

---

# Complementi 10 - Le travature reticolari isostatiche

[Ultima revisione: 12 febbraio 2009]

In questa lezione si analizza la prima classe strutturale di interesse, costituita da un assemblaggio di aste, collegate tra loro con nodi cerniera. In tal modo la struttura risulta soggetta solo a sforzi assiali, per cui e' possibile sfruttare i risultati del primo caso particolare di De saint-Venant.

Ci si limita inizialmente a considerare strutture isostatiche, in cui la scrittura delle equazioni di equilibrio e' sufficiente a calcolare le incognite statiche, ossia gli sforzi normali nelle aste e le reazioni vincolari. Nella prossima lezione si estendera' l'analisi alle strutture iperstatiche.

---

## Il grado di iperstaticita'

Si consideri un assemblaggio di  $M$  travi, o *aste*, collegate tra loro ed al suolo attraverso  $N$  cerniere, o *nodi*. Se tale struttura e' caricata da sole forze concentrate in corrispondenza dei nodi, allora nelle aste sorgeranno solo sforzi normali, mentre le altre caratteristiche della sollecitazione interna saranno nulle. In queste ipotesi, geometriche e di carico, parleremo di *travatura reticolare*.

### ■ Analisi cinematica

Si consideri l'insieme degli  $N$  nodi liberi: ciascuno di essi ha nel piano due gradi di liberta', e quindi l'insieme degli  $N$  nodi ha  $2N$  gradi di liberta' cinematici. L'introduzione di un'asta, che collega due nodi, introduce un vincolo semplice, e supponendo che le  $M$  aste siano disposte in modo da non generare vincoli superflui, la struttura costituita da  $N$  nodi connessi da  $M$  aste avra'  $2N-M$  gradi di liberta'. Se infine si aggiungono gli  $R$  vincoli esterni, la travatura reticolare avra'  $n = 2N-M-R$  gradi di liberta'. Se  $n \leq 0$ , la struttura e' cinematicamente determinata, mentre se  $n > 0$  la struttura e' labile. E' tuttavia opportuno distinguere labilita' esterne e labilita' interne, fornendo le seguenti:

**Def.** - Una travatura reticolare costituita da  $N$  nodi connessi in modo proprio da  $M$  aste si dice *internamente cinematicamente determinata* se  $2N-M \leq 3$ , si dice *internamente labile* se  $2N-M > 3$ .

**Def.** - Una travatura reticolare costituita da  $N$  nodi connessi da  $M$  aste si dice *esternamente cinematicamente determinata* se  $R \geq 3$ , si dice *esternamente labile* se  $R < 3$ .

La dizione "connessi in modo proprio" significa che l'introduzione di ciascuna asta abbassa di uno il grado di liberta' del sistema, sicche' alla fine si potranno definire  $M$  equazioni di vincolo linearmente indipendenti. In altri termini, si suppone che non vi siano aste inefficaci.

## ■ Analisi statica

Si consideri una travatura reticolare formata da  $M$  aste, vincolate al suolo da vincolo di complessiva molteplicità  $R$ , sicché il numero totale di incognite è costituito dagli  $M$  sforzi assiali nelle aste, e dalle  $R$  reazioni vincolari. Se la travatura possiede  $N$  nodi, per ciascuno di essi si possono scrivere due equazioni di equilibrio alla traslazione rispetto a due generici assi coordinati. Sorgono allora spontaneamente le seguenti:

**Def.** - Una travatura reticolare costituita da  $N$  nodi connessi in modo proprio da  $M$  aste si dice *internamente isostatica* se  $M-2N = 3$ , si dice *internamente iperstatica* se  $M-2N > 3$ , internamente labile se  $M-2N < 3$ .

**Def.** - Una travatura reticolare costituita da  $N$  nodi connessi da  $M$  aste si dice *esternamente isostatica* se  $S = 3$ , *esternamente iperstatica* se  $S > 3$ , *esternamente labile* se  $S < 3$ .

E' quindi evidente che possono esistere casi in cui la travatura sia contemporaneamente isostatica internamente, ed iperstatica esternamente, o qualsiasi altra combinazione.

## Il metodo delle forze per travature isostatiche

In genere, le incognite del problema strutturale per una travatura reticolare si possono dividere in due grandi gruppi:

- incognite del tipo "forza", ossia gli  $M$  sforzi assiali nelle aste, le  $R$  reazioni, e le  $M$  tensioni normali nelle aste
- incognite del tipo "spostamento", ossia i  $2N$  spostamenti dei nodi, le deformazioni delle aste, ed i corrispondenti allungamenti/accorciamenti.

Nel metodo delle forze per strutture internamente ed esternamente isostatiche, si scrivono e si risolvono le  $2N$  equazioni di equilibrio alla traslazione, ottenendo gli sforzi assiali e le reazioni. Poi, e solo se desiderate, si possono ottenere le tensioni, e le altre incognite del tipo "spostamento". Sforzi assiali e reazioni sono definite quindi "incognite primarie", le altre sono "incognite secondarie".

## ■ Un esempio semplice

Si consideri la travatura reticolare quadrata di Figura 1, a 4 nodi e 5 aste, vincolata esternamente da un carrello e da una cerniera, e soggetta ad una forza verticale in corrispondenza del nodo 3:

La struttura è esternamente isostatica, in quanto esistono tre reazioni, due orizzontali nei nodi 1 e 3, ed una verticale nel nodo 3, non concorrenti in un punto, ed è internamente isostatica in quanto  $2N-M=8-5=3$ . In altre parole, si possono scrivere otto equazioni di equilibrio nei cinque sforzi normali e nelle tre reazioni vincolari. Sostituendo ai vincoli le corrispondenti reazioni, positive se equiverse agli assi, ed evidenziando gli sforzi normali, positivi se di trazione, si ha il diagramma di forze di Figura 2, che permette l'immediata scrittura delle equazioni di equilibrio nei nodi:

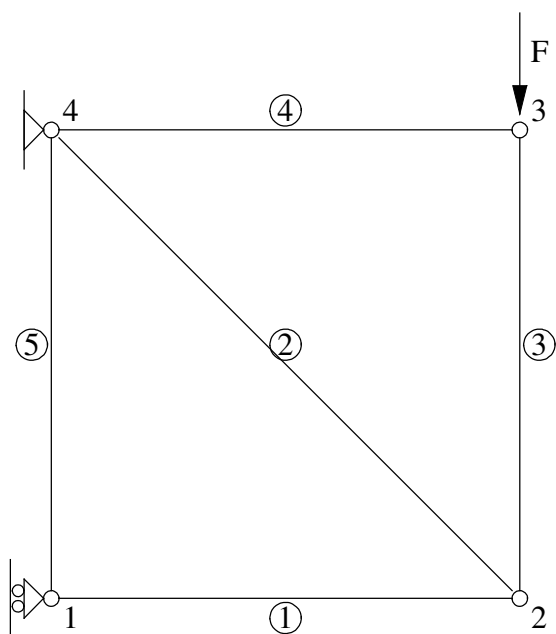


Figura 1 - Una travatura isostatica a 4 nodi e 5 aste

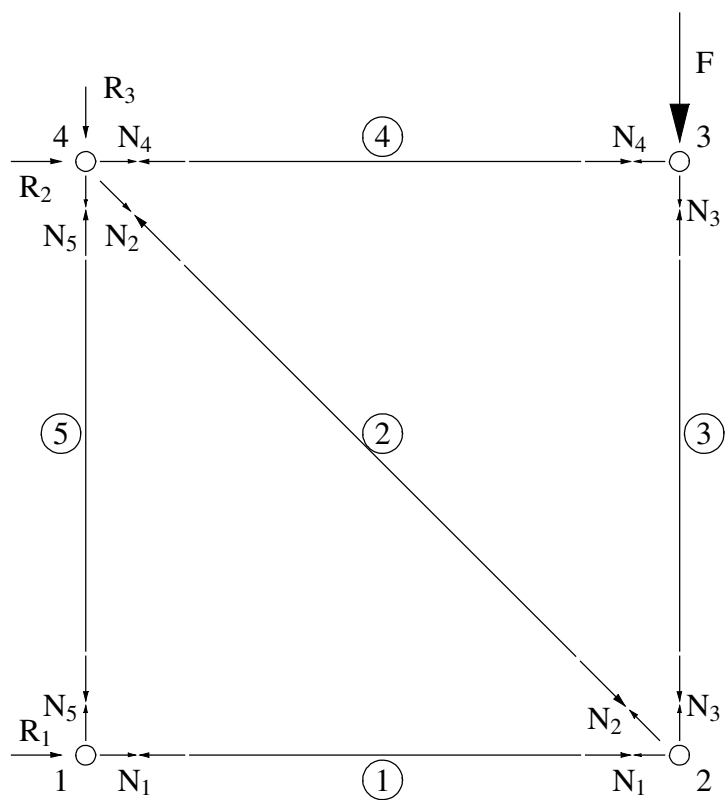


Figura 2 - Gli sforzi assiali e le reazioni

$$\begin{aligned}
N_1 + R_1 &= 0 \\
-N_5 &= 0 \\
-N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} N_2 &= 0 \\
-N_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} N_2 &= 0 \\
-N_4 &= 0 \\
N_3 + F &= 0 \\
R_2 + N_4 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_2 &= 0 \\
R_3 + N_5 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_2 &= 0
\end{aligned}$$

Si noti subito che queste equazioni possono partizionarsi in due gruppi, il primo costituito dalle equazioni 2-6, che fornisce gli sforzi assiali, ed il secondo, costituito dalle equazioni 1,7-8, che forniscono le reazioni. Matricialmente si scriverà:

$$\begin{aligned}
\mathbf{BN} &= \mathbf{P} \\
\mathbf{B}_R \mathbf{N} &= \mathbf{R}
\end{aligned} \tag{2}$$

avendo introdotto il vettore  $\mathbf{P}$  dei carichi nodali, di ordine  $2N-3=M$ :

$$\mathbf{P}^T = (0, 0, 0, 0, F) \tag{3}$$

il vettore incognito  $\mathbf{N}$  degli sforzi assiali nelle  $M$  aste:

$$\mathbf{N}^T = (N_1, N_2, N_3, N_4, N_5) \tag{4}$$

ed il vettore incognito  $\mathbf{R}$  delle 3 reazioni vincolari:

$$\mathbf{R}^T = (R_1, R_2, R_3) \tag{5}$$

La matrice  $\mathbf{B}$ , che lega gli sforzi normali alle forze esterne, è detta matrice di equilibrio, e per le strutture isostatiche essa è quadrata ed invertibile:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

La matrice  $\mathbf{B}_R$ , che lega le tre reazioni agli sforzi normali, è rettangolare, con tre righe ed  $M$  colonne:

$$\mathbf{B}_R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

La prima delle (2) può essere risolta a fornire gli sforzi assiali:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= -F \\
 N_2 &= \sqrt{2} F \\
 N_3 &= -F \\
 N_4 &= N_5 = 0
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Le aste 4 e 5 sono quindi scariche, le aste 1 e 3 sono compresse, ed il corrispondente sforzo assiale e' pari a  $-1$ , l'asta diagonale e' tesa, e soggetta ad uno sforzo assiale di trazione pari a  $\sqrt{2} F$ . Se successivamente si vogliono le reazioni, e' possibili utilizzare il secondo gruppo di equazioni, ottenendo:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= F \\
 R_2 &= -F \\
 R_3 &= -F
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

**Nota** - Le reazioni, in una travatura esternamente isostatica, possono essere calcolate direttamente, senza conoscere gli sforzi assiali nelle aste, scrivendo le tre equazioni di equilibrio dell'intera struttura. Nel caso in esame, scegliendo il nodo 1 come polo, si ha:

$$\begin{aligned}
 R_1 + R_2 &= 0 \\
 R_3 + F &= 0 \\
 F l + R_2 l &= 0
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

e quindi subito le (3).

#### ■ Il calcolo delle incognite secondarie

Dagli sforzi normali e' possibile dedurre le *tensioni normali* nelle aste, applicando la legge di Hooke. Se si suppone che le aste abbiano la stessa sezione, di area  $A$ , si ha:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{N_1}{A} = -\frac{F}{A} \\
 \sigma_2 &= \frac{N_2}{A} = \sqrt{2} \frac{F}{A} \\
 \sigma_3 &= \frac{N_3}{A} = -\frac{F}{A} \\
 \sigma_4 &= \sigma_5 = 0
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Si noti che si e' rinunciato al doppio pedice per denotare la tensione normale, utilizzando invece un unico pedice per indicare l'asta. Se poi  $E$  denota il modulo di Young, le deformazioni normali sono calcolabili come:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \frac{\sigma_1}{E} = -\frac{F}{EA} \\
 e_2 &= \frac{\sigma_2}{E} = \sqrt{2} \frac{F}{EA} \\
 e_3 &= \frac{\sigma_3}{E} = -\frac{F}{EA} \\
 e_4 &= e_5 = 0
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Gli allungamenti delle aste possono calcolarsi considerando che dovra' essere, per la generica asta:

$$e_i = \frac{l'_i - l_i}{l_i}
 \tag{13}$$

e quindi potranno definirsi gli allungamenti:

$$\beta_i = l_i' - l_i = e_i l_i \quad (14)$$

dove  $l_i$  e' la lunghezza indeformata dell'asta, ed  $l_i'$  e' la lunghezza deformata della stessa asta. Si ha quindi, se  $l$  denota il lato del quadrato:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= l_1 e_1 = - \frac{Fl}{EA} \\ \beta_2 &= l_2 e_2 = 2 \frac{Fl}{EA} \\ \beta_3 &= l_3 e_3 = - \frac{Fl}{EA} \\ \beta_4 &= \beta_5 = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Le aste 1 e 3 si accorciano, mentre l'asta 2 subisce un allungamento.

Infine, gli spostamenti dei nodi possono calcolarsi a partire dagli allungamenti, tenendo conto dei vincoli e delle convenzioni sui segni. Dalla Figura 3 si ha:

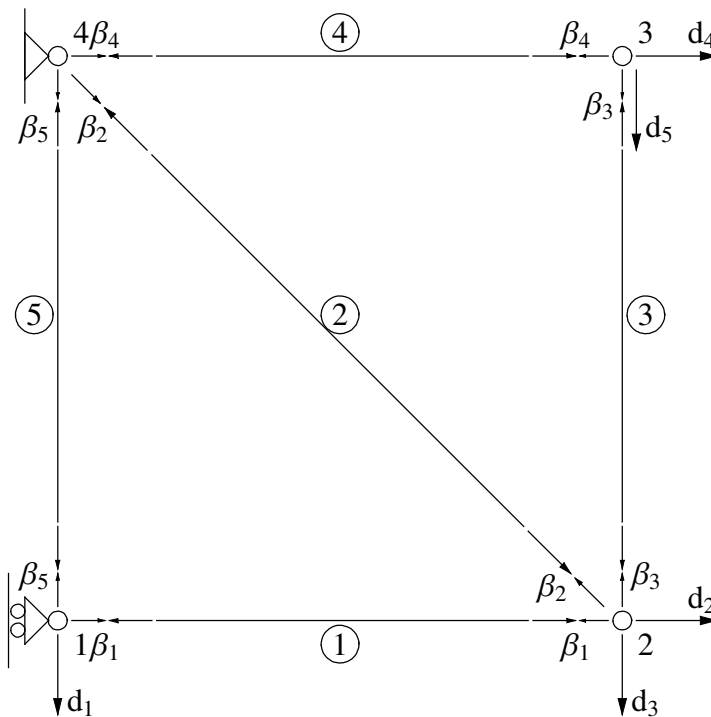


Figura 3 - Gli allungamenti delle aste e gli spostamenti nodali

$$\begin{aligned} \beta_1 &= d_2 \\ \beta_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} (d_2 + d_3) \\ \beta_3 &= d_3 - d_5 \\ \beta_4 &= d_4 \\ \beta_5 &= d_1 \end{aligned} \quad (16)$$

che matricialmente puo' scriversi:

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{D}\mathbf{d} \quad (17)$$

avendo introdotto il vettore noto  $\boldsymbol{\beta}$  degli  $M$  allungamenti nelle aste, ed il vettore incognito  $\mathbf{d}$  degli  $M$  spostamenti nodali incogniti:

$$\boldsymbol{\beta}^T = \left( -\frac{F1}{EA}, 2\frac{F1}{EA}, -\frac{F1}{EA}, 0, 0 \right) \quad (18)$$

$$\mathbf{d}^T = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) \quad (19)$$

La matrice  $\mathbf{D}$ , che collega gli allungamenti delle aste agli spostamenti nodali, e' quadrata ed invertibile:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

La soluzione delle (16) fornisce i richiesti spostamenti:

$$\begin{aligned} d_1 &= \beta_5 = 0 \\ d_2 &= \beta_1 = -\frac{F1}{EA} \\ d_3 &= \sqrt{2} \beta_2 - d_2 = 2\sqrt{2} \frac{F1}{EA} + \frac{F1}{EA} \\ d_4 &= \beta_4 = 0 \\ d_5 &= d_3 - \beta_3 = 2\sqrt{2} \frac{F1}{EA} + \frac{F1}{EA} - \frac{F1}{EA} = 2\sqrt{2} \frac{F1}{EA} \end{aligned} \quad (21)$$

**Nota** - Si osservi che  $\mathbf{D} = \mathbf{B}^T$ , come puo' dimostrarsi in generale uguagliando l'energia elastica del sistema al lavoro svolto dalle forze esterne:

$$\frac{1}{2} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{2} \mathbf{P}^T \mathbf{d} \quad (22)$$

ed introducendo le equazioni di equilibrio:

$$\frac{1}{2} \mathbf{P}^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{2} \mathbf{P}^T \mathbf{d} \quad (23)$$

da cui subito l'asserto.

## L'impostazione matriciale del metodo delle forze

Si consideri una travatura reticolare isostatica, costituita da  $N$  nodi ed  $M$  aste, e si introducano le seguenti quantita':

- il vettore  $\mathbf{d}$  degli spostamenti nodali, di ordine  $2N-3 = M$ :

$$\mathbf{d}^T = (d_1, \dots, d_M) \quad (24)$$

- il vettore  $\mathbf{N}$  degli sforzi assiali nelle aste, di ordine  $M$ :

$$\mathbf{N}^T = (N_1, \dots, N_M) \quad (25)$$

- il vettore  $\mathbf{P}$ , noto, delle forze esterne nei nodi, di ordine  $2N-3 = M$ :

$$\mathbf{P}^T = (F_1, \dots, F_M) \quad (26)$$

- il vettore  $\mathbf{R}$  delle reazioni, di ordine 3

$$\mathbf{R}^T = (R_1, R_2, R_3) \quad (27)$$

- il vettore  $\boldsymbol{\beta}$  degli allungamenti nelle aste, di ordine  $M$ :

$$\boldsymbol{\beta}^T = (\beta_1, \dots, \beta_M) \quad (28)$$

- il vettore  $\boldsymbol{\sigma}$  delle tensioni nelle aste, di ordine  $M$ :

$$\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_1, \dots, \sigma_M) \quad (29)$$

- il vettore  $\mathbf{e}$  delle deformazioni nelle aste, di ordine  $M$ :

$$\mathbf{e}^T = (e_1, \dots, e_M) \quad (30)$$

L'analisi strutturale evolve secondo i seguenti passi:

**Passo 1** - Scrittura delle  $2N-3$  equazioni di equilibrio nelle  $M$  incognite sforzi assiali nelle aste. La struttura e' isostatica, e quindi si potra' scrivere:

$$\mathbf{B}\mathbf{N} = \mathbf{P} \quad (31)$$

e la matrice di equilibrio  $\mathbf{B}$  e' quadrata. L'isostaticita' interna garantisce anche di poter risolvere le equazioni di equilibrio, ottenendo gli sforzi assiali:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{P} \quad (32)$$

**Passo 2** - Scrittura delle 3 equazioni di equilibrio che forniscono le reazioni esterne:

$$\mathbf{B}_R \mathbf{N} = \mathbf{R} \quad (33)$$

La seconda matrice di equilibrio  $\mathbf{B}_R$  e' rettangolare, con tre righe ed  $M$  colonne.

**Passo 3** - Calcolo delle tensioni  $\boldsymbol{\sigma}$  e delle deformazioni  $\mathbf{e}$  nelle singole aste

**Passo 4** - Calcolo degli allungamenti  $\boldsymbol{\beta}$  nelle singole aste

**Passo 5** - Scrittura delle equazioni che legano gli allungamenti relativi  $\boldsymbol{\beta}$  agli spostamenti nodali  $\mathbf{d}$ :

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{D}\mathbf{d} \quad (34)$$

Si e' dimostrato che la matrice  $\mathbf{D}$  e' la trasposta della matrice di equilibrio  $\mathbf{B}$ , sicche' si hanno infine gli spostamenti dei nodi come:

$$\mathbf{d} = \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{B}^{-T} \boldsymbol{\beta} \quad (35)$$



## Un esempio automatizzato

Si consideri ora la travatura reticolare di Figura 4, costituita da 7 nodi collegati tra loro da 11 aste, ed al suolo tramite una cerniera ed un appoggio. Sia essa soggetta al carico orizzontale nel nodo 7, di intensità  $P$ , e, con la geometria di Figura, si definisca il vettore delle lunghezze delle aste:

$$L^T = \left( a \tan \beta, \frac{a}{\cos \beta}, a, \frac{a}{\cos \alpha}, a \tan \alpha, a, a \tan \alpha, a, \frac{a}{\cos \alpha}, a, a \tan \alpha \right) \quad (36)$$

Si ipotizzi inoltre che le aste orizzontali e verticali abbiano area  $A$ , mentre le aste inclinate abbiano area doppia, definendo il vettore delle aree:

$$A^T = (A, 2A, A, 2A, A, A, A, A, 2A, A, A) \quad (37)$$

Infine, il materiale sia da considerare linearmente elastico, e definito dal modulo di Young  $E$ .

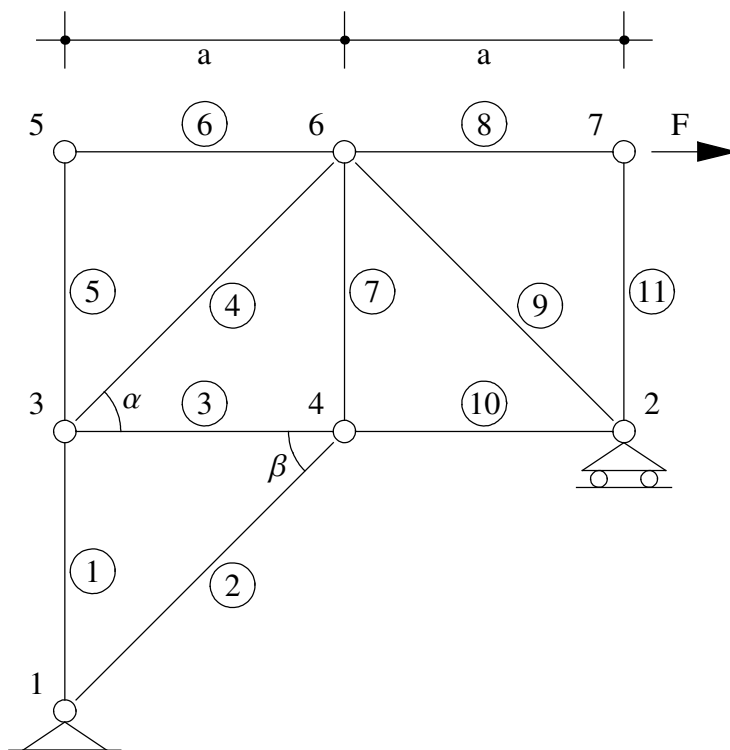


Figura 4 - Una travatura isostatica a 7 nodi ed 11 aste

Un banale computo dimostra che la travatura è isostatica sia internamente che esternamente. Le equazioni di equilibrio esterne si scrivono (cfr. Figura 5):

$$\begin{aligned}
 R_{1x} + F &= 0 \\
 R_{1y} + R_{2y} &= 0 \\
 F a (\tan\alpha + \tan\beta) + R_{2y} 2 a &= 0
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

e conducono alle reazioni:

$$\begin{aligned}
 R_{2y} &= -\frac{F}{2} (\tan\alpha + \tan\beta) \\
 R_{1y} &= \frac{F}{2} (\tan\alpha + \tan\beta) \\
 R_{1x} &= -F
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

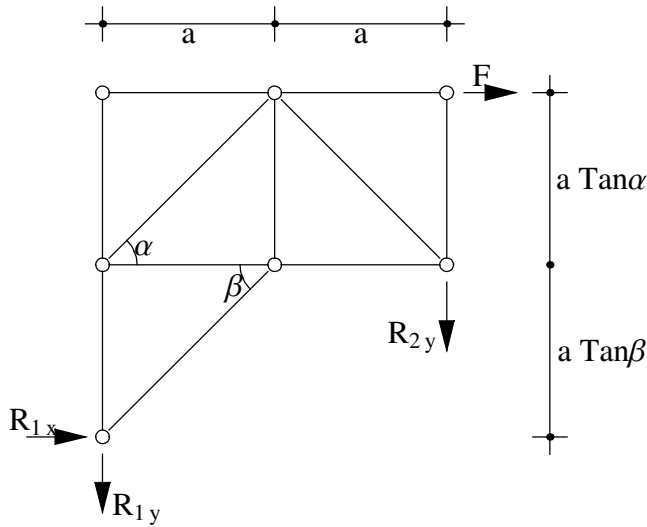


Figura 5 - Lo schema per il calcolo delle reazioni

Le equazioni di equilibrio nei nodi si scrivono invece:

$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos\alpha & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & -\sin\alpha & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\cos\beta & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & \sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\cos\alpha & 0 & -1 & 0 & 1 & \cos\alpha & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & \sin\alpha & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 N_1 \\
 N_2 \\
 N_3 \\
 N_4 \\
 N_5 \\
 N_6 \\
 N_7 \\
 N_8 \\
 N_9 \\
 N_{10} \\
 N_{11}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 F \\
 0
 \end{pmatrix}
 \tag{40}$$

e forniscono gli sforzi normali nelle aste:

$$\mathbf{N}^T = F \left( \frac{1}{2} (\tan[\alpha] - \tan[\beta]), \sec[\beta], \frac{1}{2} (-1 + \cot[\alpha] \tan[\beta]), \right. \\ \left. \frac{1}{2} (\sec[\alpha] - \csc[\alpha] \tan[\beta]), 0, 0, \tan[\beta], 1, \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\sec[\alpha] + \csc[\alpha] \tan[\beta]), \frac{1}{2} (1 + \cot[\alpha] \tan[\beta]), 0 \right) \quad (41)$$

Le corrispondenti tensioni si ottengono dividendo ciascuno sforzo normale per l'area dell'asta:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \left( \frac{F (\tan[\alpha] - \tan[\beta])}{2 A}, \frac{F \sec[\beta]}{2 A}, \frac{F (-1 + \cot[\alpha] \tan[\beta])}{2 A}, \right. \\ \left. \frac{F (\sec[\alpha] - \csc[\alpha] \tan[\beta])}{4 A}, 0, 0, \frac{F \tan[\beta]}{A}, \frac{F}{A}, \right. \\ \left. - \frac{F (\sec[\alpha] + \csc[\alpha] \tan[\beta])}{4 A}, \frac{F + F \cot[\alpha] \tan[\beta]}{2 A}, 0 \right) \quad (42)$$

mentre le deformazioni si ottengono applicando la legge di Hooke:

$$\mathbf{e}^T = \left( \frac{F (\tan[\alpha] - \tan[\beta])}{2 EA}, \frac{F \sec[\beta]}{2 EA}, \frac{F (-1 + \cot[\alpha] \tan[\beta])}{2 EA}, \right. \\ \left. \frac{F (\sec[\alpha] - \csc[\alpha] \tan[\beta])}{4 EA}, 0, 0, \frac{F \tan[\beta]}{EA}, \frac{F}{EA}, \right. \\ \left. - \frac{F (\sec[\alpha] + \csc[\alpha] \tan[\beta])}{4 EA}, \frac{F + F \cot[\alpha] \tan[\beta]}{2 EA}, 0 \right) \quad (43)$$

Gli allungamenti sono forniti dai prodotti delle deformazioni per le lunghezze delle aste:

$$\boldsymbol{\beta}^T = \left( \frac{a F (\tan[\alpha] - \tan[\beta]) \tan[\beta]}{2 EA}, \right. \\ \left. \frac{a F \sec[\beta]^2}{2 EA}, \frac{a F (-1 + \cot[\alpha] \tan[\beta])}{2 EA}, \right. \\ \left. \frac{a F \sec[\alpha] (\sec[\alpha] - \csc[\alpha] \tan[\beta])}{4 EA}, 0, 0, \frac{a F \tan[\alpha] \tan[\beta]}{EA}, \right. \\ \left. \frac{a F}{EA}, - \frac{a F \sec[\alpha] (\sec[\alpha] + \csc[\alpha] \tan[\beta])}{4 EA}, \right. \\ \left. \frac{a (F + F \cot[\alpha] \tan[\beta])}{2 EA}, 0 \right) \quad (44)$$

Infine, gli spostamenti nei nodi si ottengono applicando la (35):

$$d_1 = u_x^{(2)} = \\ - \frac{1}{4 EA} (a F (2 + 2 \sec[\beta]^3 + 2 \cot[\alpha] \tan[\beta] + 2 \cot[\alpha]^2 \tan[\beta]^2 + \\ \csc[\alpha]^2 \sec[\alpha] \tan[\beta]^2 + 3 \tan[\alpha] \tan[\beta]^2 + \tan[\beta]^3)) \\ d_2 = u_x^{(3)} = - \frac{1}{4 EA} (a F (2 + 2 \sec[\beta]^3 - 2 \cot[\alpha] \tan[\beta] + \\ 2 \cot[\alpha]^2 \tan[\beta]^2 + \csc[\alpha]^2 \sec[\alpha] \tan[\beta]^2 + \\ 3 \tan[\alpha] \tan[\beta]^2 + \tan[\beta]^3)) \\ d_3 = u_y^{(3)} = \frac{a F (\tan[\alpha] - \tan[\beta]) \tan[\beta]}{2 EA} \\ d_4 = u_x^{(4)} = - \frac{1}{4 EA} (a F (2 \sec[\beta]^3 + \\ \tan[\beta]^2 (2 \cot[\alpha]^2 + \csc[\alpha]^2 \sec[\alpha] + 3 \tan[\alpha] + \tan[\beta]))) \\ d_5 = \\ u_y^{(4)} =$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{a F \tan[\beta] (2 \cot[\alpha]^2 + \csc[\alpha]^2 \sec[\alpha] + 3 \tan[\alpha] + \tan[\beta])}{4 EA} \\
 d_6 = u_x^{(5)} &= - \frac{1}{4 EA} (a F \\
 & (2 + \sec[\alpha]^3 + 2 \sec[\beta]^3 + \tan[\alpha]^2 \tan[\beta] + 2 \cot[\alpha]^2 \tan[\beta]^2 + \\
 & \csc[\alpha]^2 \sec[\alpha] \tan[\beta]^2 + 2 \tan[\alpha] \tan[\beta]^2 + \tan[\beta]^3)) \\
 d_7 = u_y^{(5)} &= \frac{a F (\tan[\alpha] - \tan[\beta]) \tan[\beta]}{2 EA} \\
 d_8 = u_x^{(6)} &= - \frac{1}{4 EA} (a F \\
 & (2 + \sec[\alpha]^3 + 2 \sec[\beta]^3 + \tan[\alpha]^2 \tan[\beta] + 2 \cot[\alpha]^2 \tan[\beta]^2 + \\
 & \csc[\alpha]^2 \sec[\alpha] \tan[\beta]^2 + 2 \tan[\alpha] \tan[\beta]^2 + \tan[\beta]^3)) \\
 d_9 &= \\
 u_y^{(6)} &= \\
 & - \frac{a F \tan[\beta] (2 \cot[\alpha]^2 + \csc[\alpha]^2 \sec[\alpha] - \tan[\alpha] + \tan[\beta])}{4 EA} \\
 d_{10} = u_x^{(7)} &= \frac{1}{4 EA} \\
 & (a F (6 + \sec[\alpha]^3 + 2 \sec[\beta]^3 + \tan[\alpha]^2 \tan[\beta] + 2 \cot[\alpha]^2 \tan[\beta]^2 + \\
 & \csc[\alpha]^2 \sec[\alpha] \tan[\beta]^2 + 2 \tan[\alpha] \tan[\beta]^2 + \tan[\beta]^3)) \\
 d_{11} &= \\
 u_y^{(7)} &= \\
 & 0
 \end{aligned}$$

Se ad esempio le aste orizzontali sono lunghe 200 centimetri, se le diagonali sono inclinate di 45 gradi, se l'area delle aste orizzontali e verticali e' di 25 cm<sup>2</sup>, se il modulo di Young e' pari a 2.100.000 Kg/cm<sup>2</sup>, e se infine la forza e' pari a 1000 chilogrammi, allora gli spostamenti sono:

$$\begin{aligned}
 d_1 = u_x^{(2)} &= -0.017605 \\
 d_2 = u_x^{(3)} &= -0.0137955 \\
 d_3 = u_y^{(3)} &= 0 \\
 d_4 = u_x^{(4)} &= -0.0137955 \\
 d_5 = u_y^{(4)} &= -0.00840803 \\
 d_6 = u_x^{(5)} &= -0.018394 & (46) \\
 d_7 = u_y^{(5)} &= 0 \\
 d_8 = u_x^{(6)} &= -0.018394 \\
 d_9 = u_y^{(6)} &= 0.0045985 \\
 d_{10} = u_x^{(7)} &= 0.0222035 \\
 d_{11} = u_y^{(7)} &= 0
 \end{aligned}$$

## Graf1

### Notebook *Mathematica*