

---

# Complementi 12 - Torsione nelle sezioni rettangolari

[Ultima revisione: 18 febbraio 2009]

In questa lezione si studia la sollecitazione di torsione nelle travi a sezione rettangolare, ricavando l'espressione della funzione di torsione sotto forma di sviluppo in serie.

---

## Il calcolo della funzione di torsione

Si consideri la sezione rettangolare di Figura 1, larga  $2a$  ed alta  $2b$ . Occorre ricercare una funzione  $\Psi$  che sia armonica sul rettangolo, e che soddisfi l'equazione (21) della Lezione 26 sui punti del contorno:

$$\left(-x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}\right) n_1 + \left(x_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}\right) n_2 = 0 \quad (1)$$

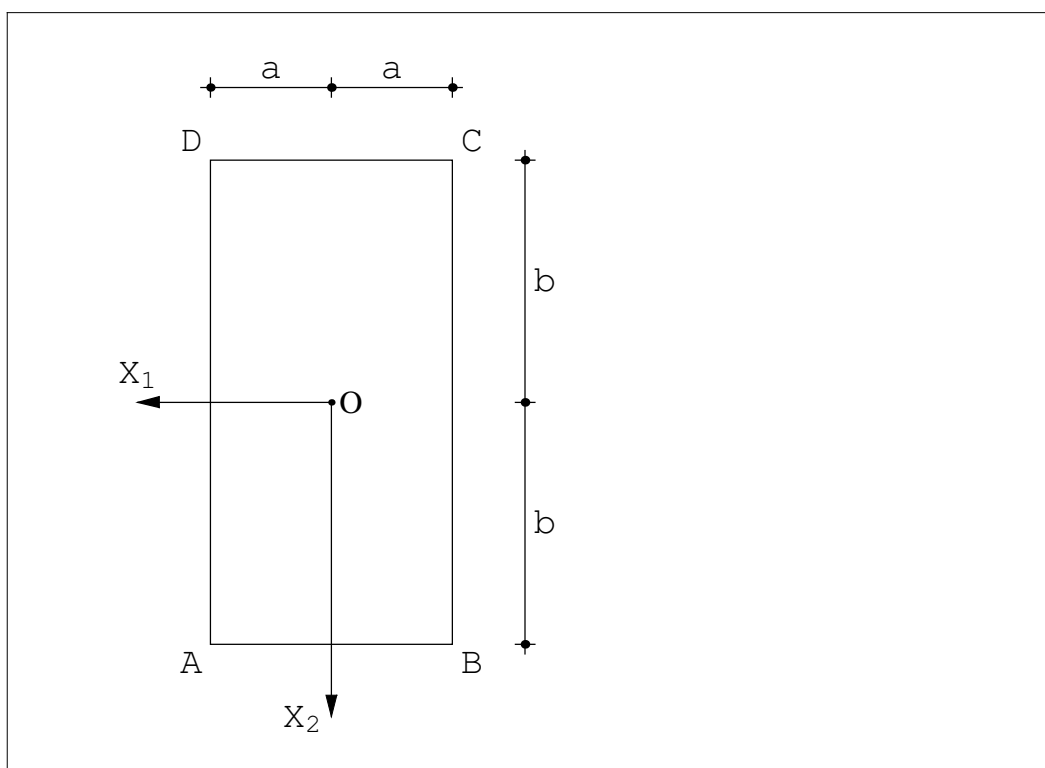


Figura 1 - La sezione rettangolare in studio

Piu' in dettaglio, lungo i due lati verticali, BC ed AD, i coseni direttori della normale uscente al contorno sono pari a  $(-1,0,0)$  e  $(1,0,0)$ , rispettivamente, mentre sui due lati orizzontali, DC ed AB, essi sono pari a  $(0,-1,0)$  e  $(0,1,0)$ . Ne segue che dovra' essere:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = x_2 \quad (2)$$

sui due lati verticali, dove  $x_1 = \pm a$ , e:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = -x_1 \quad (3)$$

sui due lati orizzontali, dove  $x_2 = \pm b$ . Introducendo quindi una funzione ausiliaria:

$$\Psi_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 - \Psi(x_1, x_2) \quad (4)$$

il problema di Dini-Neumann per la funzione  $\Psi(x_1, x_2)$  si tramuta nel problema per  $\Psi_1(x_1, x_2)$  consistente nel ricercare una funzione armonica su  $\Sigma$ :

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_2^2} = 0 \quad (5)$$

soddisfacente alle condizioni ai limiti:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} = x_2 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = 0 \quad (6)$$

sui due lati verticali, e:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} = x_1 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = 2x_1 \quad (7)$$

sui due lati orizzontali.

Si pone ora la soluzione della (5) nella forma di uno sviluppo in serie:

$$\Psi_1(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x_1) G_n(x_2) \quad (8)$$

dove ogni termine della serie soddisfa la condizione di armonicit , e quindi, per ogni  $n$ :

$$\frac{d^2 E_n}{dx_1^2} G_n(x_2) + E_n(x_1) \frac{d^2 G_n}{dx_2^2} = 0 \quad (9)$$

ossia anche, indicando con apici il segno di derivazione:

$$\frac{E_n''}{E_n} = -\frac{G_n''}{G_n} \quad (10)$$

Ora, il primo termine   funzione della sola variabile  $x_1$ , mentre il secondo termine   funzione della sola  $x_2$ . Ne segue che ambedue i membri di questa uguaglianza devono essere costanti, e questa costante puo' essere posta pari a  $-k_n^2$ . Ne seguono le due equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{d^2 E_n}{dx_1^2} + k_n^2 E_n(x_1) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{d^2 G_n}{dx_2^2} - k_n^2 G_n(x_2) = 0 \quad (12)$$

che possono essere facilmente risolte a fornire:

$$E_n(x_1) = c_1 \sin(k_n x_1) + c_2 \cos(k_n x_1) \quad (13)$$

$$G_n(x_2) = c_3 \sinh(k_n x_2) + c_4 \cosh(k_n x_2) \quad (14)$$

Le costanti di integrazione  $c_1, c_2, c_3$  e  $c_4$  verranno determinate in modo da soddisfare le condizioni ai limiti (6-7).

Si inizi dalla condizione (7) sui due lati orizzontali, che utilizzando l'espressione (8) si riscrive:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x_1) G_n'(x_2) = 2x_1 \quad (15)$$

Essa dovrà assumere lo stesso valore ai due lati, per  $x_2 = \pm b$ , e quindi la funzione  $G'(x_2)$  dovrà essere una funzione simmetrica, e quindi necessariamente  $c_4 = 0$ . Inoltre, dovendo essere:

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x_1) G_n'(b) = 2x_1 \quad (16)$$

la funzione  $E_n(x_1)$  dovrà essere antisimmetrica, e quindi anche  $c_2 = 0$ , per cui le (13-14) si semplificano in:

$$E_n(x_1) = c_1 \sin(k_n x_1) \quad (17)$$

$$G_n(x_2) = c_3 \sinh(k_n x_2) \quad (18)$$

Passando alle condizioni ai limiti (6) sui due lati verticali, si ha

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n'(x_1) G_n(x_2) = 0 \quad (19)$$

per  $x_1 = \pm a$ . La (19) sarà sicuramente soddisfatta se:

$$E_n'(\pm a) = 0 \quad (20)$$

ossia se:

$$c_1 k_n \cos(k_n a) = 0 \rightarrow k_n a = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (21)$$

e quindi la costante  $k_n$  può calcolarsi come:

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2a} \quad (22)$$

Le costanti  $c_1$  e  $c_3$  sono ancora arbitrarie. Si scriva allora la funzione di torsione  $\Psi_1$  come:

$$\Psi_1(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(k_n x_1) \sinh(k_n x_2) \quad (23)$$

in modo da dover determinare solo le costanti  $A_n$ . Si utilizzi a tal fine la condizione ai limiti (7) sui due lati orizzontali, che puo' risciversi come:

$$\left( \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} \right)_{x_2 = \pm b} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n k_n \text{Cosh}(k_n b) \text{Sin}(k_n x_1) = 2 x_1 \quad (24)$$

o, piu' semplicemente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \text{Sin}(k_n x_1) = 2 x_1 \quad (25)$$

avendo definito le nuove costanti:

$$B_n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n k_n \text{Cosh}(k_n b) \quad (26)$$

Si moltiplichino ora ambedue i membri della (25) per  $\text{Sin}(k_m x_1)$ , e si integri rispetto ad  $x_1$ , ottenendo:

$$\int_{-a}^a \sum_{n=0}^{\infty} B_n \text{Sin}(k_n x_1) \text{Sin}(k_m x_1) dx_1 = \int_{-a}^a 2 x_1 \text{Sin}(k_m x_1) dx_1 \quad (27)$$

Utilizzando poi le note formule di ortogonalita':

$$\int_{-a}^a \text{Sin}(k_n x_1) \text{Sin}(k_m x_1) dx_1 = \delta_{mn} a \quad (28)$$

con  $\delta_{mn}$  simbolo di Kronecker, si ha:

$$\int_{-a}^a 2 x_1 \text{Sin}(k_m x_1) dx_1 = B_m a \quad (29)$$

ed integrando:

$$B_m = \frac{(-1)^m 16 a}{\pi^2 (2m+1)^2} \quad (30)$$

da cui, per la (26):

$$A_n = \frac{(-1)^m 32 a^2}{\pi^3 (2n+1)^3 \text{Cosh}(k_n b)} \quad (31)$$

ed infine la funzione di torsione sara':

$$\Psi(x_1, x_2) = x_1 x_2 - \frac{32 a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \text{Sin}(k_n x_1) \text{Sinh}(k_n x_2)}{(2n+1)^3 \text{Cosh}(k_n b)} \quad (32)$$

Per futuri utilizzi, si fornisce la funzione di torsione in input di *Mathematica*:

$$\Psi = x_1 x_2 - \frac{32 a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \text{Sin}[k_n x_1] \text{Sinh}[k_n x_2]}{(2n+1)^3 \text{Cosh}[k_n b]}$$

$$x_1 x_2 - \frac{32 a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \text{Sech}[b k_n] \text{Sin}[k_n x_1] \text{Sinh}[k_n x_2]}{(1+2n)^3}}{\pi^3}$$

## Il fattore di torsione

Si inizi a calcolare il fattore di torsione  $q$ , secondo la formula (42) della Lezione 26:

$$q = \frac{I_p}{I_p - \mathcal{D}(\Psi)} \quad (33)$$

dove  $I_p$  e' il momento polare della sezione retta rispetto alla retta baricentrale, e l'integrale di Dirichlet e' fornito da:

$$\mathcal{D}(\Psi) = \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} x_1 \right) d\Sigma \quad (34)$$

Il numeratore della (33) e' facilmente calcolabile come:

$$I_p = \frac{4}{3} ab (a^2 + b^2) \quad (35)$$

e come confermato da Mathematica:

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2$$

$$\frac{4}{3} ab (a^2 + b^2)$$

mentre il denominatore potra' semplificarsi come segue:

$$J = I_p - \mathcal{D}(\Psi) = \int_{\Sigma} (x_1^2 + x_2^2 - x_2^2 + x_2 d_1 + x_1^2 - x_1 d_2) dx_1 dx_2 =$$

$$\int_{\Sigma} (2x_1^2 + x_2 d_1 - x_1 d_2) dx_1 dx_2 \quad (36)$$

con:

$$d_1 = \frac{32 a^2}{\pi^3} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \text{Sin}(k_n x_1) \text{Sinh}(k_n x_2)}{(2n+1)^3 \text{Cosh}(k_n b)} \right) =$$

$$\frac{32 a^2}{\pi^3} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k_n \text{Cos}(k_n x_1) \text{Sinh}(k_n x_2)}{(2n+1)^3 \text{Cosh}(k_n b)} \right) \quad (37)$$

$$d_2 = \frac{32 a^2}{\pi^3} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(k_n x_1) \sinh(k_n x_2)}{(2n+1)^3 \cosh(k_n b)} \right) =$$

$$\frac{32 a^2}{\pi^3} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k_n \sin(k_n x_1) \cosh(k_n x_2)}{(2n+1)^3 \cosh(k_n b)} \right) \quad (38)$$

Infine, e' possibile calcolare:

$$2 \int_{\Sigma} x_1^2 dx_1 dx_2 = \frac{8}{3} a^3 b \quad (39)$$

e quindi:

$$J = I_p - \mathcal{D}(\Psi) =$$

$$\frac{8}{3} a^3 b + \frac{32 a^2}{\pi^3} \int_{\Sigma} x_2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k_n \sin(k_n x_1) \cosh(k_n x_2)}{(2n+1)^3 \cosh(k_n b)} \right) -$$

$$x_1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k_n \sin(k_n x_1) \cosh(k_n x_2)}{(2n+1)^3 \cosh(k_n b)} \right) dx_1 dx_2 \quad (40)$$

Integrando si ha:

$$J =$$

$$I_p - \mathcal{D}(\Psi) = \frac{8}{3} a^3 b + \frac{32 a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4 (-1)^n b}{(1+2n)^3 k_n} - \frac{8 (-1)^n \tanh[b k_n]}{(1+2n)^3 k_n^2} \right) \quad (41)$$

Questi calcoli possono essere confermati da Mathematica, nel seguente modo:

Ed infatti, calcolando il singolo termine della serie (36) si ha:

$$ss = x_2 D \left[ \frac{(-1)^n \sin[k_n x_1] \sinh[k_n x_2]}{(2n+1)^3 \cosh[k_n b]}, x_1 \right] -$$

$$x_1 D \left[ \frac{(-1)^n \sin[k_n x_1] \sinh[k_n x_2]}{(2n+1)^3 \cosh[k_n b]}, x_2 \right]$$

$$- \frac{(-1)^n \cosh[k_n x_2] \operatorname{sech}[b k_n] \sin[k_n x_1] k_n x_1}{(1+2n)^3} +$$

$$\frac{(-1)^n \cos[k_n x_1] \operatorname{sech}[b k_n] \sinh[k_n x_2] k_n x_2}{(1+2n)^3}$$

ed integrando si ha:

$$tt = \int_{-a}^a \int_{-b}^b ss dx_2 dx_1$$

$$\frac{4 (-1)^n (b \sin[a k_n] k_n + (-2 \sin[a k_n] + a \cos[a k_n]) \tanh[b k_n])}{(1+2n)^3 k_n^2}$$

Ora pero', per la (21) si ha  $\cos(k_n a) = 0$  e  $\sin(k_n a) = 1$ , e quindi:

**tt = Simplify[tt /. {Cos[a k<sub>n</sub>] -> 0, Sin[a k<sub>n</sub>] -> 1}]**

$$\frac{4 (-1)^n (b k_n - 2 \operatorname{Tanh}[b k_n])}{(1 + 2n)^3 k_n^2}$$

da cui immediatamente la (41).

Utilizzando la (22) e semplificando si ottiene poi:

$$\begin{aligned} J &= I_p - \mathcal{D}(\Psi) = \\ &= \frac{8}{3} a^3 b + \frac{32 a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{8 (-1)^n a b}{(1 + 2n)^4 \pi} - \frac{32 a^2 (-1)^n \operatorname{Tanh}[b k_n]}{(1 + 2n)^5 \pi^2} \right) = \\ &= \frac{8}{3} a^3 b + \frac{256 a^3 b}{\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + 2n)^4} - \frac{1024 a^4}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{Tanh}[b k_n]}{(1 + 2n)^5} \end{aligned} \quad (42)$$

La prima serie e' facilmente calcolabile, ottenendo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + 2n)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad (43)$$

come confermato da Mathematica:

$$\begin{aligned} &\text{Sum}\left[\frac{1}{(1 + 2n)^4}, \{n, 0, \infty\}\right] \\ &= \frac{\pi^4}{96} \end{aligned}$$

In definitiva si ha:

$$\begin{aligned} J &= I_p - \mathcal{D}(\Psi) = \frac{16}{3} a^3 b - \frac{1024 a^4}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{Tanh}[b k_n]}{(1 + 2n)^5} = \\ &= \frac{16}{3} a^3 b \left( 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{Tanh}[b k_n]}{(1 + 2n)^5} \right) = K a^3 b \end{aligned} \quad (44)$$

e quindi il fattore di torsione e' pari a:

$$\varphi = \frac{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)}{4 \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{Tanh}[b k_n]}{(1 + 2n)^5}\right)} = \frac{1}{K_1} \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \quad (45)$$

avendo definito le quantita' ausiliarie:

$$K = K\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{16}{3} \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{Tanh}\left[\frac{b}{a} \frac{(2n+1)}{2} \pi\right]}{(1 + 2n)^5}\right) \quad (46)$$

$$K_1 = K_1 \left( \frac{a}{b} \right) = 4 \left( 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{Tanh} \left[ \frac{b}{a} \frac{(2n+1)}{2} \pi \right]}{(1+2n)^5} \right) \quad (47)$$

In tabella 1 sono riportati i valori di  $K$  e  $K_1$  per diversi rapporti geometrici  $b/a$ . In ciascun caso si sono calcolati 100 termini della serie. Si noti il valore limite per  $b/a$  che tende all'infinito, rappresentativo di una sezione rettangolare allungata.

b/a	1/2	1	1.5	2	10	100	1000	$\infty$
K	0.9697	2.27722	3.15083	3.6729	5	5.3	5.33	5.3333
K <sub>1</sub>	0.7273	1.70792	2.36313	2.75468	3.75	3.975	3.9975	4

Tabella 1 - Valori della costante  $K$  per il calcolo del fattore di torsione

Si noti infine che potrà' scriversi:

$$M_t = \frac{GI_p}{q} \theta' = GJ\theta' = KG\theta' a^3 b \quad (48)$$

## Lo stato tensionale

Le tensioni possono facilmente calcolarsi a partire dalle (43) della Lezione (26):

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= q \frac{M_t}{I_p} \left( -x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) = \frac{M_t}{J} \left( -x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) = \\ &= -\frac{M_t}{J} \frac{32 a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{Cos} (k_n x_1) \operatorname{Sinh} (k_n x_2)}{(2n+1)^3 \operatorname{Cosh} (k_n b)} k_n = \\ &= -\frac{M_t}{J} \frac{16 a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{Cos} (k_n x_1) \operatorname{Sinh} (k_n x_2)}{(2n+1)^2 \operatorname{Cosh} (k_n b)} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{23} &= q \frac{M_t}{I_p} \left( x_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) = \frac{M_t}{J} \left( x_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) = \\ &= \frac{M_t}{J} \left( 2 x_1 - \frac{16 a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{Sin} (k_n x_1) \operatorname{Cosh} (k_n x_2)}{(2n+1)^2 \operatorname{Cosh} (k_n b)} \right) \end{aligned} \quad (50)$$

### ■ La sezione quadrata

In Figura 2 e' riportato l'andamento della tensione tangenziale  $\tau = \sqrt{\sigma_{13} + \sigma_{23}}$  nel caso della sezione quadrata, mentre in Figura 3 e' riportato, sempre per sezione quadrata, l'andamento delle curve di livello delle stesse tensioni tangenziali. E' evidente dai grafici che il valore massimo delle tensioni si raggiunge nei punti di mezzera dei lati.

$$\sigma_{23} = \left( 2 x_1 - \frac{16 a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{20} \frac{(-1)^n \operatorname{Sin} \left[ \frac{(2n+1)}{2a} \pi x_1 \right] \operatorname{Cosh} \left[ \frac{(2n+1)}{2a} \pi x_2 \right]}{(2n+1)^2 \operatorname{Cosh} \left[ \frac{(2n+1)}{2a} \pi b \right]} \right) / .$$

{a -> 1, b -> 1};



$$\sigma_{13} = \left( \frac{16 a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{20} \frac{(-1)^n \operatorname{Cos} \left[ \frac{(2n+1)}{2a} \pi x_1 \right] \operatorname{Sinh} \left[ \frac{(2n+1)}{2a} \pi x_2 \right]}{(2n+1)^2 \operatorname{Cosh} \left[ \frac{(2n+1)}{2a} \pi b \right]} \right) /. \{a \rightarrow 1, b \rightarrow 1\};$$

```
Plot3D[Evaluate[Sqrt[σ132 + σ232]],
{x1, -1, 1}, {x2, -1, 1}, PlotRange -> All]
```

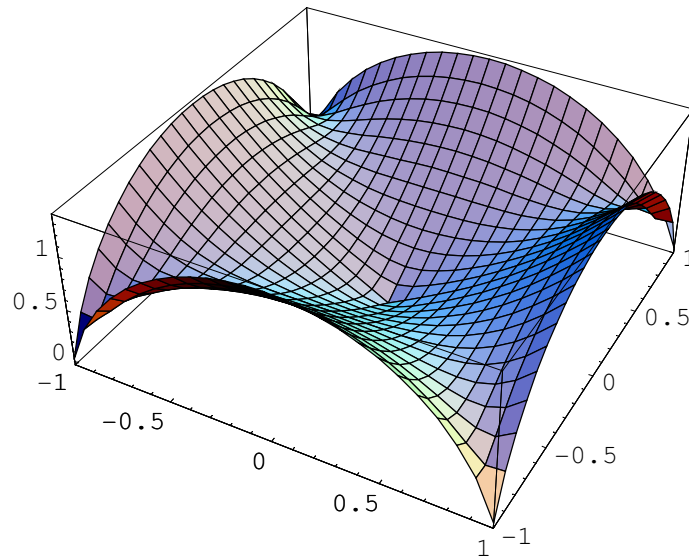


Figura 2 - Lo stato tensionale sulla sezione quadrata

```
ContourPlot[Evaluate[Sqrt[σ132 + σ232]],
{x1, -1, 1}, {x2, -1, 1}, PlotRange -> All]
```

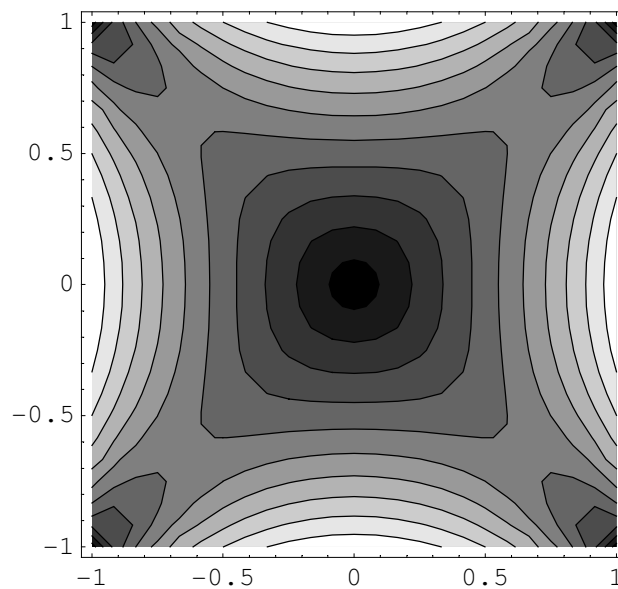


Figura 3 - Le linee di livello dello stato tensionale sulla sezione quadrata

## ■ La sezione rettangolare allungata

Nelle successive Figure 4 e 5 e' riportato il caso della sezione rettangolare allungata, con un'altezza pari a dieci volte la base. Si nota che le tensioni variano linearmente su quasi tutta la sezione, portando ad approssimare la funzione di torsione al semplice termine:

$$\Psi(x_1, x_2) = -x_1 x_2 \quad (51)$$

Inoltre, nel caso di sezione rettangolare allungata potra' porsi, in via approssimata:

$$J = I_p - \mathcal{D}(\Psi) = \frac{16}{3} a^3 b \left( 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{Tanh}[b k_n]}{(1+2n)^5} \right) = \quad (52)$$

$$\frac{16}{3} a^3 b \left( 1 - \frac{192 a \operatorname{Tanh}\left[\frac{b\pi}{2a}\right]}{b \pi^5} \right) \approx \frac{16}{3} a^3 b \left( 1 - 0.627 \frac{a}{b} \right)$$

ottenendo la formula approssimata per il calcolo del momento torcente:

$$M_t = \frac{GI_p}{q} \theta' = GJ\theta' = \frac{16}{3} G\theta' a^3 b \left( 1 - 0.627 \frac{a}{b} \right) \quad (53)$$

**Nota storico-bibliografica** - Queste deduzioni per la sezione rettangolare allungata sono contenute nella gia' citata classica memoria di De Saint-Venant sulla torsione dei prismi. Comunque lo stesso De Saint Venant osserva che a simili conclusioni era giunto Cauchy, in *Sur la torsion et les vibrations tournantes d'une verge rectangulaire*, Exercices de Mathematiques, 4, 47-64 (1829). Cfr. anche E. Benvenuto, La Scienza delle Costruzioni ed il suo sviluppo storico, Sansoni, 1981)

$$\sigma_{23} = \left( 2x_1 - \frac{16a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n \operatorname{Sin}\left[\frac{(2n+1)}{2a} \pi x_1\right] \operatorname{Cosh}\left[\frac{(2n+1)}{2a} \pi x_2\right]}{(2n+1)^2 \operatorname{Cosh}\left[\frac{(2n+1)}{2a} \pi b\right]} \right) / .$$

{a -> 1, b -> 10};

$$\sigma_{13} = \left( \frac{16a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n \operatorname{Cos}\left[\frac{(2n+1)}{2a} \pi x_1\right] \operatorname{Sinh}\left[\frac{(2n+1)}{2a} \pi x_2\right]}{(2n+1)^2 \operatorname{Cosh}\left[\frac{(2n+1)}{2a} \pi b\right]} \right) / . \{a -> 1, b -> 10\};$$

```
Plot3D[Evaluate[Sqrt[ $\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2$ ]], {x1, -1, 1},  
{x2, -10, 10}, PlotRange -> All, PlotPoints -> 50]
```

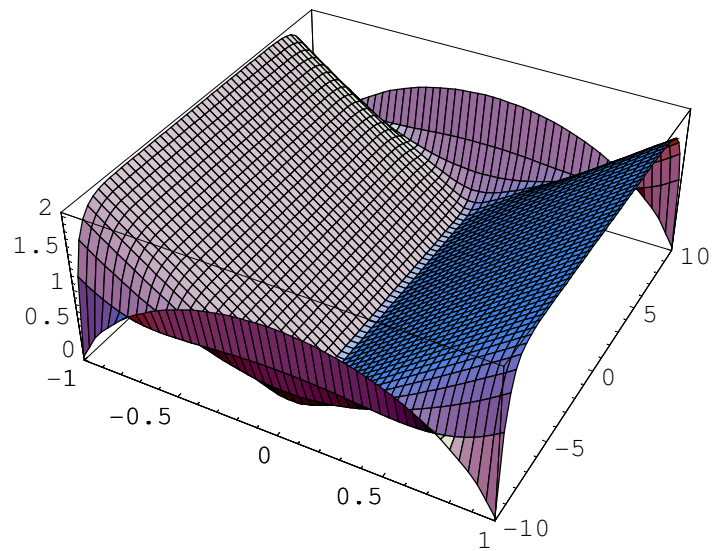


Figura 4 - Lo stato tensionale sulla sezione rettangolare allungata

```
ContourPlot[Evaluate[Sqrt[ $\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2$ ]],  
{x1, -1, 1}, {x2, -10, 10}, PlotRange -> All]
```

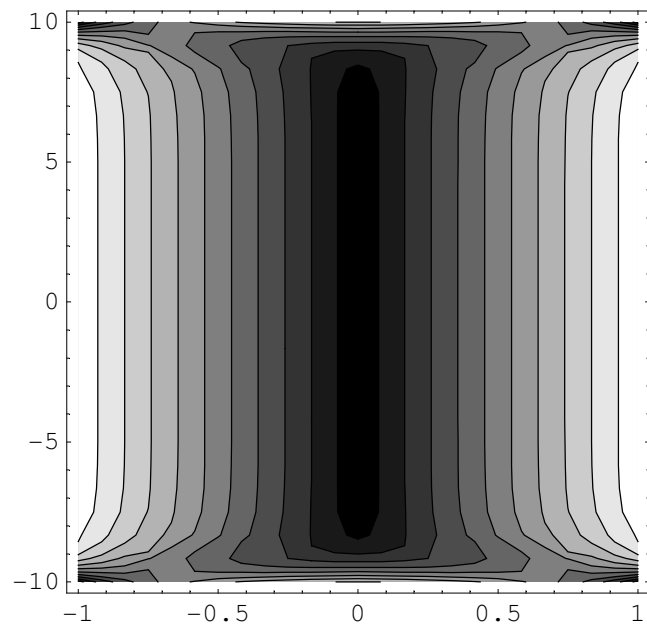


Figura 5 - Le curve di livello per lo stato tensionale sulla sezione rettangolare allungata

## Gli spostamenti da ingobbimento

Per disegnare gli spostamenti da ingobbimento si approssima la funzione di torsione ritenendo i primi dieci termini della serie. Poi si riporta il grafico tridimensionale dello spostamento  $u_3$  nel caso del quadrato, assieme alle curve di livello. Il caso del rettangolo allungato, riportato nelle due figure seguenti, mostra un andamento quasi indistinguibile da quello della sezione a forma ellittica di semiassi  $a$  e  $b$ .

$$\Psi = x_1 x_2 - \frac{32 a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n \operatorname{Sin}\left[\frac{(2n+1)}{2a} \pi x_1\right] \operatorname{Sinh}\left[\frac{(2n+1)}{2a} \pi x_2\right]}{(2n+1)^3 \operatorname{Cosh}\left[\frac{(2n+1)}{2a} \pi b\right]};$$

`Psiquadrato = Ψ /. {a -> 1, b -> 1};`

`Plot3D[Evaluate[Psiquadrato], {x1, -1, 1},  
{x2, -1, 1}, PlotRange -> All, PlotPoints -> 50]`

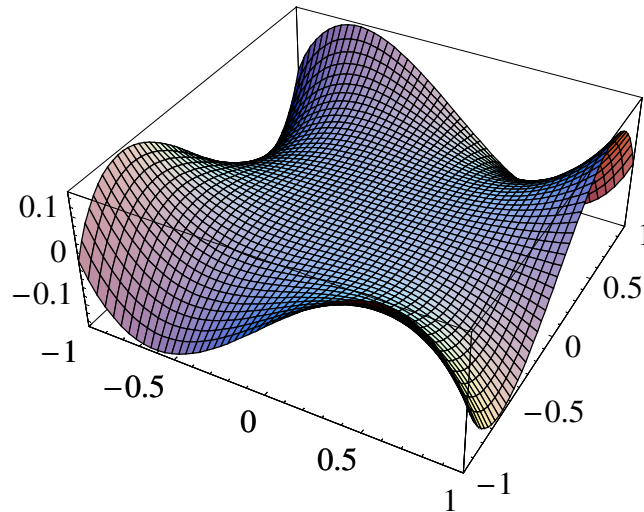


Figura 6 - Gli spostamenti da ingobbimento per la sezione quadrata

```
ContourPlot[Evaluate[Psiquadrato], {x1, -1, 1},  
{x2, -1, 1}, PlotRange -> All, PlotPoints -> 50]
```

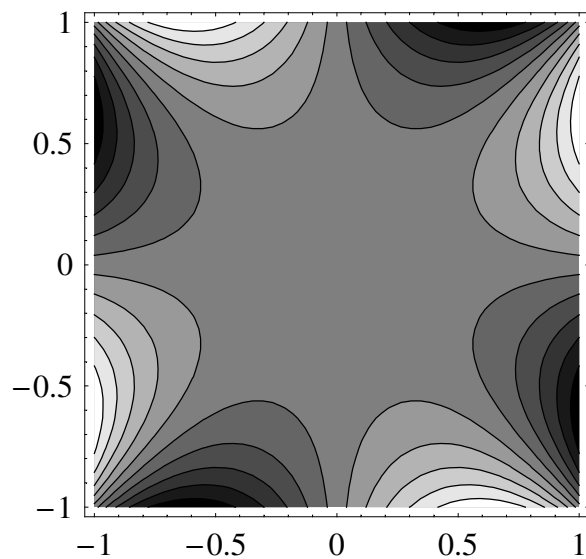


Figura 7 - Le curve di livello per gli spostamenti da ingobbimento per la sezione quadrata

```
Psirettangolo =  $\Psi$  /. {a -> 1, b -> 10};
```

```
Plot3D[Evaluate[Psirettangolo], {x1, -1, 1},  
{x2, -10, 10}, PlotRange -> All, PlotPoints -> 25]
```

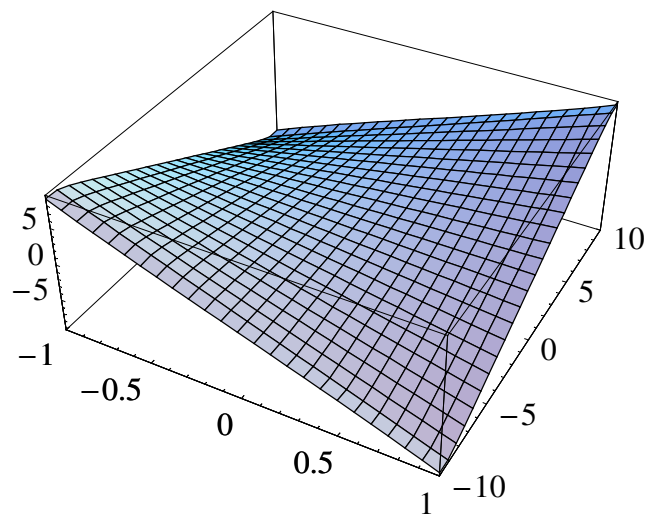


Figura 8 - Gli spostamenti da ingobbimento per la sezione rettangolare allungata

```
ContourPlot[Evaluate[Psirettangolo],  
{x1, -1, 1}, {x2, -10, 10}, PlotRange -> All]
```

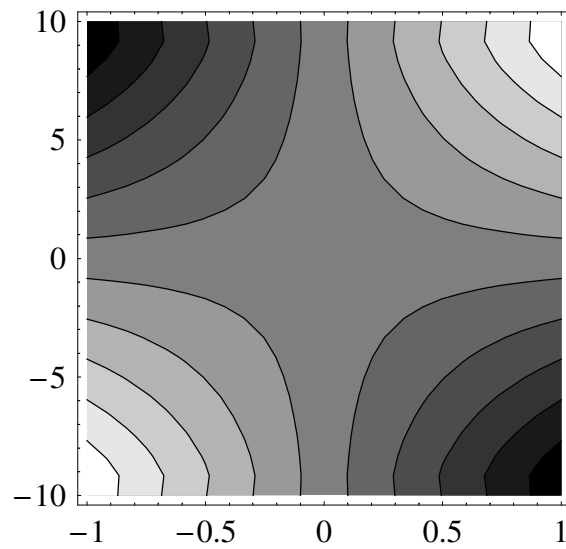


Figura 9 - Le curve di livello per gli spostamenti da ingobbimento per la sezione rettangolare allungata

## Grafici