Complementi 11 - Le travature reticolari iperstatiche

[Ultima revisione: 12 febbraio 2009]

In questa lezione si prosegue lo studio delle travature reticolari, affrontando il caso delle travature iperstatiche, in cui il numero delle caratteristiche della sollecitazione interna supera il numero di equazioni di equilibrio, e quindi non e' piu' possibile calcolare le c.s.i. utilizzando solo considerazioni di equilibrio. Occorrera' far ricorso, a somiglianza di quanto accade nella teoria del solido di Cauchy, alle equazioni che legano spostamenti a deformazioni, alle equazioni costitutive, ed alla condizioni di compatibilita'.
Il metodo di soluzione proposto e' dovuto ad S.R. Patnaik [Patnaik]

Le equazioni di base

Si consideri una travatura reticolare ad m aste ed N nodi, vincolata esternamente attraverso r vincoli semplici, e si supponga che essa sia i volte iperstatica, esternamente e/o internamente. Cio' significa che le incognite del problema, ossia gli M sforzi assiali e le R reazioni, sono in numero maggiore delle 2N equazioni di equilibrio negli N nodi. Se n denota il grado di liberta' cinematico della struttura, ossia il numero di possibili spostamenti nodali, n = 2N-R, allora e' immediato raealizzare che il grado di iperstaticita' e' dato da *i* = M-n.

Nel seguito si assumera' quale travatura di esempio la travatura di Figura 1, e per essa si scriveranno le equazioni a disposizione, per poi discutere della strategia per la loro possibile soluzione.

In questo caso, e' immediato realizzare che si e' in presenza di una struttura due volte iperstatica, una volta internamente ed una volta esternamente, essendo N = 4, M = 6, R = 4, n = 4. Si possono definire i seguenti vettori:

- il vettore **N** degli sforzi assiali nelle aste, di ordine M:

$$\mathbf{N}^T = (N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6) \qquad (1)$$

- il vettore **d** dei gradi di liberta', di ordine n:

$$\mathbf{d}^T = (d_1, d_2, d_3, d_4) = (u_x^{(2)}, u_y^{(2)}, u_x^{(3)}, u_y^{(3)}) \qquad (2)$$

il vettore **R** delle reazioni, di ordine R:

$$\mathbf{R}^T = (R_1, R_2, R_3, R_4) = (R_x^{(1)}, R_y^{(1)}, R_x^{(4)}, R_y^{(4)}) \qquad (3)$$

- il vettore **P** dei carichi nodali, di ordine n:

$$\mathbf{P}^T = (0, 0, 0, F) \qquad (4)$$

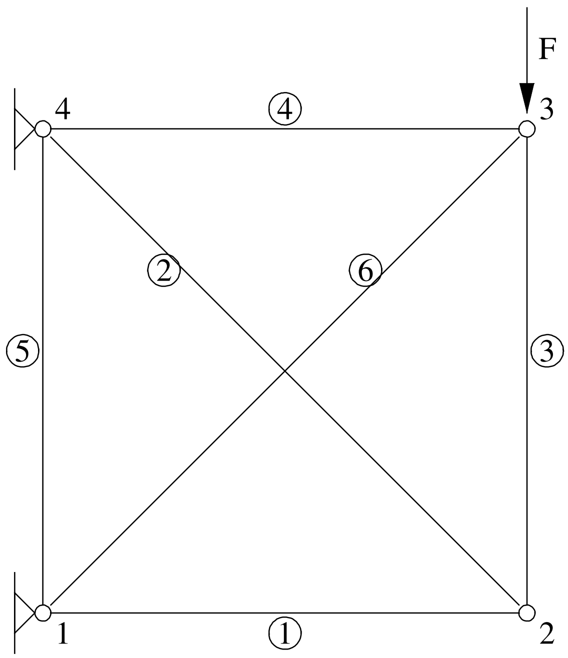

Figura 1 - Una travatura reticolare di esempio

■ Le equazioni di equilibrio

Il primo gruppo di equazioni e' costituito dalle *n* equazioni di equilibrio in corrispondenza dei nodi, senza considerare i gradi di liberta' soppressi dalle reazioni. Queste equazioni legano il vettore degli sforzi assiali al vettore dei carichi nodali, e puo' scriversi matricialmente come:

$$\mathbf{BN} = \mathbf{P} \tag{5}$$

Si noti subito che per una travatura iperstatica la matrice **B** risulta rettangolare "sdraiata", con n righe ed M colonne. Nel caso in esempio, occorre equilibrare i due nodi 2 e 3 rispetto alle traslazioni orizzontali e verticali, ottenendo quattro equazioni in sei incognite:

$$\begin{aligned}
-N_1 - N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \\
-N_3 - N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \\
-N_4 - N_6 \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \\
-N_3 - N_6 \frac{\sqrt{2}}{2} &= F
\end{aligned} \tag{6}$$

e quindi la matrice **B** e' fornita da:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Si osservi che la quinta colonna e' nulla, segnalando che l'asta cinque e' vincolata agli estremi, e potrebbe anche essere eliminata dall'analisi.

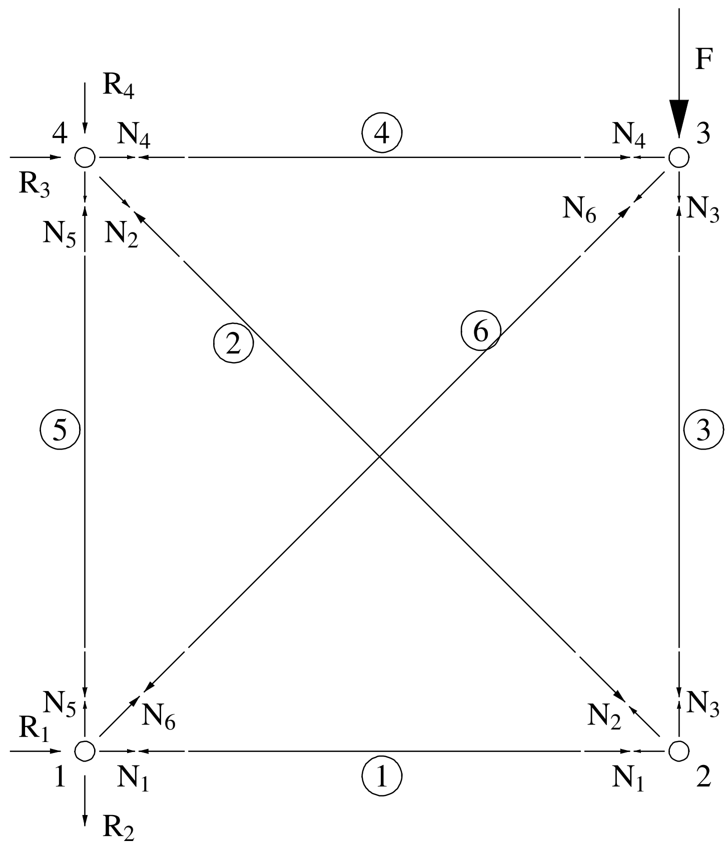

Figura 2 - Il diagramma per la scrittura delle equazioni di equilibrio

■ Le equazioni di congruenza

Le eqauzioni di congruenza, che legano gli allungamenti $\boldsymbol{\beta}$ delle singole aste agli spostamentui nodali **d**, sono del tutto analoghe a quelle illustrate per le travature isostatiche. Per ispezione diretta, oppure con cosiderazioni energetiche, si giunge a scrivere:

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{B}^T \mathbf{d} \qquad (8)$$

avendo definito il vettore $\boldsymbol{\beta}$ di ordine M, che contiene gli allungamenti Δl delle singole aste.

■ Le equazioni costitutive

Per scrivere le equazioni costitutive, che legano gli sforzi assiali N_i ai corrispondenti allungamenti β_i, si consideri che dovra' essere:

$$N_i = \sigma_i A_i \tag{9}$$

dove A_i e' l'area della sezione retta dell'ima asta, mentre σ_i e' la tensione normale agente su di essa. Per la legge di Hooke si ha anche:

$$N_i = \sigma_i A_i = E_i A_i e_i \tag{10}$$

dove E_i e' il modulo di Young del materiale di cui e' formata l'asta i-ma, ed e_i e' la deformazione nell'asta. Poiche' infine $e_i = \beta_i l_i$, ed l_i e' la lunghezza dell'asta i-ma, si ha infine:

$$\beta_i = \frac{N_i l_i}{E_i A_i} \tag{11}$$

Matricialmente, si potra' scrivere:

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{G}\mathbf{N} \tag{12}$$

dove **G** e' una matrice diagonale di ordine M, contenente lungo la diagonale i coefficienti di flessibilita':

$$G = \mathrm{diag}\left\{\frac{l_1}{E_1 A_1}, \frac{l_2}{E_2 A_2}, \ldots, \frac{l_M}{E_M A_M}\right\} \tag{13}$$

■ Le condizioni di compatibilita'

Analogamente alle condizioni di compatibilita' interna di De Saint-Venant, e' possibile scrivere anche in quest'ambito alcune condizioni cui gli allungamenti β_i devono sottostare. Per ottenerle, basta eliminare dalle M equazioni (8), gli n spostamenti nodali, scrivendo *i* equazioni negli allungamenti $\boldsymbol{\beta}$. Nel caso in esame si ha:

$$\begin{aligned} &\beta_1 - \sqrt{2}\,\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 - \sqrt{2}\,\beta_6 = 0 \\ &\beta_5 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Si noti che il comando *Eliminate*, in *Mathematica*, permette di calcolare automaticamente le condizioni di compatibilita'. Matricialmente, le (14) si scrivono:

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} \tag{15}$$

dove **C** e' una matrice rettangolare ad *i* righe ed M colonne.

Nota - Inserendo la (8) nella (15) si ottiene subito:

$$\mathbf{C}\mathbf{B}^T\,\mathbf{d} = \mathbf{0} \tag{16}$$

e quindi la matrice $\mathbf{CB}^T$ deve annullarsi:

$$\mathbf{C}\mathbf{B}^T = \mathbf{B}\mathbf{C}^T = \mathbf{0} \tag{17}$$

E' questa la relazione tra la matrice di equilibrio **B** e la matrice di compatibilita' **C**.

Il metodo integrale delle forze

Secondo questo approccio, le equazioni di compatibilita' sono espresse in termini di sforzi assiali, utilizzando le equazioni costitutive:

$$\mathbf{CGN} = \mathbf{0} \tag{18}$$

e poi le M equazioni nelle M incognite, costituite dalle equazioni di equilibrio e dalle (18) possono risolversi a calcolare gli sforzi assiali. Si noti l'analogia formale con l'approccio di Beltrami per ottenere le equazioni dell'equilibrio elastico in termini di tensione. Si ha, in definitiva:

$$\mathbf{SN} = \mathbf{Q} \tag{19}$$

avendo definito la matrice quadrata **S**, di ordine M:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{CG} \end{pmatrix} \tag{20}$$

ed il vettore esteso dei termini noti:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{21}$$

Calcolati gli sforzi assiali, e' possibile dedurre tensioni, deformazioni, allungamenti e spostamenti.

Nel caso della travatura in esame, si ipotizzi di poter scrivere:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{pmatrix} \tag{22}$$

sicche' le condizioni di compatibilita' si scrivono, in termini di sforzi assiali:

$$\begin{aligned} & N_1 - 2\sqrt{2}\, N_2 + N_3 + N_4 - 2\sqrt{2}\, N_6 = 0 \\ & N_5 = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

La matrice **S** e' quindi fornita da:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -2\sqrt{2} & 1 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

ed il sistema (20) si risolve a fornire gli sforzi assiali:

$$N^T = (-454.545,\ 642.824,\ -454.545,\ 545.455,\ 0.,\ -771.389) \qquad (25)$$

Graf1

Notebook *Mathematica*