Complementi 1 - Le trasformazioni lineari

[Ultima revisione 20 dicembre 2008]

In questa Lezione si studiano le proprieta' delle trasformazioni lineari rappresentate da:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 \\ \xi_2 &= a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 \\ \xi_3 &= a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

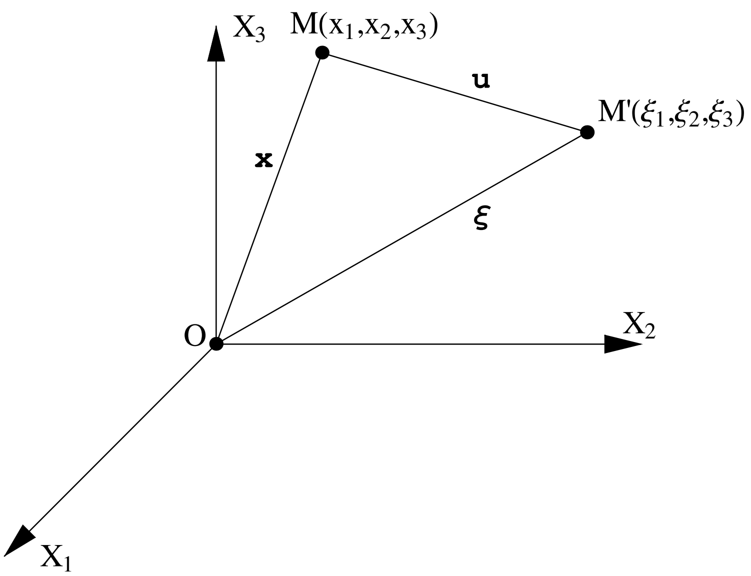
ossia, matricialmente, da:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{Ax} \qquad (2)$$

Le definizioni e le proprieta' dimostrate potranno essere utilizzate ovunque si incontri un sistema di equazioni come (1), ad esempio in analisi della tensione, sotto forma di equazioni di Cauchy-Poisson, o in analisi della deformazione, sotto forma di terna di spostamenti.

Somma e prodotto di trasformazioni lineari

Si consideri un sìstema di riferimento triortogonale (O, X_1, X_2, X_3) ed un punto M di coordinate (x_1, x_2, x_3). A seguito della trasformazione lineare (1), il punto M si porta in M', di coordinate (ξ_1, ξ_2, ξ_3). Come illustrato in figura 1, puo' scriversi anche:



$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'} \qquad (3)$$

oppure:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} + \mathbf{u} \tag{4}$$

Il vettore $\overrightarrow{\mathrm{MM'}}$, ossia **u**, e' il *vettore spostamento* del punto M, e le sue componenti sono fornite da:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \xi_1 - x_1 \\ \xi_2 - x_2 \\ \xi_3 - x_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Definizione 1 - La *trasformazione inversa* della (1), che fornisce le coordinate del punto M a partire dalle coordinate del punto M', e fornita:

$$x = A^{-1}\,\xi \tag{6}$$

Le conseguenze della natura lineare della trasformazione (1) sono evidenti:

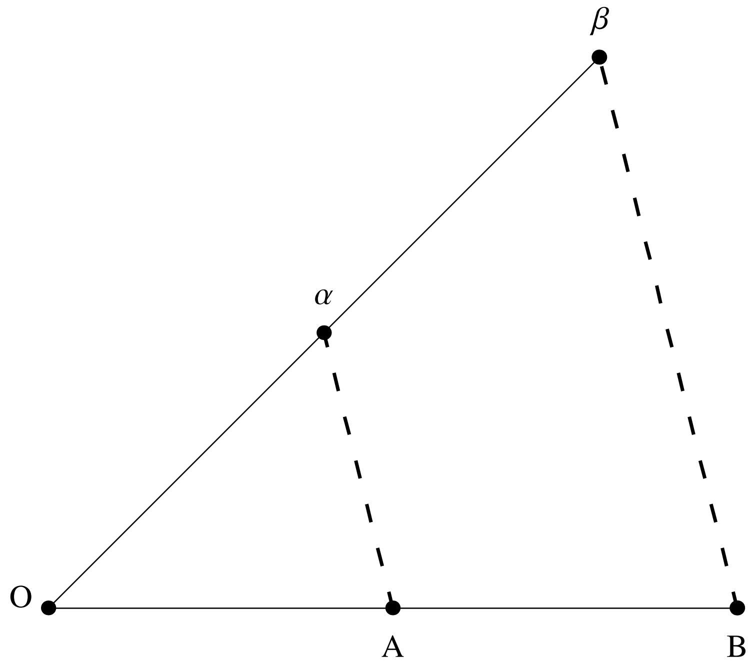
Se **x** ed **y** sono due vettori con origine in O, si ha:

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay} \tag{7}$$

e se n e' uno scalare, si ha:

$$\mathbf{A}\,(n\,\mathbf{x}) = n\,\mathbf{Ax} \tag{8}$$

Geometricamente, quest'ultima relazione implica che la (1) trasforma rette in rette, e che inoltre sussiste la proporzionalita', evidenziata in Figura 2:



$$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{O}\beta}{\mathrm{O}\alpha} \tag{9}$$

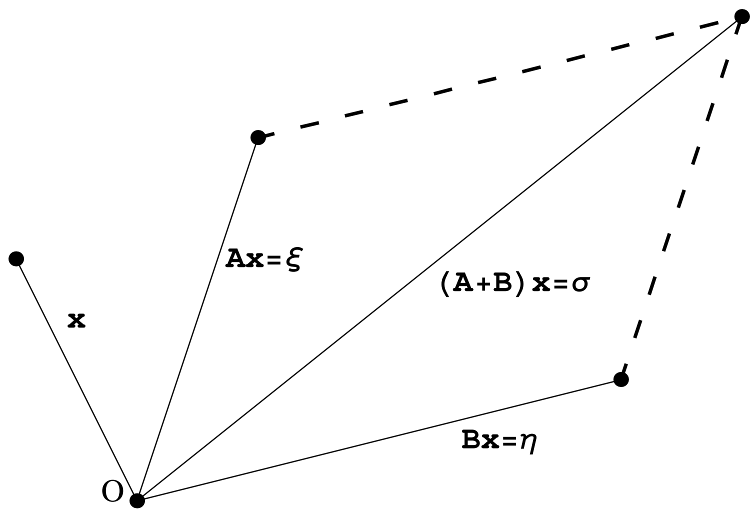
In genere, le relazioni di linearita' (7-8) implicano che un vettore viene trasformato in un vettore, un piano si trasforma in un piano, un parallelepipedo si trasforma in un parallelepipedo.

Definizione 2 - Date le due trasformazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{Bx} &= \eta \end{aligned} \tag{10}$$

si definisce *trasformazione somma* la trasformazione retta dalla matrice **C** = **A**+**B**:

$$\mathbf{Cx} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{x} = \sigma = \xi + \eta \tag{11}$$



Definizione 3 - Siano date due trasformazioni lineari, rette dalle due matrici **A** e **B**. La prima trasformazione porta il vettore x in ξ:

$$\xi = \mathbf{Ax} \tag{12}$$

la seconda porta $\boldsymbol{\xi}$ in $\boldsymbol{\eta}$:

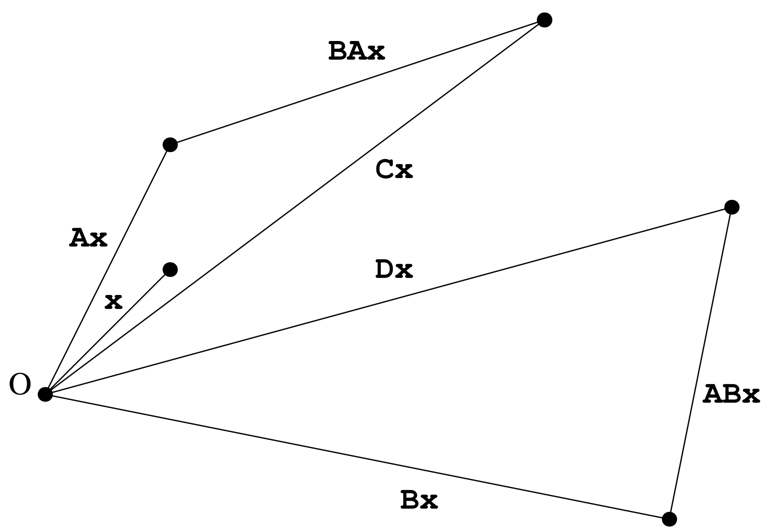
$$\eta = \mathbf{B}\xi \tag{13}$$

Si definisce trasformazione prodotto la trasformazione, retta dalla matrice **C** = **BA**, la trasformazione che porta **x** in $\boldsymbol{\eta}$:

$$\eta = \mathbf{B}\xi = \mathbf{BAx} = \mathbf{Cx} \tag{14}$$

Dato che il prodotto tra matrici non gode della proprieta' commutativa, la trasformazione prodotto retta dalla matrice **D** = **AB** porta il vettore x in un altro vettore $\boldsymbol{\sigma}$, diverso da η, come evidenziato dalla Figura:

$$\sigma = \mathbf{ABx} \neq \mathbf{BAx} = \eta \tag{15}$$



Definizione 4 - Una trasformazione lineare $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ si dice piccola se la matrice $\mathbf{A} \approx \mathbf{I}$, ossia se si puo' porre:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \epsilon\boldsymbol{\alpha} \qquad (16)$$

ed $\epsilon \ll 1$.

E' possibile dimostrare che il prodotto tra due piccole trasformazioni A e B e' commutativo. Ed infatti si ha:

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{I} + \epsilon\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{I} + \epsilon\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{I} + \epsilon\boldsymbol{\alpha} + \epsilon\boldsymbol{\beta} + \epsilon^2\,\boldsymbol{\alpha\beta} \approx \mathbf{I} + \epsilon\boldsymbol{\alpha} + \epsilon\boldsymbol{\beta} \qquad (17)$$

$$\mathbf{BA} = (\mathbf{I} + \epsilon\boldsymbol{\beta})(\mathbf{I} + \epsilon\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{I} + \epsilon\boldsymbol{\beta} + \epsilon\boldsymbol{\beta} + \epsilon^2\,\boldsymbol{\beta\alpha} \approx \mathbf{I} + \epsilon\boldsymbol{\alpha} + \epsilon\boldsymbol{\beta} \qquad (18)$$

Direzioni e Piani Coniugati, Direzioni e Piani Principali

Definizione 5 - Si consideri un corpo B, che per effetto di una trasformazione lineare si porta in una diversa configurazione B'. Poiche' la trasformazione e' lineare, una retta d ed un piano P in B si trasformano in una retta δ ed un piano Π in B'. Se δ e Π sono ortogonali tra loro, allora la retta d ed il piano P si dicono *coniugati*.

Definizione 6 - Si consideri un corpo B, che per effetto di una trasformazione lineare si porta in una diversa configurazione B'. Se una retta d ed un piano P in B sono ortogonali tra loro, e si trasformano in una retta δ ed un piano Π ancora ortogonali tra loro, allora la retta d si dice una *direzione principale*, ed il piano P si dice un *piano principale*

Si consideri ora l'insieme dei punti di B' che giacciono su una sfera di raggio R:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = R^2 \qquad (19)$$

Prima della trasformazione, i punti della sfera avevano coordinate (x_1, x_2, x_3) soddisfacenti l'equazione:

$$(a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3)^2 + (a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3)^2 + (a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3)^2 = R^2 \qquad (20)$$

E' questa l'equazione di un ellissoide, detto *ellissoide caratteristico*. E' evidente, attese le proprieta' della sfera, che ogni raggio vettore dell'ellissoide e' coniugato al piano tangente all'ellissoide nel punto di intersezione tra il raggio vettore e l'ellissoide stesso. Inoltre, i tre assi principali dell'ellissoide ed i piani tangenti all'ellissoide nei punti di intersezione tra gli assi principali e l'ellissoide sono direzioni principali e piani principali, rispettivamente.
Ne segue la classificazione:

1.caso generale: i tre assi principali sono diversi tra loto, ed esistono tre direzioni principali

2.ellissoide di rivoluzione: due assi principali sono uguali, tutti gli assi dell'ellissoide ortogonali all'asse di rivoluzione sono direzioni principali, e tutti i piani paralleli all'asse di rivoluzione sono piani principali

3.l'ellissoide degenera in una sfera: i tre assi principali sono uguali, tutti i raggi e tutti i piani tangenti sono assi e piani principali

Trasformazioni ortogonali

Si consideri ora una trasformazione $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ tale che la lunghezza del vettore trasformato $\boldsymbol{\xi}$ sia uguale alla lunghezza del vettore originario $\mathbf{x}$, sicche' si ha:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \tag{21}$$

ossia:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = & (a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3)^2 + \\ & (a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3)^2 + (a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3)^2 \end{aligned} \tag{22}$$

e svolgendo i quadrati:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = & (a_{11}^2\, x_1^2 + a_{12}^2\, x_2^2 + a_{13}^2\, x_3^2 + \\ & 2\, a_{11}\, a_{12}\, x_1\, x_2 + 2\, a_{11}\, a_{13}\, x_1\, x_3 + 2\, a_{12}\, a_{13}\, x_2\, x_3) + \\ & (a_{21}^2\, x_1^2 + a_{22}^2\, x_2^2 + a_{23}^2\, x_3^2 + 2\, a_{21}\, a_{22}\, x_1\, x_2 + 2\, a_{21}\, a_{23}\, x_1\, x_3 + \\ & 2\, a_{22}\, a_{23}\, x_2\, x_3) + (a_{31}^2\, x_1^2 + a_{32}^2\, x_2^2 + a_{33}^2\, x_3^2 + \\ & 2\, a_{31}\, a_{32}\, x_1\, x_2 + 2\, a_{31}\, a_{33}\, x_1\, x_3 + 2\, a_{32}\, a_{33}\, x_2\, x_3) \end{aligned} \tag{23}$$

Uguagliando a zero i coefficienti delle $x_i\, x_j$ si hanno le equazioni:

$$\begin{aligned} & a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1 \\ & a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1 \\ & a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 \\ & a_{11}\, a_{12} + a_{21}\, a_{22} + a_{31}\, a_{32} = 0 \\ & a_{11}\, a_{13} + a_{21}\, a_{23} + a_{31}\, a_{33} = 0 \\ & a_{12}\, a_{13} + a_{22}\, a_{23} + a_{32}\, a_{33} = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

equivalenti alla singola condizione matriciale:

$$\mathbf{A}^T\, \mathbf{A} = \mathbf{I} \tag{25}$$

o, equivalentemente:

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \tag{26}$$

Inoltre, dalla (25) si ha:

$$\det(\mathbf{A}^T)\, \det(\mathbf{A}) = 1 \tag{27}$$

e quindi:

$$\det(\mathbf{A}) = \pm 1 \tag{28}$$

Si giustifica allora la seguente:

Definizione 7 - Una trasformazione $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ per cui $A^T = A^{-1}$ si dira' *trasformazione ortogonale*. Se poi det(**A**) = 1, la trasformazione si dira' di *rotazione*, mentre se det(A) = -1, la trasformazione si dira' di *riflessione*.

Cambiamento di riferimento

Assegnata la terna di riferimento (O, X_1, X_2, X_3) , si consideri una trasformazione lineare $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, che trasforma il vettore $\overrightarrow{OM}$ nel vettore $\overrightarrow{OM}'$. Se la terna di riferimento ruota, portandosi nella posizione (O, X_1', X_2', X_3'), la *stessa* trasformazione lineare si scrivera' $\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{A}'\mathbf{x}'$, dove:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} ; \quad \boldsymbol{\xi}' = \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \xi_3' \end{pmatrix} \tag{29}$$

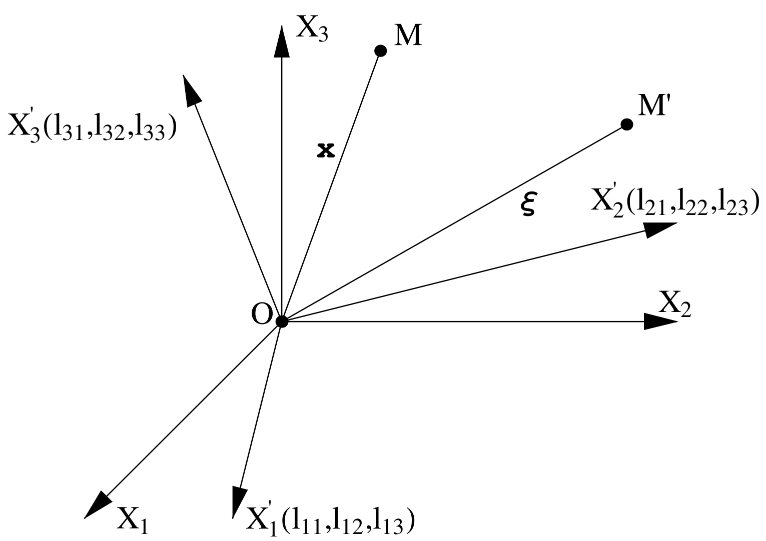
rappresentano i vettori $\overrightarrow{OM}$ ed $\overrightarrow{OM'}$ nel sistema di riferimento ruotato. Ne segue che le componenti x_i' rispetto al sistema di riferimento ruotato, possono esprimersi in funzione delle componenti x_i rispetto al sistema di riferimento d'origine, scrivendo:

$$\begin{aligned} x_1' &= l_{11}\, x_1 + l_{12}\, x_2 + l_{13}\, x_3 \\ x_2' &= l_{21}\, x_1 + l_{22}\, x_2 + l_{23}\, x_3 \\ x_3' &= l_{31}\, x_1 + l_{32}\, x_2 + l_{33}\, x_3 \end{aligned} \qquad (30)$$

dove (l_{11}, l_{12}, l_{13}) sono i coseni direttori dell'asse OX_1' rispetto al sistema di riferimento originario, (l_{21}, l_{22}, l_{23}) sono i coseni direttori dell'asse OX_2' , ed infine (l_{31}, l_{32}, l_{33}) sono i coseni direttori dell'asse OX_3'. Matricialmente, le relazioni precedenti si scrivono:

$$\mathbf{x'} = \mathbf{L\, x} \qquad (31)$$

La matrice **L**, contenente in riga i coseni direttori dei nuovi assi rispetto ai vecchi, e' una matrice ortogonale, con inversa pari alla trasposta, e sia $\mathbf{M} = \boldsymbol{L}^{-1}$.



Analogamente alla (31), puo' scriversi:

$$\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{L}\, \boldsymbol{\xi} \qquad (32)$$

e quindi la trasformazione $\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{A'x'}$ potra' anche scriversi:

$$\mathbf{L}\, \boldsymbol{\xi} = \mathbf{A'\, Lx} \qquad (33)$$

e premoltiplicando per $\boldsymbol{L}^{-1}$ si ottiene infine:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{L}^{-1}\, \mathbf{A'\, Lx} \qquad (34)$$

da cui si deduce $\mathbf{A} = \boldsymbol{L}^{-1}\, \boldsymbol{A}'\, \boldsymbol{L}$, o anche:

$$\mathbf{A'} = \mathbf{LAL}^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\, \mathbf{AM} \qquad (35)$$

Si e' ricavata in tal modo la legge di variazione della matrice **A** che regge la trasformazione lineare in studio, al variare del sistema di riferimento. Si noti che **A** ed **A**' hanno lo stesso determinante, attesa l'ortogonalita' della matrice **L** dei coseni direttori.

Autovalori ed autovettori

Si consideri la trasfromazione lineare $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, che trasforma il vettore $\mathbf{x}$ nel vettore $\boldsymbol{\xi}$, e si voglia conoscere quali sono i vettori $\mathbf{x}$ che si trasformano in vettori $\boldsymbol{\xi}$ ad essi proporzionali. Se λ e' la costante di proporzionalita', occorre imporre che sia:

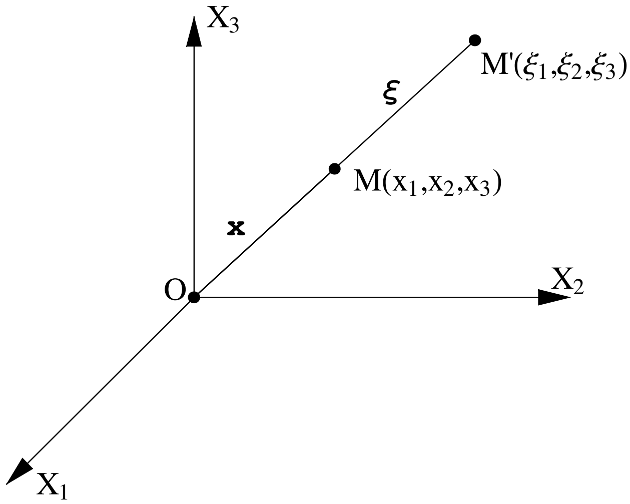
$$\boldsymbol{\xi} = \lambda\mathbf{x} \tag{36}$$

Si vogliono quindi ricercare i vettori $\mathbf{x}$ per cui:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{37}$$

o anche:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{38}$$



Per esteso si puo' quindi scrivere il sistema lineare ed omogeneo di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{aligned}(a_{11} - \lambda)\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 &= 0\\ a_{21}\, x_1 + (a_{22} - \lambda)\, x_2 + a_{23}\, x_3 &= 0\\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + (a_{33} - \lambda)\, x_3 &= 0\end{aligned} \tag{39}$$

A parte la soluzione banale, esisteranno soluzioni non nulle solo se il determinante dei coefficienti e' nullo. Imponendo quindi che il determinante sia nullo, si giunge ad una equazione cubica in λ, detta equazione caratteristica della matrice $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}&-\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\,\lambda^2 -\\ &\quad (a_{11}\, a_{22} + a_{22}\, a_{33} + a_{33}\, a_{11} - a_{12}\, a_{21} - a_{23}\, a_{32} - a_{31}\, a_{13})\,\lambda +\\ &\quad (a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} -\\ &\qquad a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31}) = 0\end{aligned} \tag{40}$$

Tale equazione ammette tre soluzioni λ_1, λ_2 e λ_3, reali o complesse coniugate, possibilmente di molteplicita' maggiore di uno, dette *autovalori* di $\mathbf{A}$. In corrispondenza di λ_1, il sistema (39) diviene:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_1)\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 &= 0 \\ a_{21}\, x_1 + (a_{22} - \lambda_1)\, x_2 + a_{23}\, x_3 &= 0 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + (a_{33} - \lambda_1)\, x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{41}$$

a determinante nullo, e quindi le tre equazioni non sono linearmente indipendenti. Ne segue che la soluzione:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} \tag{42}$$

e' definita a meno di una o piu' costanti moltiplicative. Ammettendo per ora che gli autovalori siano distinti, possono ottenersi altre due soluzioni in corrispondenza degli altri due autovalori:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}; \; \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} \tag{43}$$

I tre vettori $\boldsymbol{x}^{(1)}$, $\boldsymbol{x}^{(2)}$ ed $\boldsymbol{x}^{(3)}$, di cui almeno uno reale, si dicono *autovettori* della matrice **A**, e le loro direzioni si dicono, per ovvi motivi, *direzioni invarianti*. La costante moltiplicativa puo' essere utilizzata per normalizzare l'autovettore, imponendo ad esempio che la sua componente massima sia unitaria, o - piu' frequentemente - che la sua lunghezza sia unitaria:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)\,2} + x_2^{(1)\,2} + x_3^{(1)\,2} &= 1 \\ x_1^{(2)\,2} + x_2^{(2)\,2} + x_3^{(2)\,2} &= 1 \\ x_1^{(3)\,2} + x_2^{(3)\,2} + x_3^{(3)\,2} &= 1 \end{aligned} \tag{44}$$

■ Proprieta' delle autosoluzioni

Definizione 8 - Si consideri la trasformazione lineare $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{Ax}$, e si supponga che gli autovalori di **A** siano distinti. La matrice **M**, costruita inserendo gli autovettori in colonna si dice *matrice modale*:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} \\ x_3^{(1)} & x_3^{(2)} & x_3^{(3)} \end{pmatrix} \tag{45}$$

La matrice diagonale **Λ**, costruita inserendo gli autovalori sulla diagonale principale si dice *matrice spettrale*:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{46}$$

Si noti che i tre sistemi del tipo (41) possono conglobarsi in una singola equazione matriciale:

$$\mathbf{AM} = \mathbf{M\Lambda} \tag{47}$$

da subito:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{AM} \tag{48}$$

La (48) esprime la cosiddetta *diagonalizzazione* della matrice **A**. Piu' in generale, si fornisce la seguente:

Definizione 9 - Due matrici **A** e **B** si dicono *simili* se esse sono legate attraverso la seguente relazione:

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{AS} \tag{49}$$

con **S** matrice non singolare.

Si puo' subito osservare che due matrici simili hanno gli stessi autovalori, in quanto l'equazione caratteristica di due matrici simili e' unica:

$$\begin{aligned}&\det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}) = \\ &\det(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}-\lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{S}^{-1})\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\det(\mathbf{S}) = \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\end{aligned} \tag{50}$$

Prop.1- Gli autovettori di una matrice **A** sono ortogonali agli autovettori della trasposta di **A**

Dim. - Si consideri la trasposta della matrice **A**, che ovviamente ha gli stessi autovalori della matrice **A**, e sia **N** la sua matrice modale, sicche', cfr.(47):

$$\mathbf{A}^T\mathbf{N} = \mathbf{N}\mathbf{\Lambda} \tag{51}$$

e trasponendo:

$$\mathbf{N}^T\mathbf{A} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{N}^T \tag{52}$$

Postmoltiplicando per **M** si ottiene:

$$\mathbf{N}^T\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{N}^T\mathbf{M} \tag{53}$$

Partendo dalla (47) e premoltiplicando per N^T si ottiene invece:

$$\mathbf{N}^T\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{N}^T\mathbf{M}\mathbf{\Lambda} \tag{54}$$

Ne segue che il prodotto tra N^T ed **M** e' una matrice diagonale, e possono sempre normalizzarsi gli autovettori in modo che sia:

$$\mathbf{N}^T\mathbf{M} = \mathbf{I} \tag{55}$$

Quindi, gli autovettori di una matrice **A** e della sua trasposta sono ortogonali tra loro.

Dalla Proposizione 1 segue subito la:

Prop.2- Gli autovettori di una matrice **A** simmetrica sono ortogonali

Ed infatti se **A** e' simmetrica, ne segue **N** = **M**, e quindi la (55) diviene:

$$\mathbf{M}^T\mathbf{M} = \mathbf{I} \tag{56}$$

E' anche possibile dimostrare che:

Prop.3- Gli autovalori di una matrice **A** simmetrica sono reali

Dim. - Sia λ_1 un autovalore della matrice **A**, ed x_1 il corrispondente autovettore. Se λ_1 fosse complesso, mentre gli elementi di **A** sono reali, anche x_1 dovrebbe essere complesso. Se $\bar{\lambda}_1$ ed $\bar{x}_1$ sono le corrispondenti quantita' complesse coniugate, si potra' scrivere:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1 \tag{57}$$

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_1 = \bar{\lambda}_1\bar{\mathbf{x}}_1 \tag{58}$$

Premoltiplicando la prima per $\bar{x}_1^T$ e la seconda per x_1^T si ottiene:

$$\bar{\mathbf{x}}_1^T\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda_1\bar{\mathbf{x}}_1^T\mathbf{x}_1 \tag{59}$$

$$\mathbf{x}_1^T\,\mathbf{A}\,\bar{\mathbf{x}}_1 = \bar{\lambda}_1\,\mathbf{x}_1^T\,\bar{\mathbf{x}}_1 \tag{60}$$

Trasponendo quest'ultima relazione si ha:

$$\bar{\mathbf{x}}_1^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}_1 = \bar{\lambda}_1\,\bar{\mathbf{x}}_1^T\,\mathbf{x}_1 \tag{61}$$

e sottraendo le (61) e (59) si giunge a scrivere:

$$\left(\bar{\lambda}_1 - \lambda_1\right)\,\bar{\mathbf{x}}_1^T\,\mathbf{x}_1 \tag{62}$$

Infine, poiche' $\bar{x}_1^T\ x_1^T$ e' costituito da somme di quantita' positive, dovra' necessariamente essere $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1$, e quindi l'autovalore e' reale.

Invarianti di una trasformazione lineare

Si consideri una equazione di grado n in λ, del tipo:

$$-\lambda^n + c_{n-1}\,\lambda^{n-1} + c_{n-2}\,\lambda^{n-2} + \ldots + c_1\,\lambda + c_0 = 0 \tag{63}$$

e siano λ_1, λ_2 … λ_n le sue n radici. Dalla teoria delle equazioni algebriche, e' noto che e' possibile esprimere i coefficienti c_i in funzione delle radici. Piu' precisamente, il coefficiente c_{n-1} e' pari alla somma delle radici:

$$c_{n-1} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \tag{64}$$

il coefficiente c_{n-2} e' la somma dei prodotti delle radici, a due a due, cambiato di segno:

$$c_{n-2} = -\left(\lambda_1\,\lambda_2 + \lambda_1\,\lambda_3 + \ldots + \lambda_1\,\lambda_n + \lambda_2\,\lambda_3 + \ldots + \lambda_2\,\lambda_n + \ldots\lambda_{n-1}\,\lambda_n\right) \tag{65}$$

il coefficiente c_{n-3} e' la somma dei prodotti delle radici, a tre a tre, e cosi' via, fino al termine costante c_0, che e' pari al prodotto delle radici, se n e' dispari, oppure al prodotto delle radici cambiato di segno, se n e' pari.

Nel caso dell'equazione secolare considerata, $n = 3$, e conviene scrivere:

$$-\lambda^3 + I_1\,\lambda^2 - I_2\,\lambda + I_3 = 0 \tag{66}$$

con:

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(a_{11} + a_{22} + a_{33}\right) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2 &= a_{11}\,a_{22} + a_{22}\,a_{33} + a_{33}\,a_{11} - a_{12}\,a_{21} - a_{23}\,a_{32} - a_{31}\,a_{13} = \\ &\quad \lambda_1\,\lambda_2 + \lambda_1\,\lambda_3 + \lambda_2\,\lambda_3 \\ I_3 &= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - \\ &\quad a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} = \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3 \end{aligned} \tag{67}$$

Poiche' il loro valore non varia al ruotare del sistema di riferimento, I_1, I_2 ed I_3 si chiamano invarianti (lineare, quadratico e cubico) della trasformazione lineare.

Grafici