
Complementi 13 - L'approccio alla Prandtl

[Ultima revisione: 18 febbraio 2009]

Una interessante applicazione della teoria delle funzioni di tensione e' l'approccio proposto da L. Prandtl al problema della torsione. Introdotta una funzione ϕ le cui derivate sono proporzionali alle tensioni tangenziali, si giunge a definire per essa un problema di Poisson sulla sezione retta, che permette la deduzione della funzione stessa, e da essa il calcolo dello stato tensionale e del momento torcente.

La teoria viene poi applicata ad alcune semplici sezione rette.

La formulazione del problema

Si parta dal solito stato tensionale alla De Saint-Venant, caratterizzato dalla presenza di sole tensioni tangenziali:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

con $\sigma_{13} = \sigma_{13}(x_1, x_2)$ e $\sigma_{23} = \sigma_{23}(x_1, x_2)$, come dettato dalle prime due equazioni indefinite dell'equilibrio.

Si introduca ora la *funzione di tensione di Prandtl* $\phi = \phi(x_1, x_2)$, tale che:

$$\sigma_{13} = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}; \quad \sigma_{23} = - \frac{\partial \phi}{\partial x_1}; \quad (2)$$

in modo tale da soddisfare identicamente la terza equazione indefinita dell'equilibrio:

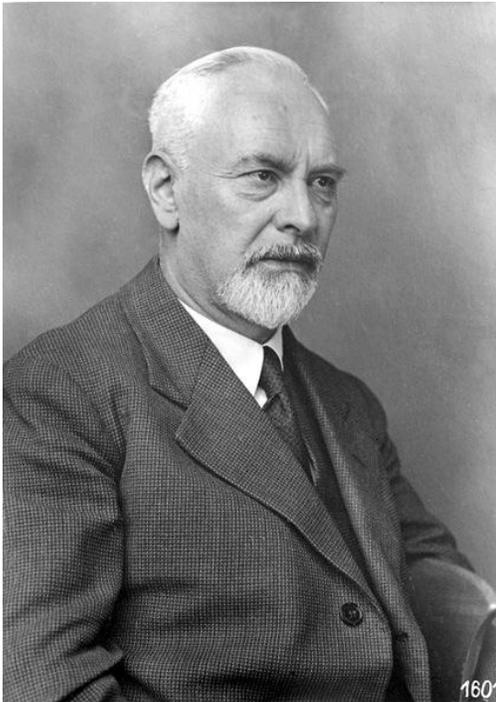
$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (3)$$

La condizione di compatibilita' interna (57) della Lezione (26):

$$\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_2} = 2 G \theta' = \text{cost.} \quad (4)$$

si tramuta nella condizione in ϕ da soddisfare sulla sezione retta Σ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = \nabla^2 \phi = -2 G \theta' = C = \text{cost.} \quad (5)$$



L. Prandtl

La condizione al contorno:

$$\sigma_{13} n_{x1} + \sigma_{23} n_{x2} = 0 \quad (6)$$

si traduce nello scrivere:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} n_{x1} - \frac{\partial \phi}{\partial x_1} n_{x2} = - \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} - \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} = - \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0 \quad (7)$$

e quindi sul contorno Γ la funzione ϕ dovrà assumere un valore costante, in particolare un valore nullo:

$$\phi(\Gamma) = 0 \quad (8)$$

Al posto di un problema di Dini-Neumann si è ora in presenza di un *problema di Poisson*, consistente nel trovare una funzione armonica su un dominio piano Σ , che assuma un valore assegnato al contorno Γ . Anche in questo caso, ben noti teoremi di Analisi Matematica garantiscono l'esistenza di una simile funzione.

È anche interessante esprimere il momento torcente in termini di funzione di torsione. Si ha, in base alla (34) della Lezione 26:

$$\begin{aligned} M_t &= \int_{\Sigma} (\sigma_{23} x_1 - \sigma_{13} x_2) d\Sigma = - \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} x_2 \right) d\Sigma = \\ &= - \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 \phi) + \frac{\partial}{\partial x_2} (x_2 \phi) \right) d\Sigma + 2 \int_{\Sigma} \phi d\Sigma \end{aligned} \quad (9)$$

e per la formula di Green-Riemann, come dimostrata nell'appendice della Lezione 26:

$$M_t = - \oint_{\Gamma} \phi (x_1 n_{x1} - x_2 n_{x2}) d\Gamma + 2 \int_{\Sigma} \phi d\Sigma \quad (10)$$

ed infine, in base alla (8):

$$M_t = 2 \int_{\Sigma} \phi d\Sigma \quad (11)$$

La sezione ellittica

Uno dei vantaggi dell'utilizzare questo approccio si deve al fatto che, assegnata l'equazione della frontiera della sezione retta in x_1 ed x_2 , e' possibile scegliere la funzione di torsione ϕ come una funzione proporzionale a tale equazione. In tal modo ϕ sara' automaticamente nulla sul contorno Γ , semplificando notevolmente la sua ricerca. Se ad esempio si vuol studiare la sezione ellittica, di equazione:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (12)$$

si potra' porre la funzione di torsione nella forma:

$$\phi = k \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 \right) \quad (13)$$

e la (5) porgera':

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = \nabla^2 \phi = 2k \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \right) = -2 G \theta' \quad (14)$$

Il momento torcente potra' calcolarsi come:

$$M_t = 2 \int_{\Sigma} \phi d\Sigma = 2 \frac{k}{a^2} \int_{\Sigma} x_1^2 d\Sigma + 2 \frac{k}{b^2} \int_{\Sigma} x_2^2 d\Sigma - 2k \int_{\Sigma} d\Sigma \quad (15)$$

e ricordando le formule per il calcolo dei momenti di inerzia e dell'area di una ellisse si ha:

$$M_t = 2 \frac{k}{a^2} \frac{\pi a^3 b}{4} + 2 \frac{k}{b^2} \frac{\pi a b^3}{4} - 2k \pi ab = -k \pi ab = -k \Sigma \quad (16)$$

Le tensioni saranno fornite da:

$$\sigma_{13} = 2 x_2 \frac{k}{b^2} = -2 \frac{M_t}{\Sigma b^2} x_2 \quad (17)$$

$$\sigma_{23} = -2 x_1 \frac{k}{a^2} = 2 \frac{M_t}{\Sigma a^2} x_1 \quad (18)$$

coincidenti con le (30) della Lezione 27.

Infine, l'angolo specifico di torsione si potra' calcolare a partire dalla (4), ottenendo:

$$\theta' = \frac{1}{2G} \left(\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2G} \left(2 \frac{M_t}{\Sigma a^2} + 2 \frac{M_t}{\Sigma b^2} \right) = \frac{M_t}{G \Sigma a^2 b^2} (a^2 + b^2) \quad (19)$$

coincidente con la (29) della Lezione 27.

La sezione a forma di triangolo equilatero

Si consideri la sezione retta a forma di triangolo equilatero riportata in Figura 1. Avendo indicato con $3a$ l'altezza del triangolo, ed avendo posizionato l'origine del riferimento nel baricentro del triangolo, le coordinate dei tre vertici saranno $A = (0, -2a)$, $B = (\sqrt{3}a, a)$, $C = (-\sqrt{3}a, a)$. Ne segue che la frontiera sarà identificata dalle tre seguenti rette:

retta BC, di equazione:

$$x_2 - a = 0 \quad (20)$$

retta AB, di equazione:

$$-\sqrt{3}x_1 + x_2 + 2a = 0 \quad (21)$$

retta AC, di equazione:

$$\sqrt{3}x_1 + x_2 + 2a = 0 \quad (22)$$

Si pone allora la funzione di Prandtl nella forma:

$$\phi(x_1, x_2) = k(x_2 - a)(-\sqrt{3}x_1 + x_2 + 2a)(\sqrt{3}x_1 + x_2 + 2a) \quad (23)$$

e quindi la (5) fornisce:

$$12ak = -2G\theta' \quad (24)$$

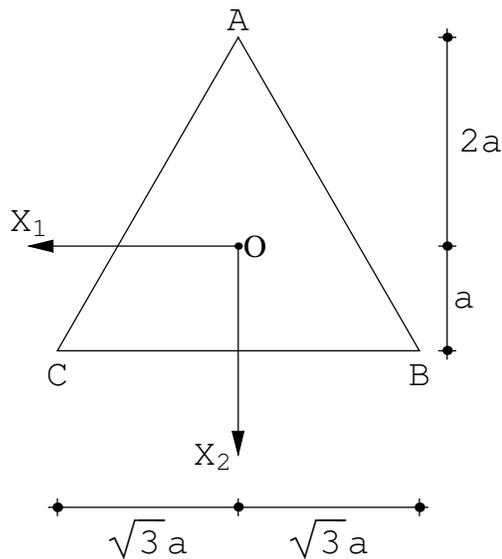


Figura 1 - La sezione retta a forma di triangolo equilatero

da cui subito:

$$k = -\frac{G\theta'}{6a} \quad (25)$$

e quindi la funzione di Prandtl sarà pari a:

$$\phi(x_1, x_2) = -\frac{G\theta'}{6a} (x_2 - a) \left(-\sqrt{3} x_1 + x_2 + 2a\right) \left(\sqrt{3} x_1 + x_2 + 2a\right) \quad (26)$$

■ Lo stato tensionale

Lo stato tensionale si potrà ottenere derivando opportunamente tale funzione, come segue:

$$\sigma_{13} = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \frac{G\theta'}{2a} (x_1^2 - x_2^2 - 2ax_2) \quad (27)$$

$$\sigma_{23} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{G\theta'}{a} x_1 (a - x_2) \quad (28)$$

La componente σ_{23} si viene quindi ad annullare sul lato inferiore BC del triangolo e sull'asse verticale X_2 . Su questo stesso asse l'altra componente di tensione diviene:

$$\sigma_{13}(x_1 = 0) = -\frac{G\theta'}{2a} x_2 (x_2 + 2a) \quad (29)$$

L'andamento di questa componente di tensione lungo l'asse verticale è riportata nella Figura seguente. Da essa si nota come il valore massimo si ottiene nel punto di mezzeria del triangolo, laddove si ha il valore:

$$\sigma_{13}(x_1 = 0, x_2 = a) = -\frac{3}{2} G a \theta' \quad (30)$$

Plot[-x₂ (x₂ + 2), {x₂, -2, 1}]

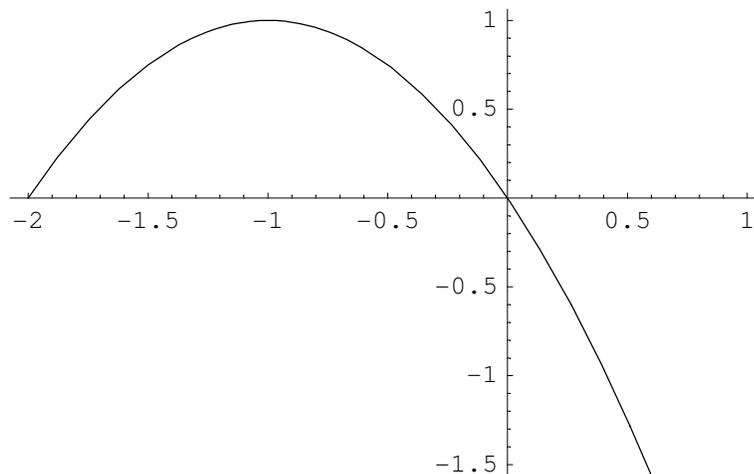


Figura 2. L'andamento della σ_{13} lungo l'asse verticale, dove σ_{23} è nulla

La risultante della tensione tangenziale è fornita da:

$$\tau = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} = \frac{G\theta'}{2a^2} \sqrt{(x_1^4 + x_2^2 (2a + x_2)^2 + 2x_1^2 (2a^2 - 6ax_2 + x_2^2))}$$

e - come può facilmente controllarsi - essa si annulla nei tre vertici del triangolo, e nell'origine.

Poiche' lungo l'asse orizzontale la componente σ_{23} varia linearmente, annullandosi nell'origine, si ha lo stato tensionale riportato in Figura 3.

Il momento torcente puo' calcolarsi a partire dalla (11) come:

$$M_t = -\frac{G\theta'}{3a} \int_{\Sigma} (x_2 - a) (-\sqrt{3} x_1 + x_2 + 2a) (\sqrt{3} x_1 + x_2 + 2a) d\Sigma = \frac{27}{5\sqrt{3}} G\theta' a^4 = \frac{3}{5} GI_p \theta' \quad (31)$$

dove $I_p = 3\sqrt{3} a^4$ e' il momento polare del triangolo in esame.

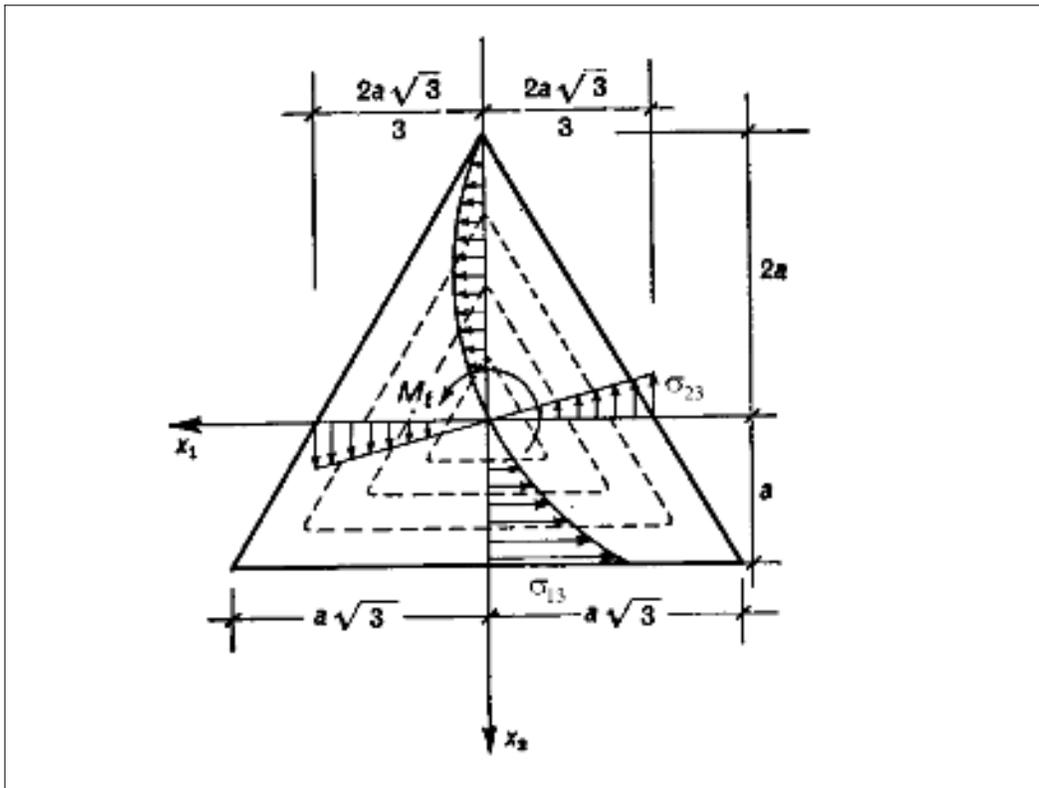


Figura 3. Lo stato tensionale lungo gli assi coordinati

Ed infatti, utilizzando le formule di riduzione per gli integrali doppi e la simmetria del triangolo rispetto all'asse verticale X_2 si ha subito:

$$-2 \int_{-2a}^a \int_{-x_2/\sqrt{3}-2a/\sqrt{3}}^0 (x_2 - a) (-\sqrt{3} x_1 + x_2 + 2a) (\sqrt{3} x_1 + x_2 + 2a) dx_1 dx_2$$

$$\frac{27\sqrt{3} a^5}{5}$$

$$2 \int_{-2a}^a \int_{-x_2/\sqrt{3}-2a/\sqrt{3}}^0 (\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2$$

$$3 \sqrt{3} a^4$$

A partire dalla (31) si può immediatamente ricavare il fattore di torsione:

$$q = \frac{GI_p \theta'}{M_t} = \frac{5}{3} \quad (32)$$

■ L'analisi degli spostamenti

Per dedurre l'espressione della funzione di torsione $\Psi(x_1, x_2)$ di De Saint-Venant, si parta dall'espressione delle tensioni, come fornita dalle (43) della Lezione (26), e si scriva:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = \sigma_{13} \frac{I_p}{q M_t} + x_2 \quad (33)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = \sigma_{23} \frac{I_p}{q M_t} - x_1 \quad (34)$$

ed introducendo i valori delle tensioni, del fattore di torsione e del momento torcente, si giunge alle due equazioni:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2a} \quad (35)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = -\frac{x_1 x_2}{a} \quad (36)$$

da cui subito:

$$\Psi = \frac{x_1^3 - 3x_1 x_2^2}{6a} + C_0 \quad (37)$$

con C_0 costante di integrazione che si annulla annullando i moti rigidi della trave.

La terna degli spostamenti da torsione, quindi, per una trave con sezione retta a forma di triangolo equilatero, è fornita da:

$$u_1 = -q \frac{M_t}{GI_p} x_2 x_3 = -\frac{5}{3} \frac{M_t}{GI_p} x_2 x_3 \quad (38)$$

$$u_2 = q \frac{M_t}{GI_p} x_1 x_3 = \frac{5}{3} \frac{M_t}{GI_p} x_1 x_3 \quad (39)$$

$$u_3 = q \frac{M_t}{GI_p} \Psi(x_1, x_2) = \frac{5}{18a} \frac{M_t}{GI_p} (x_1^3 - 3x_1 x_2^2) \quad (40)$$

Le curve di livello degli spostamenti u_3 da ingobbimento sono riportati in Figura 4.

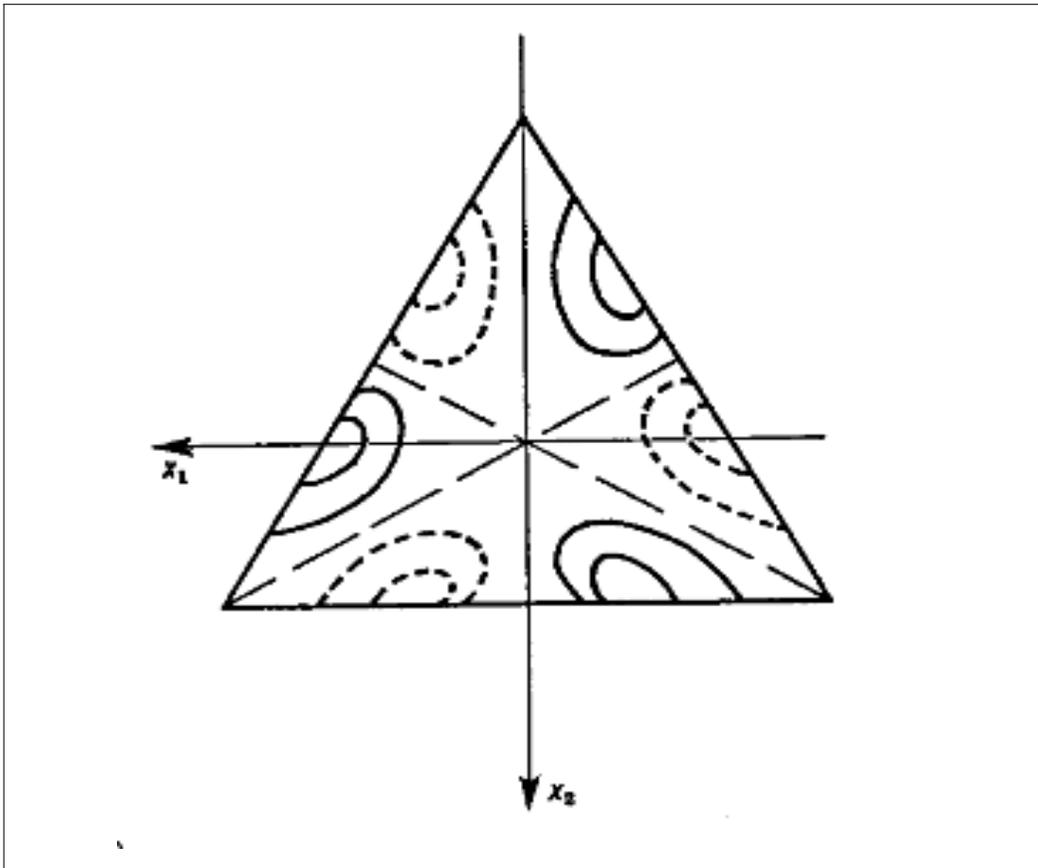


Figura 4. Le curve di livello per gli spostamenti da ingobbimento nella sezione a forma di triangolo equilatero

Programmi

Utilizzando *Mathematica* si illustra come analizzare in poche righe di comando la sezione a triangolo equilatero. Si inizia a fornire la funzione di Prandtl, nella sua forma generica, ossia in funzione di una costante k da determinare.

$$\phi = k (x_2 - a) (-\sqrt{3} x_1 + x_2 + 2 a) (\sqrt{3} x_1 + x_2 + 2 a);$$

Per ottenere il valore di k , si utilizza la (5), ottenendo:

$$\begin{aligned} \phi_{\text{prov}} &= \phi / k; \\ k &= \text{Simplify}[-2 G \theta / (D[\phi_{\text{prov}}, \{x_1, 2\}] + D[\phi_{\text{prov}}, \{x_2, 2\}])] \end{aligned}$$

$$-\frac{G \theta}{6 a}$$

A questo punto la funzione di Prandtl è completamente determinata, e si può calcolare lo stato tensionale, derivandola opportunamente secondo le (2). Si ha:

$$\sigma_{13} = \text{Simplify}[D[\phi, \mathbf{x}_2]]$$

$$\frac{G \theta (x_1^2 - x_2 (2a + x_2))}{2a}$$

$$\sigma_{23} = -\text{Simplify}[D[\phi, \mathbf{x}_1]]$$

$$-\frac{G \theta x_1 (-a + x_2)}{a}$$

Momento torcente e momento polare possono calcolarsi come già detto, ed il fattore di torsione ne segue immediatamente:

$$I_p = 2 \int_{-2a}^a \int_{-x_2/\sqrt{3}-2a/\sqrt{3}}^0 (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2$$

$$3\sqrt{3} a^4$$

$$M_t = -2 \frac{G \theta}{3a}$$

$$\int_{-2a}^a \int_{-x_2/\sqrt{3}-2a/\sqrt{3}}^0 (x_2 - a) (-\sqrt{3} x_1 + x_2 + 2a) (\sqrt{3} x_1 + x_2 + 2a) dx_1 dx_2$$

$$\frac{9}{5} \sqrt{3} a^4 G \theta$$

$$q = \text{Simplify}\left[\frac{G I_p \theta}{M_t}\right]$$

$$\frac{5}{3}$$

Grafici