9 - Geometria delle aree

- **[A.a. 2013 - 2014 : ultima revisione 14 gennaio 2014]**

In questa esercitazione si applicano le definizioni di baricentro, momento statico, momento d'inerzia, etc. ad alcuni esempi di interesse pratico. Si parte dallo studio di sistemi ad aree concentrate, per poi passare ad analizzare aree distribuite a geometria complessa, che possano riguardarsi come l'unione di aree a geometria piu' semplice. In sostanza, si applicano i risultati ricavati per le sezioni rettangolari, triangolari, circolari ed ellittiche, assieme alla proprieta' distributiva dei momenti statici e dei momenti di inerzia:

Assegnate N aree $A_1, A_2, \ldots A_n$, il momento statico dell'unione di queste aree e' la somma dei momenti statici delle singole aree, ed analoga proprieta' vale per i momenti del secondo ordine:

$$S\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=1}^{N} S\,(A_i) \tag{1}$$

$$I\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=1}^{N} I\,(A_i) \tag{2}$$

Esercizio n.1: i sistemi ad aree concentrate

Si consideri un sistema di N aree concentrate Σ_i, identificate dalle loro coordinate x_1 ed x_2 in un generico sistema di riferimento. L'area totale A del sistema e' la somma delle aree parziali:

$$A = \sum_{i=1}^{N} A_i \tag{3}$$

Per definizione, il momento statico di un tale sistema e' un vettore definito da:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_2 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} A_i\, x_{1\,i} \\ \sum_{i=1}^{N} A_i\, x_{2\,i} \end{pmatrix} \tag{4}$$

dove S_i e' il momento statico rispetto all'asse x_i.
La matrice dei momenti di inerzia si definisce come :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{22} & I_{12} \\ I_{12} & I_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} A_i\, x_{1\,i}^2 & \sum_{i=1}^{N} A_i\, x_{1\,i}\, x_{2\,i} \\ \sum_{i=1}^{N} A_i\, x_{1\,i}\, x_{2\,i} & \sum_{i=1}^{N} A_i\, x_{2\,i}^2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

dove I_{11} e' il momento di inerzia rispetto all'asse x_1, I_{22} e' il momento di inerzia rispetto all'asse x_2, I_{12} e' il momento centrifugo rispetto agli assi $x_1$ed x_2.

Tutto cio' premesso, si consideri il sistema di Figura 1, costituito da quattro aree disposte ai vertici del rettangolo di base 5 metri ed altezza 3 metri, con:

$$\begin{aligned} m_A &= 0.2\,m^2 \\ m_B &= 0.4\,m^2 \\ m_C &= 0.7\,m^2 \\ m_D &= 0.3\,m^2 \end{aligned} \tag{6}$$

L'area totale e' allora pari a:

$$A = 1.6\,m^2 \tag{7}$$

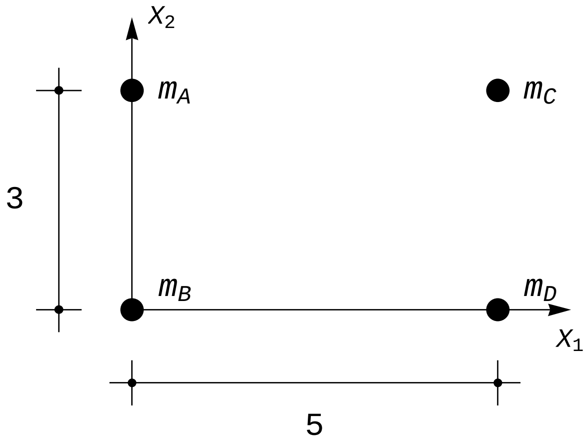


Figura 1 - Un sistema di masse concentrate

mentre i due momenti statici, rispetto agli assi x_1 ed x_2, sono forniti da:

$$\begin{aligned} S_1 &= (0.2 + 0.7)\,3 = 2.7\,m^3 \\ S_2 &= (0.7 + 0.3)\,5 = 5\,m^3 \end{aligned} \tag{8}$$

Il baricentro del sistema, quindi, avra' coordinate pari a :

$$x_{1\,G} = \frac{S_2}{A} = \frac{5}{1.6} = 3.125\,m \tag{9}$$

$$x_{2\,G} = \frac{S_1}{A} = \frac{2.7}{1.6} = 1.6875\,m \tag{10}$$

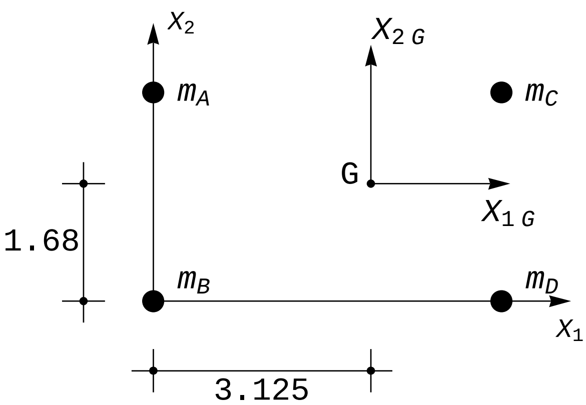


Figura 2 - Il baricentro del sistema

I momenti di inerzia, rispetto agli assi x_1 ed x_2, sono forniti da:

$$\begin{aligned} I_{11} &= (0.2 + 0.7)\,3^2 = 8.1\,m^4 \\ I_{22} &= (0.7 + 0.3)\,5^2 = 25\,m^4 \\ I_{12} &= (0.7)\,5 \cdot 3 = 10.5\,m^4 \end{aligned} \tag{11}$$

Per ottenere i momenti di inerzia baricentrici, relativi agli assi paralleli ad x_1 ed x_2, ma passanti per il baricentro del sistema, non resta che applicare il teorema di Huyghens:

$$I'_{11} = I_{11} - A\, x_{2G}^2 = 8.1 - 1.6 \cdot 1.6875^2 = 3.5437\ m^4$$
$$I'_{22} = I_{22} - A\, x_{1G}^2 = 25 - 1.6 \cdot 3.125^2 = 9.375\ m^4$$
$$I'_{12} = I_{12} - A\, x_{1G}\, x_{2G} = 10.5 - 1.6 \cdot 1.6875 \cdot 3.125 = 2.0625\ m^4$$

Si sono quindi indicati con l'apice le tre quantita' relative al sistema baricentrico.

Infine, i momenti principali di inerzia sono forniti da:

$$I_1 = \frac{I'_{11} + I'_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I'_{11} - I'_{22}}{2}\right)^2 + I'^{2}_{12}} = 10.0308\ m^4 \tag{13}$$

$$I_2 = \frac{I'_{11} + I'_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I'_{11} - I'_{22}}{2}\right)^2 + I'^{2}_{12}} = 2.8879\ m^4 \tag{14}$$

mentre la rotazione che occorre assegnare al sistema di riferimento per portarlo ad allinearsi con gli assi principali di inerzia e' fornita da:

$$\phi^* = \frac{1}{2} \operatorname{ArcTan}\left(\frac{2\, I'_{12}}{I'_{22} - I'_{11}}\right) = 0.307834 \tag{15}$$

ossia circa 17.63 gradi, in senso antiorario.

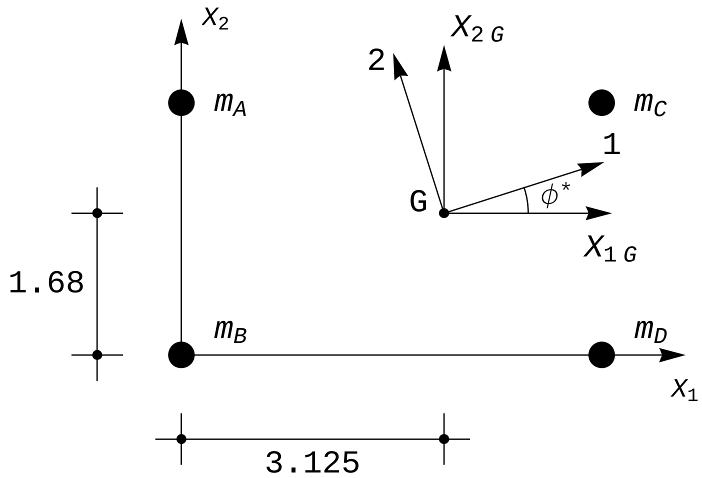


Figura 3 - Gli assi centrali di inerzia

Nota - In forma matriciale, si possono scrivere i momenti di inerzia nel sistema baricentrico:

$$\mathbf{I}' = \begin{pmatrix} I'_{22} & I'_{12} \\ I'_{12} & I'_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.375 & 2.0625 \\ 2.0625 & 3.5437 \end{pmatrix} \tag{16}$$

ed ottenere i momenti principali di inerzia, assieme alle corrispondenti direzioni principali di inerzia, equivale al calcolo degli autovalori e degli autovettori di I'.

Esercizio n.2: la sezione ad L

Calcolare le coordinate del baricentro ed i momenti di inerzia della sezione ad L di Figura 4.

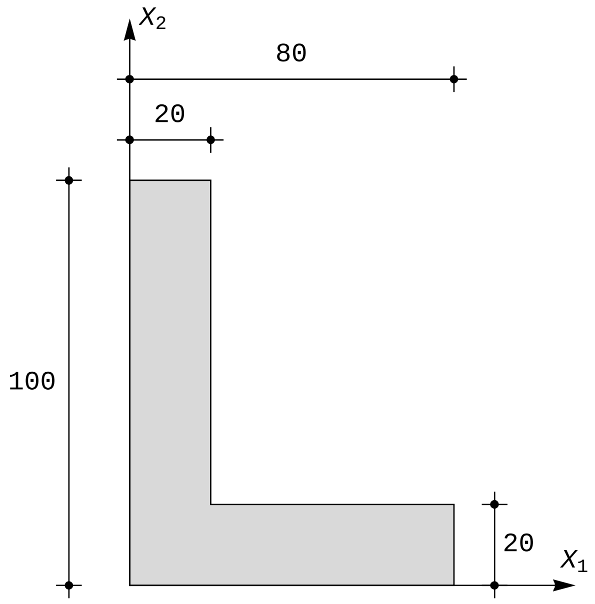


Figura 4 - La sezione ad L

■ Soluzione

Si suddivide la sezione nei due rettangoli di Figura 5, di base b_1= 20cm e b_2= 60cm ed altezza h_1=100cm ed h_2=20cm, rispettivamente. Tale scelta e' ovviamente arbitraria, nel senso che altre scelte sarebbero altrettanto legittime. L'area della sezione e' fornita da:

$$A = A_1 + A_2 = b_1 h_1 + b_2 h_2 = 3200\ \mathrm{cm}^2 \tag{17}$$

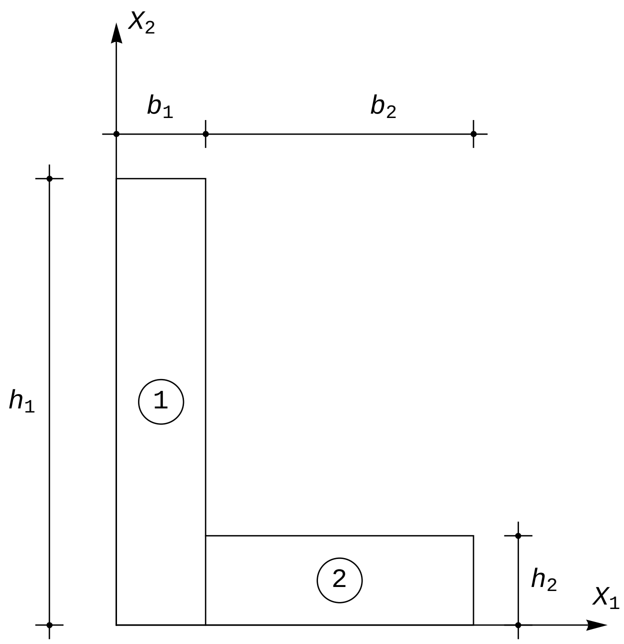


Figura 5 - La sezione ad L come unione di due rettangoli

Per calcolare il baricentro, si calcolino i due momenti statici rispetto ai due assi di Figura:

$$S_1 = S_1^{(1)} + S_1^{(2)} = A_1\, x_{2G}^{(1)} + A_2\, x_{2G}^{(2)} = b_1 h_1 \frac{h_1}{2} + b_2 h_2 \frac{h_2}{2} = 112\,000\ \text{cm}^3 \qquad (18)$$

$$S_2 = S_2^{(1)} + S_2^{(2)} = A_1\, x_{1G}^{(1)} + A_2\, x_{1G}^{(2)} = b_1 h_1 \frac{b_1}{2} + b_2 h_2 \left(b_1 + \frac{b_2}{2}\right) = 80\,000\ \text{cm}^3 \qquad (19)$$

da cui le coordinate del baricentro dell'intera figura:

$$x_{1G} = \frac{S_2}{A} = \frac{b_1 h_1 \frac{b_1}{2} + b_2 h_2 \left(b_1 + \frac{b_2}{2}\right)}{b_1 h_1 + b_2 h_2} = \frac{80\,000}{3200} = 25\ \text{cm} \qquad (20)$$

$$x_{2G} = \frac{S_1}{A} = \frac{b_1 h_1 \frac{h_1}{2} + b_2 h_2 \frac{h_2}{2}}{b_1 h_1 + b_2 h_2} = \frac{112\,000}{3200} = 35\ \text{cm} \qquad (21)$$

Per calcolare i momenti di inerzia rispetto agli assi di Figura, si puo' scrivere:

$$I_{11} = I_{11}^{(1)} + I_{11}^{(2)} = \frac{b_1 h_1^3}{3} + \frac{b_2 h_2^3}{3} = 6.82667 \times 10^6\ \text{cm}^4 \qquad (22)$$

$$I_{22} = I_{22}^{(1)} + I_{22}^{'(2)} + A_2 \left(x_{1G}^{(2)}\right)^2 = \frac{b_1^3 h_1}{3} + \frac{b_2^3 h_2}{12} + b_2 h_2 \left(b_1 + \frac{b_2}{2}\right)^2 = 3.62667 \times 10^6\ \text{cm}^4 \qquad (23)$$

$$I_{12} = A_1\, x_{1G}^{(1)}\, x_{2G}^{(1)} + A_2\, x_{1G}^{(2)}\, x_{2G}^{(2)} = b_1 h_1 \frac{b_1}{2} \frac{h_1}{2} + b_2 h_2 \frac{h_2}{2} \left(b_1 + \frac{b_2}{2}\right) = 1\,600\,000\ \text{cm}^4 \qquad (24)$$

Si osservi che nel calcolo di I_{22} si e' calcolato l'apporto del secondo rettangolo come somma del momento di inerzia rispetto all'asse verticale passante per il suo baricentro, e poi si e' aggiunto il momento di trasporto secondo Huygens, mentre nel caso dei momenti centrifughi si e' calcolato per ambedue i rettangoli il solo momento di trasporto, poiche' il momento centrifugo baricentrico e' nullo.

In riferimento agli assi baricentrici paralleli alla coppia di assi X_1 ed X_2 si ha, per la legge di Huygens:

$$I'_{11} = I_{11} - A\, x_{2G}^2 = 6.82667 \times 10^6 - 3200 \times 35^2 = 2.90667 \times 10^6\ \text{cm}^4 \qquad (25)$$

$$I'_{22} = I_{22} - A\, x_{1G}^2 = 3.62667 \times 10^6 - 3200 \times 25^2 = 1.62667 \times 10^6\ \text{cm}^4 \qquad (26)$$

$$I'_{12} = I_{12} - A\, x_{1G}\, x_{2G} = 1\,600\,000 - 3200 \cdot 25 \cdot 35 = -1\,200\,000\ \text{cm}^4 \qquad (27)$$

Infine, per ottenere i momenti d'inerzia centrali occorre ruotare la coppia di assi di un angolo ϕ^* pari a:

$$\phi^* = \frac{1}{2} \text{ArcTan}\left(\frac{2 I'_{12}}{I'_{22} - I'_{11}}\right) = 0.54042 \qquad (28)$$

pari a 30.96 gradi. I momenti d'inerzia richiesti valgono:

$$I_{22}^r = I'_{11} \text{Sin}^2 \phi^* + 2 I'_{12} \text{Sin}\,\phi^* \text{Cos}\phi^* + I'_{22} \text{Cos}^2 \phi^* = 906\,667\ \text{cm}^4 \qquad (29)$$

$$I_{11}^r = I'_{11} \text{Cos}^2 \phi^* - 2 I'_{12} \text{Sin}\,\phi^* \text{Cos}\phi^* + I'_{22} \text{Sin}^2 \phi^* = 3.62667 \times 10^6\ \text{cm}^4 \qquad (30)$$

$$I^r_{12} = \left(I'_{11} - I'_{22} \right) \text{Sin}\,\phi^* \,\text{Cos}\phi^* + I'_{12} \left(\text{Cos}^2\,\phi^* - \text{Sin}^2\,\phi^* \right) = 0 \qquad (31)$$

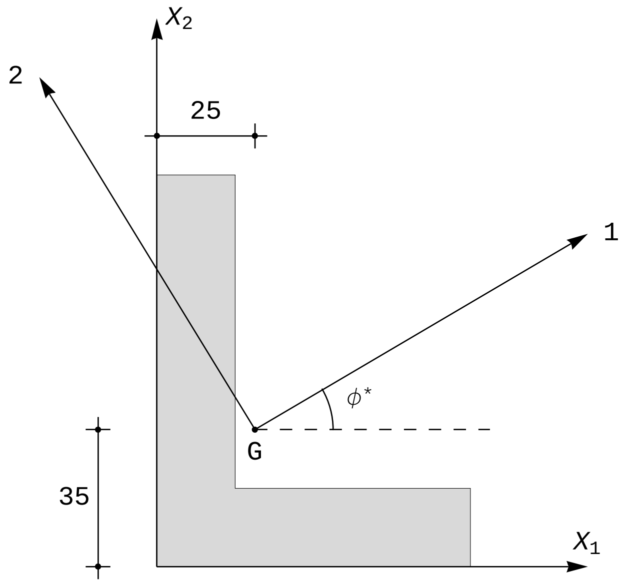


Figura 6 - Baricentro ed assi centrali di inerzia del profilato ad L

Esercizio n.3 - Una travata da ponte

Calcolare le coordinate del baricentro ed i momenti di inerzia della sezione aperta di Figura 7.

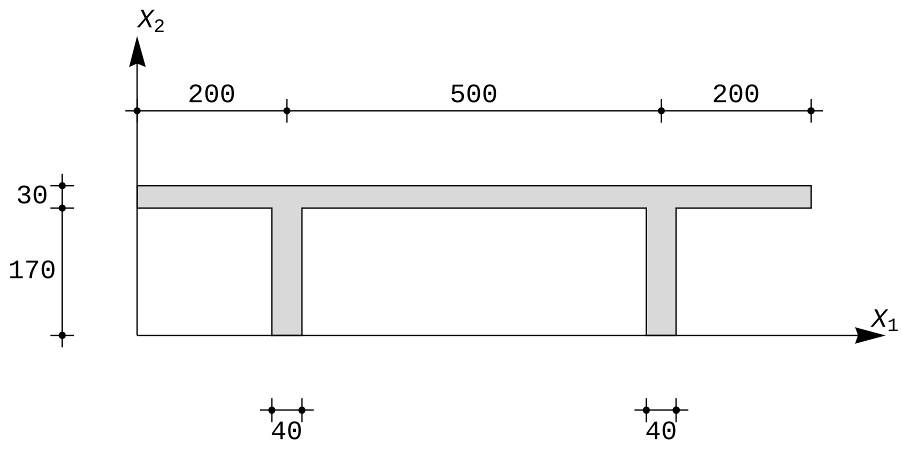


Figura 7 - Una sezione da ponte aperta

■ Soluzione

Si consideri la sezione come composta da un rettangolo di base 9 metri ed altezza 2 metri, a cui vanno sottratti i tre rettangoli "interni". In quest'ottica si ha un'area:

$$A = 900 \cdot 200 - 180 \cdot 170 - 460 \cdot 170 - 180 \cdot 170 = 40\,600\ \text{cm}^2 \qquad (32)$$

ed un momento statico rispetto all'asse orizzontale pari a:

$$S_1 = (900 \cdot 200)\,100 - (180 \cdot 170)\,\frac{170}{2} - (460 \cdot 170)\,\frac{170}{2} - (180 \cdot 170)\,\frac{170}{2} = 6\,151\,000\ \mathrm{cm}^3$$

Il baricentro della sezione e' quindi posto alle ascisse:

$$x_{1G} = 450\ \mathrm{cm} \qquad x_{2G} = \frac{6\,151\,000}{40\,600} = 151.5\ \mathrm{cm} \tag{34}$$

Ovviamente, la prima coordinata discende da proprieta' di simmetria.

I momenti di inerzia rispetto agli stessi assi si calcolano come:

$$I_{11} = \frac{900 \cdot 200^3}{3} - \frac{180 \cdot 170^3}{3} - \frac{460 \cdot 170^3}{3} - \frac{180 \cdot 170^3}{3} = 1.05711 \times 10^9\ \mathrm{cm}^4 \tag{35}$$

$$I_{22} = \frac{900^3 \cdot 200}{3} - \frac{180^3 \cdot 170}{3} - \frac{460^3 \cdot 170}{12} - 460 \cdot 170 \cdot 450^2 - \frac{180^3 \cdot 170}{12} - 180 \cdot 170 \cdot 810^2 = 1.08958 \times 10^{10}\ \mathrm{cm}^4 \tag{36}$$

$$I_{12} = \frac{900^2 \cdot 200^2}{4} - \frac{180^2 \cdot 170^2}{4} - 460 \cdot 170 \cdot 450 \times \frac{170}{2} - 180 \cdot 170 \cdot 810 \times \frac{170}{2} = 2\,767\,950\,000\ \mathrm{cm}^4 \tag{37}$$

Per ricavare i momenti di inerzia baricentrici, si puo' utilizzare il teorema di Huygens

$$I'_{11} = I_{11} - A\,x_{1G}^2 = 1.05711 \times 10^9 - 40\,600 \times 151.5^2 = 1.25252 \times 10^8\ \mathrm{cm}^4 \tag{38}$$

$$I_{22} = I_{22} - A\,x_{2G}^2 = 1.08958 \times 10^{10} - 40\,600 \times 450^2 = 2.67431 \times 10^9\ \mathrm{cm}^4 \tag{39}$$

$$I_{12} = I_{12} - A\,x_{1G}\,x_{2G} = 2\,767\,950\,000 - 40\,600 \cdot \frac{6\,151\,000}{40\,600} \cdot 450 = 0 \tag{40}$$

Esercizio n. 4

Si utilizzino i risultati per il triangolo equilatero al fine di calcolare la matrice dei momenti di inerzia per il traingolo isoscele di base B ed altezza H di Figura 8

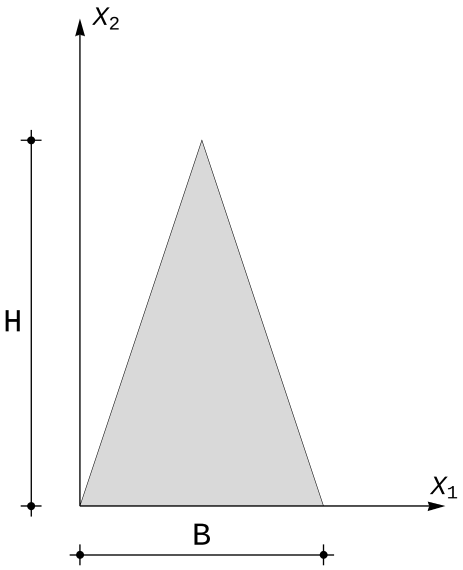


Figura 8 - Una sezione a triangolo isoscele

Il baricentro della sezione e' situato sull' asse di simmetria, ossia $x_{1G} = B/2$. Poiche' inoltre la sezione puo' considerarsi formata da due triangoli rettangoli, i cui bariucentri sono ad un terzo dalla base, si ha subito $x_{2G} = H/3$. Cio' premesso si puo' calcolare subito il momento d'inerzia I_{11} rispetto all'asse baricentrico orizzontale, in quanto esso e' somma dei due momenti di inerzia dei due triangoli rettangoli:

$$I_{11} = 2\,\frac{B}{2}\,\frac{H^3}{36} = \frac{B\,H^3}{36} \tag{41}$$

Il momento di inerzia I_{22} rispetto all'asse baricentrico verticale, invece, puo' essere calcolato aggiungendo al momento d'inerzia dei due triangoli equilateri il relativo momento di trasporto:

$$I_{22} = 2\left(\left(\frac{B}{2}\right)^3\frac{H}{36} + \frac{1}{2}\,\frac{B}{2}\,H\left(\frac{1}{3}\,\frac{B}{2}\right)^2\right) = \frac{B^3\,H}{48} \tag{42}$$

Il momento d' inerzia centrifugo I_{12} e' invece nullo, segnalando che gli assi orizzontali e verticali sono gli assi centrali di inerzia.

Esercizio n. 5

Si consideri la sezione di Figura 9, in cui B = 20 cm, b=2.5 cm, H=10cm ed $H_1 = 20$ cm. Si calcolino baricentro, momenti di inerzia baricentrici

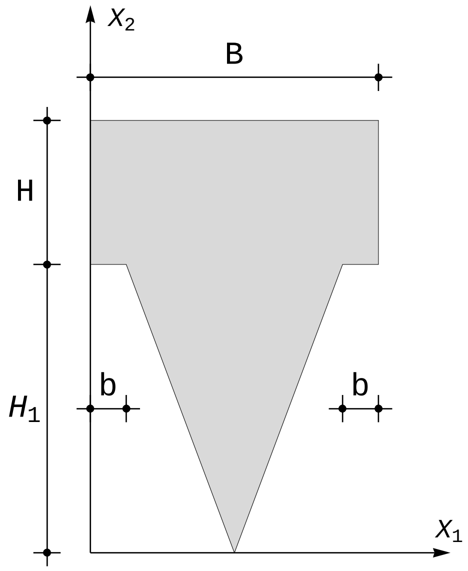


Figura 9 - Una sezione composta

Calcolo del baricentro

L' area della sezione e' pari a :

$$A = BH + \frac{1}{2}(B - 2b)H_1 = 350\ \mathrm{cm}^2 \tag{43}$$

mentre il momento statico rispetto all' asse x_1 e' pari a:

$$S_1 = BH\left(H_1 + \frac{H}{2}\right) + \frac{1}{2}(B - 2b)H_1\frac{2}{3}H_1 = 7000\ \mathrm{cm}^3 \tag{44}$$

Ne segue che la coordinata x_{2G} e' fornita da:

$$x_{2G} = \frac{BH\left(H_1 + \frac{H}{2}\right) + \frac{1}{2}(B - 2b)H_1\frac{2}{3}H_1}{BH + \frac{1}{2}(B - 2b)H_1} = 20\ \mathrm{cm} \tag{45}$$

mentre la coordinata x_{1G} e' pari a B/2, in quanto il baricentro deve situarsi sull'asse di simmetria della sezione.

Calcolo dei momenti di inerzia

Rispetto agli assi baricentrici, i momenti di inerzia valgono :

$$I_{11} = \frac{BH^3}{3} + (B - 2b)\frac{H_1^3}{12} = 16\,666.7\ \mathrm{cm}^4 \tag{46}$$

$$I_{22} = \frac{B^3H}{12} + 2\left(\frac{B}{2} - b\right)^3\frac{H_1}{12} = 8072.92\ \mathrm{cm}^4 \tag{47}$$

mentre il momento centrifugo sara' nullo.

Esercizio n .6

Per la sezione a semicerchio di Figura 10, calcolare il baricentro ed i momenti di inerzia baricentrali utilizzando anche i risultati per la sezione circolare

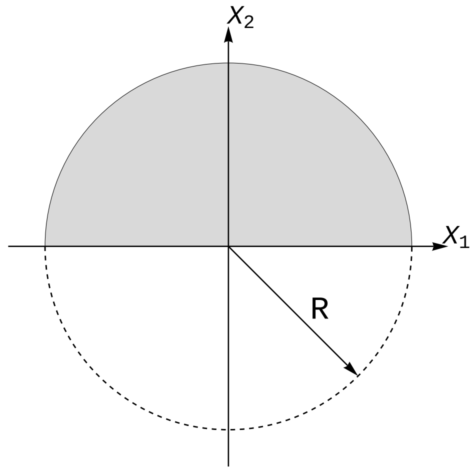


Figura 10 - Una sezione a semicerchio

L' area del semicerchio e' fornita da :

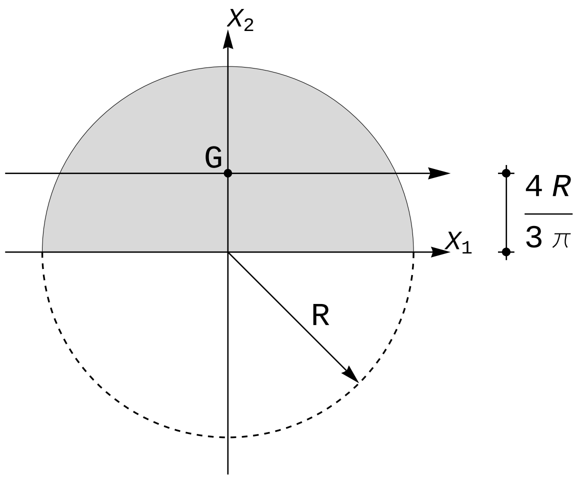
$$A = \frac{\pi R^2}{2} \tag{48}$$

mentre il momento statico rispetto all' asse X_1 puo' calcolarsi come:

$$S_1 = \int_0^R \int_0^\pi r \operatorname{Sin}[\theta]\, R\, d\theta\, dr = \frac{2 R^3}{3} \tag{49}$$

e quindi :

$$x_{2G} = \frac{4 R}{3 \pi} \tag{50}$$



Il momento di inerzia rispetto all' asse orizzontale baricentrale puo' allora calcolarsi come:

$$I_{11} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi R^4}{4} - \frac{\pi R^2}{2}\left(\frac{4\,R}{3\,\pi}\right)^2 = \frac{\pi\,R^4}{8} - \frac{8\,R^4}{9\,\pi} \tag{51}$$

■ Calcoli

Grafici