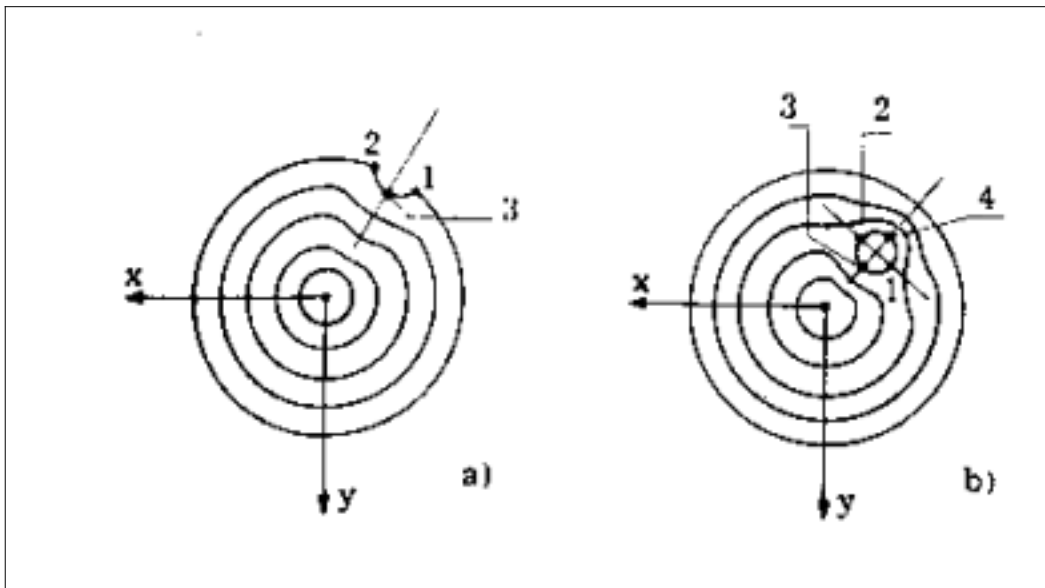


Figura 6 - La presenza di un buco circolare o di un intaglio semicircolare in una sezione retta circolare

■ I punti angolosi

Utilizzando l'analogia idrodinamica e' anche possibile intuire il comportamento delle tensioni in un intorno dei punti angolosi, presenti ad esempio nelle sezioni rettangolari. Per esse e' facile intuire che la tensione si annullera' in corrispondenza dei punti angolosi esterni, mentre diverra' teoricamente infinita nei punti angolosi interni, come sintetizzato in Figura 7. E' di conseguenza inevitabile arrotondare gli spigoli interni, per ovviare ad altrimenti inevitabili rotture.

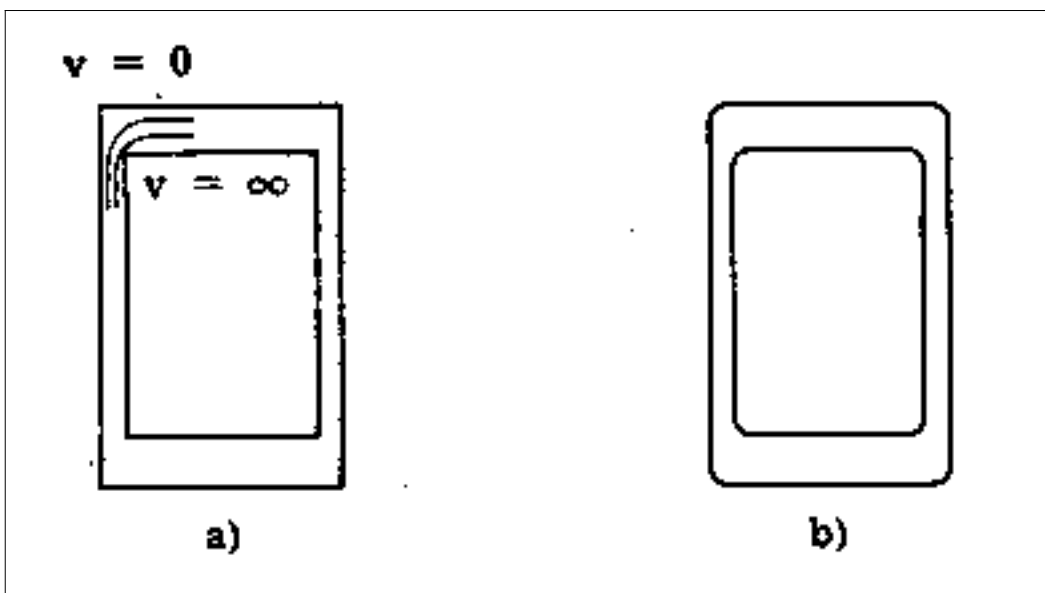


Figura 7 - Le linee di flusso in corrispondenza dei punti angolosi, e loro arrotondamento

■ La differenza tra sezioni aperte e sezioni chiuse

Profondamente diverso è il comportamento delle sezioni rette chiuse e delle sezioni aperte, come può intuirsi tracciando le linee di flusso. Come può osservarsi dalla Figura 8, infatti, nel caso delle sezioni chiuse le linee di flusso si chiudono su se stesse, e su ogni spessore la velocità non cambia di segno. Nella corrispondente sezione aperta, in cui un taglio impedisce alle linee di flusso di chiudersi su se stesse, la velocità cambia di segno lungo ogni spessore, e le linee di flusso sono molto più lunghe. Ne segue che a parità di momento flettente la sezione chiusa risulta molto più conveniente, mentre la sezione aperta sarà soggetta a tensioni tangenziali molto maggiori.

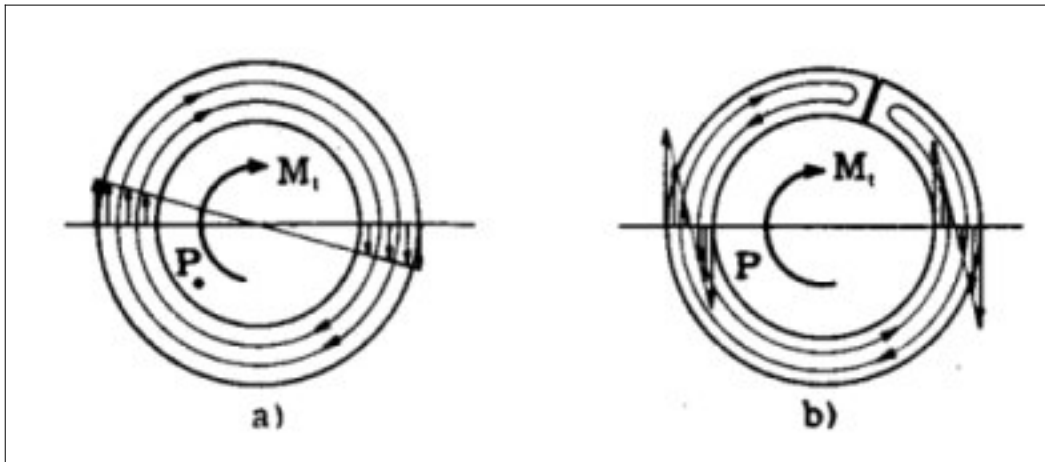


Figura 8 - Le linee di flusso per sezioni chiuse ed aperte

La trattazione approssimata secondo l'analogia idrodinamica

Si definisce *canale di flusso elementare* l'area compresa tra due linee di flusso tanto vicine da poter supporre che la normale ad una di esse sia normale anche all'altra. Ne segue che in ciascun punto P del canale può definirsi il suo spessore $\delta(P)$, e la sua linea media s_i è il luogo dei punti medi degli spessori. La generica linea media s_i sarà una curva chiusa, cui potrà assegnarsi un verso di percorrenza positivo, usualmente il verso antiorario.

Per l'equazione di continuità, ed in base all'analogia idrodinamica, a ciascun canale elementare potrà associarsi il relativo flusso elementare $f_i = \tau\delta$, che risulterà costante in ciascun canale; inoltre, sempre in base all'analogia idrodinamica, potrà supporre che il vettore della tensione tangenziale sia costante lungo il generico spessore δ , e che sia diretto lungo la tangente alla linea media in δ . Ne segue che la *circuitazione* del vettore τ lungo la linea media generica s_i :

$$c_i = \oint_{s_i} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t} \, ds \quad (34)$$

si riduce alla più semplice:

$$c_i = \oint_{s_i} \tau \, ds \quad (35)$$

ed ancora, sfruttando la costanza del flusso elementare:

$$c_i = \oint_{s_i} \tau \, ds = \tau \delta \oint_{s_i} \frac{ds}{\delta} = f_i S_i \quad (36)$$

avendo definito la *circuitazione geometrica* S_i del canale elementare:

$$S_i = \oint_{s_i} \frac{ds}{\delta} \quad (37)$$

Ora, il teorema di Stokes nel piano, banale estensione delle formule di Green-Riemann, garantisce che la circuitazione di τ lungo la linea media generica s_i e' pari al rotore dello stesso vettore τ esteso a tutta l'area A_i contenuta dalla s_i . In altri termini dovra' aversi:

$$c_i = f_i S_i = \int_{A_i} \text{rot } \tau \, dA \quad (38)$$

Ma e' noto che $\text{rot } \tau = 2G\theta'$, e quindi:

$$c_i = f_i S_i = \int_{A_i} \text{rot } \tau \, dA = 2G\theta' A_i \quad (39)$$

da cui subito il flusso elementare relativo al canale considerato:

$$f_i = 2G \frac{A_i}{S_i} \theta' \quad (40)$$

Occorre ora ottenere l'espressione dell'angolo specifico di torsione θ' in funzione del momento applicato M_t . A cio' fare, si consideri, un generico canale elementare, e lungo esso si consideri il tronco di area δds . Esso sara' soggetto alla forza $F = \tau \delta ds = f_i ds$, agente secondo la tangente alla linea media, e proporzionale a ds , a meno della costante f_i . Ne segue che la linea media del canale s_i coincide con il poligono delle forze che agiscono sul canale, e poiche' s_i e' una linea chiusa, le forze F equivalgono ad una coppia M_i .

Il calcolo di M_i puo' condursi assumendo un polo arbitrario C , rispetto al quale si ha, cfr. Figura 9:

$$M_i = \int_{c_i} \tau \delta h \, ds = f_i \int_{c_i} h \, ds \quad (41)$$

avendo indicato con h la distanza tra C e la tangente alla linea media. Ne segue, se come sempre A_i denota l'area compresa dalla linea media c_i :

$$M_i = 2 f_i A_i \quad (42)$$

Dalla (40), utilizzando quest'ultima relazione, si ottiene l'angolo specifico di torsione in funzione del momento M_i :

$$\theta' = M_i \frac{S_i}{4 GA_i^2} \doteq \frac{M_i}{C_{ti}} \quad (43)$$

avendo definito la rigidezza torsionale dell'i-mo canale di flusso elementare:

$$C_{ti} = 4 \frac{GA_i^2}{S_i} \quad (44)$$

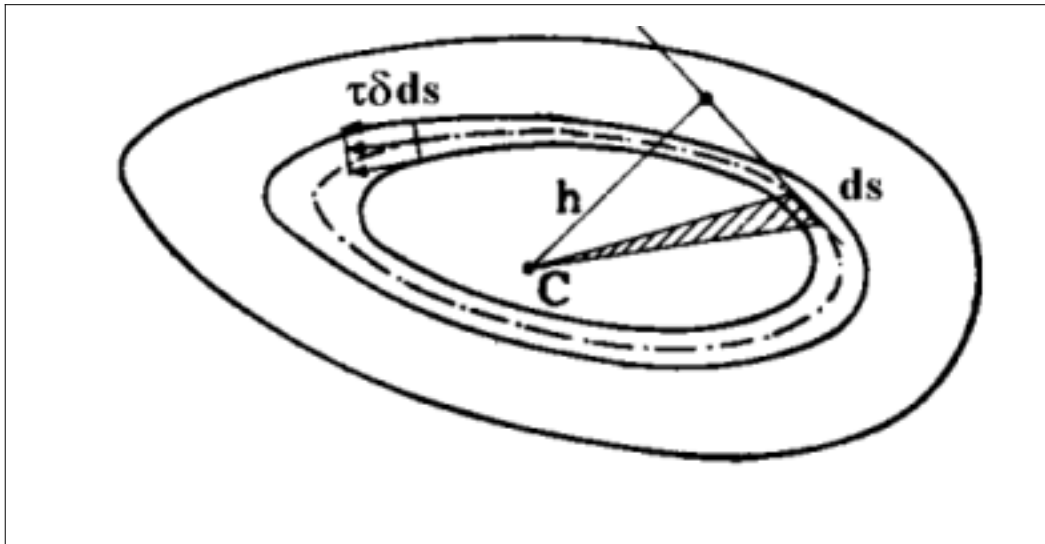


Figura 8 - Il contributo del canale elementare generico al calcolo della rigidezza torsionale

Per la congruenza, l'angolo specifico di torsione dovrà essere lo stesso per tutti i canali elementari, e quindi:

$$\theta' = \frac{M_1}{C_{t1}} = \dots = \frac{M_i}{C_{ti}} = \dots = \frac{M_n}{C_{tn}} = \frac{\sum_{i=1}^n M_i}{\sum_{i=1}^n C_{ti}} \quad (45)$$

Ora, per l'equilibrio della sezione il momento torcente applicato dovrà essere pari alla somma dei momenti M_i dovuti agli n canali elementari, e quindi :

$$M_t = \sum_{i=1}^n M_i \quad (46)$$

da cui la richiesta espressione dell'angolo di torsione in funzione del momento applicato:

$$\theta' = \frac{M_t}{\sum_{i=1}^n C_{ti}} \doteq \frac{M_t}{C_t} \quad (47)$$

La rigidezza torsionale della sezione e' quindi la somma delle aliquote dovute ai singoli canali elementari.

La sezione rettangolare allungata

Si riconsideri ora, nell'ottica dell'analogia idrodinamica, la sezione rettangolare allungata di Figura 9, già studiata attraverso l'analogia della membrana. Le tensioni raggiungeranno il loro valore massimo dove massima e' la velocità del fluido ruotante, ossia in corrispondenza degli estremi della mediana più corta, in A ed in B. Per la simmetria, su questa mediana dovrà annullarsi la σ_{23} , e se il rettangolo e' sufficientemente lungo, dovrà anche essere:

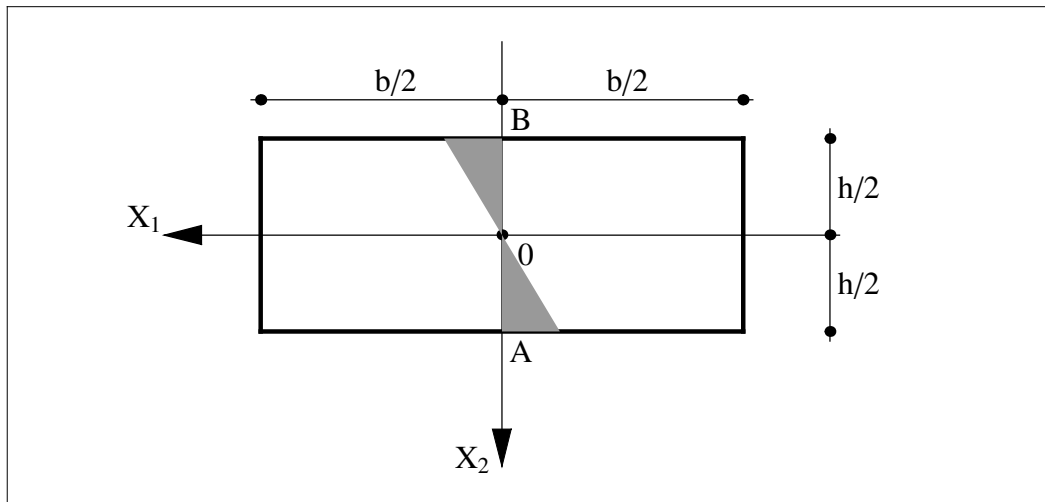


Figura 9 - Lo stato tensionale lungo la mediana corta di una sezione rettangolare allungata, secondo l'analogia idrodinamica

$$\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} = 0 \quad (48)$$

Tutto ciò può anche essere confermato da uno sguardo alla Figura 4 della Lezione sulla sezione rettangolare.

Dalla (48) segue immediatamente:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_2} = -2 G \theta' \quad (49)$$

confermando la (16). Lungo la mediana AB, $\tau = \sigma_{13}$, e poiché la σ_{13} è funzione dispari di x_2 , potrà assumersi un andamento lineare con punto di nullo nell'origine, ottenendo:

$$\tau = -2 G \theta' x_2 \quad (50)$$

Le linee medie dei canali elementari, se la sezione è abbastanza allungata, possono assimilarsi a rettangoli, come riportato in Figura 6. Per la generica linea media s_i relativa ad un canale di spessore costante δ , si ha quindi una circuitazione geometrica pari a:

$$S_i = \oint_{s_i} \frac{ds}{\delta} = 2 \frac{b}{dx_2} \quad (51)$$

dove si sono trascurati i contributi dovuti ai due tratti verticali, e si è posto $\delta = dx_2$. Analogamente, l'area racchiusa dalla generica linea media è pari a:

$$A_i = 2 x_2 b \quad (52)$$

La rigidezza torsionale del canale elementare considerato è allora calcolabile utilizzando la (44):

$$C_{ti} = 4 \frac{GA_i^2}{S_i} = 4 G \frac{4 x_2^2 b^2}{2 b} dx_2 = 8 G b x_2^2 dx_2 \quad (53)$$

e quindi la rigidezza torsionale dell'intera sezione è:

$$C_t = 8 G b \int_{-h/2}^{h/2} x_2^2 dx_2 = \frac{G b h^3}{3} \quad (54)$$

confermando la (14).

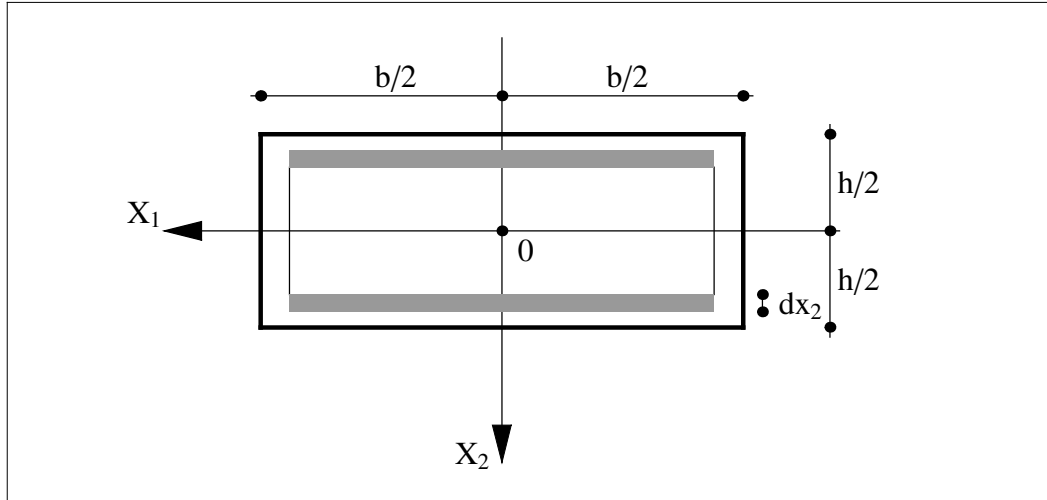


Figura 10 - I canali elementari per la sezione rettangolare allungata e la loro approssimazione

L'angolo specifico di torsione sarà infine pari a:

$$\theta' = \frac{M_t}{C_t} = 3 \frac{M_t}{G b h^3} \quad (55)$$

e quindi:

$$|\tau_{\max}| = \sigma_{13}(x_2 = \pm h/2) = 2 G \theta' \frac{h}{2} = 3 \frac{M_t}{b h^2} \quad (56)$$

La sezione circolare chiusa ed aperta

Si consideri la sezione retta a forma di corona circolare aperta, illustrata in Figura 11, e si assuma che il suo spessore δ sia molto più piccolo del raggio R . In questo caso può assimilarsi la sezione ad un rettangolo allungato di base $b = 2 \pi R$ ed altezza $h = \delta$, e quindi le formule precedenti possono essere utilizzate, a fornire:

$$\theta' = 3 \frac{M_t}{G b h^3} = \frac{3}{2 \pi} \frac{M_t}{G R \delta^3} \quad (57)$$

$$|\tau_{\max}| = \frac{3}{2 \pi} \frac{M_t}{R \delta^2} \quad (58)$$

Se invece la sezione circolare è chiusa, allora potrà considerarsi per essa un singolo canale elementare, con circuitazione geometrica pari a:

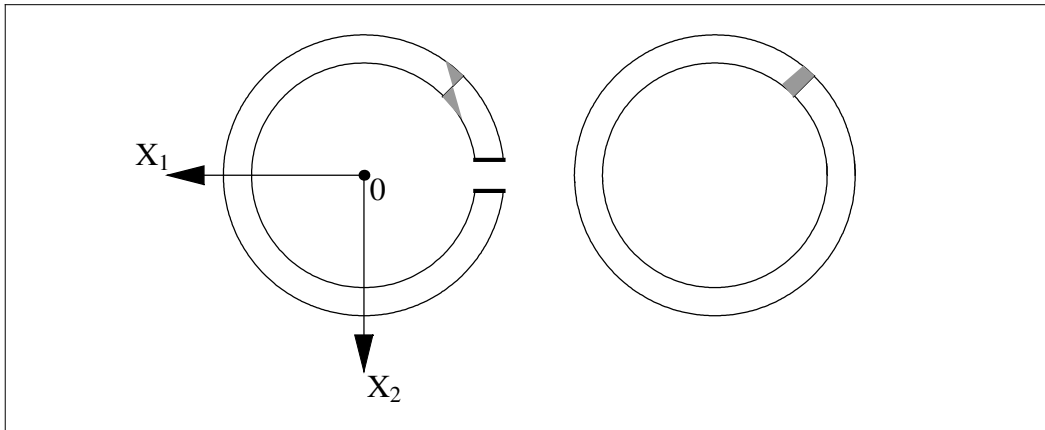


Figura 11 - La sezione a settore circolare aperto e chiuso

$$S_i = \frac{2 \pi R}{\delta} \quad (59)$$

e racchiudente un'area pari a tutto il cerchio:

$$A_i = \pi R^2 \quad (60)$$

La rigidezza torsionale della sezione circolare chiusa e' allora pari, secondo la (18):

$$C_t = 4 \frac{GA_i^2}{S_i} = 4 G \pi^2 R^4 \frac{\delta}{2 \pi R} = 2 \pi G R^3 \delta \quad (61)$$

e quindi:

$$\theta' = \frac{M_t}{C_t} = \frac{1}{2 \pi} \frac{M_t}{G R^3 \delta} \quad (62)$$

$$|\tau_{\max}| = 2 G \theta' \frac{R}{2} = \frac{1}{2 \pi} \frac{M_t}{R^2 \delta} \quad (63)$$

Indicando con a e con c i risultati relativi alle sezioni circolari aperte e chiuse, si hanno i seguenti rapporti:

$$\frac{\tau_a}{\tau_c} = 3 \frac{R}{\delta} \quad (64)$$

$$\frac{\theta'_a}{\theta'_c} = 3 \frac{R^2}{\delta^2} \quad (65)$$

e quindi si conferma la maggiore sollecitazione cui viene sottoposta la sezione aperta rispetto alla sezione chiusa. Inoltre, la sezione aperta e' molto piu' deformabile della corrispondente sezione chiusa.

Note

[Prandtl] - Si veda "*Zur Torsion der Prismatischen Stäben*", Phys. Z., 4, 758-759 (1903), e "*Eine neue Darstellung der Torsionsspannungen bei Prismatischen Stäben vom beliebigem Querschnitt*", Fber. dtsh. Math. Ver. p.31 (1904). Una breve biografia di Prandtl puo' leggersi nella sezione ricerca del sito <http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk> [Torna al testo]

Grafici