

---

# 7 - Analisi della tensione

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 15 novembre 2011]

In questa esercitazione si studiano alcuni stati tensionali, deducendo, per ciascuno di essi, le tensioni principali e le corrispondenti direzioni principali, calcolando le minime e massime tensioni tangenziali, e disegnando i cerchi di Mohr principali. Il primo esempio e' del tutto generico, ed i calcoli vanno svolti con l'ausilio di un computer, gli altri presentano alcune peculiarita' che permettono il calcolo manuale.

Infine, si danno alcune semplici funzioni *Mathematica*, che permettono l'automazione dello studio per qualsiasi stato tensionale.

---

## Esercizio n.1

Si consideri il corpo B, e si ipotizzi che nel punto P la matrice delle tensioni sia data da:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1.5 \end{pmatrix} \text{ t cm}^{-2} \quad (1)$$

e si voglia determinare il vettore tensione  $t_n$  sul piano definito dalla normale con coseni direttori

$$n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \sqrt{\frac{2}{7}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \quad (2)$$

## ■ Soluzione

Basta applicare il teorema di Cauchy-Poisson, ottenendo:

$$\begin{pmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \sqrt{\frac{2}{7}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.60357 \\ -0.935414 \end{pmatrix} \text{ t cm}^{-2} \quad (3)$$

## Esercizio n.2

Si consideri il corpo B, e si ipotizzi che nel punto P la matrice delle tensioni sia data da:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1.5 \end{pmatrix} \text{ t cm}^{-2} \quad (4)$$

e si voglia determinare il vettore tensione  $t_n$  sul piano definito dall'equazione:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 1 = 0 \quad (5)$$

## Soluzione

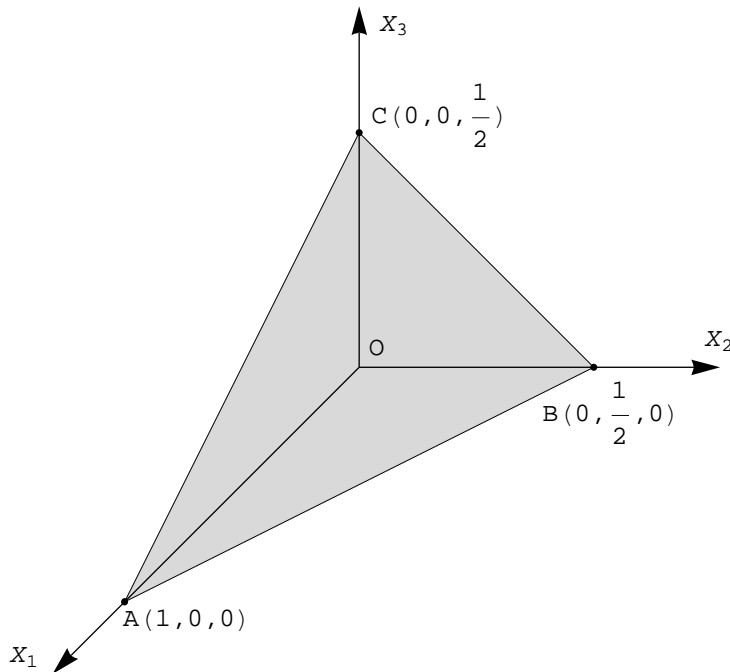


Figura 1 - Il piano di equazione (5)

Dato il piano di equazione:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \quad (6)$$

i coseni della normale ad esso sono forniti da:

$$n_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; \quad n_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; \quad n_3 = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (7)$$

Nel nostro caso sarà allora:

$$n_1 = \frac{1}{3}; \quad n_2 = \frac{2}{3}; \quad n_3 = \frac{2}{3}; \quad (8)$$

e quindi il teorema di Cauchy-Poisson fornisce:

$$\begin{pmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} t \text{ cm}^{-2} \quad (9)$$

## Esercizio n.3

Si consideri il corpo B, e si ipotizzi che nel punto P la matrice delle tensioni sia data da:

$$S = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ t cm}^{-2} \quad (10)$$

e si voglia determinare la tensione tangenziale  $\tau_n$  agente sul piano di normale con coseni direttori:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (11)$$

## ■ Soluzione

Si calcolano, nell'ordine, la tensione  $t_n$  sul piano in oggetto, la sua componente normale  $\sigma_n$  e l'ampiezza della componente tangenziale  $\tau_n$ . Infine, si calcolano i coseni direttori della retta di azione di  $\tau_n$ .

La tensione  $t_n$  si ottiene applicando il teorema di Cauchy-Poisson:

$$t_n = S n = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ t cm}^{-2} \quad (12)$$

La componente normale  $\sigma_n$  e' la componente di  $t_n$  lungo la normale  $n$ , e si calcola attraverso un prodotto scalare:

$$\sigma_n = t_n \cdot n = t_{n1} n_1 + t_{n2} n_2 + t_{n3} n_3 = \frac{1}{3} \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{2}{3} = \frac{13}{9} \text{ t cm}^{-2} \quad (13)$$

L'ampiezza della tensione tangenziale e' immediatamente deducibile come:

$$\tau_n = \sqrt{t_n^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{t_{n1}^2 + t_{n2}^2 + t_{n3}^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} - \frac{169}{81}} = \frac{2\sqrt{5}}{9} \quad (14)$$

Infine, i coseni direttori della retta di azione di  $\tau_n$  si ottengono da:

$$n_{\tau 1} = \frac{t_{n1} - \sigma_n n_1}{\tau_n} = 9 \frac{\frac{1}{3} - \frac{13}{9} \frac{1}{3}}{2\sqrt{5}} = -\frac{2}{3\sqrt{5}} = -0.298142 \quad (15)$$

$$n_{\tau 2} = \frac{t_{n2} - \sigma_n n_2}{\tau_n} = 9 \frac{\frac{4}{3} - \frac{13}{9} \frac{2}{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3} = 0.745356 \quad (16)$$

$$n_{\tau 3} = \frac{t_{n3} - \sigma_n n_3}{\tau_n} = 9 \frac{\frac{2}{3} - \frac{13}{9} \frac{2}{3}}{2\sqrt{5}} = -\frac{4}{3\sqrt{5}} = -0.596285 \quad (17)$$

## Esercizio n.4

Assegnato lo stato tensionale

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_1 x_2 \\ \sigma_{22} &= c_4 x_1 \\ \sigma_{12} &= -c_3 \frac{x_2^2}{2} - c_1 x_2\end{aligned}\tag{18}$$

verificare se esso e' realizzabile in assenza di forze di massa

### ■ Soluzione

Le equazioni indefinite dell' equilibrio, in assenza di forze di massa, si semplificano in:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= 0\end{aligned}\tag{19}$$

e sono banalmente soddisfatte dal campo di tensioni (18)

## Esercizio n.5

Assegnato lo stato tensionale:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_1 x_2 + c_4 x_3^2 - \frac{c_{12}}{3} x_1^3 \\ \sigma_{22} &= c_5 x_1 + c_6 x_2^2 - c_7 x_3 \\ \sigma_{33} &= c_8 x_1 + c_9 x_2 + c_{10} x_1 x_3^2 + c_{11} x_3^2 \\ \sigma_{12} &= -c_3 \frac{x_2^2}{2} - c_1 x_2 \\ \sigma_{13} &= c_{12} x_1^2 x_3 \\ \sigma_{23} &= -c_{13} x_2 x_3\end{aligned}\tag{20}$$

verificare se esso e' realizzabile in assenza di forze di massa

### ■ Soluzione

Le equazioni indefinite dell' equilibrio, in assenza di forze di massa, si semplificano in:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= 0\end{aligned}\tag{21}$$

La prima equazione e' identicamente soddisfatta, mentre le altre due divengono:

$$\begin{aligned} 2 c_6 x_2 - c_{13} x_2 &= 0 \\ 2 c_{11} x_3 - c_{13} x_3 + 2 c_{10} x_1 x_3 + 2 c_{12} x_1 x_3 &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Di conseguenza, il campo tensionale assegnato non e' equilibrato, a meno che non si abbia:

$$\begin{aligned} c_6 = c_{11} &= -\frac{c_{13}}{2} \\ c_{10} &= -c_{12} \end{aligned} \quad (23)$$

## Esercizio n.6

Assegnato il campo di tensioni :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2 x_1 - x_2 + x_2 x_3 \\ \sigma_{22} &= x_1 - x_1 x_3 \\ \sigma_{33} &= x_3 \\ \sigma_{12} &= \frac{x_2}{2} \\ \sigma_{13} &= 0 \\ \sigma_{23} &= x_2 \end{aligned} \quad (24)$$

dedurre le forze di massa in equilibrio con esso.

### ■ Soluzione

Dalle equazioni indefinite dell' equilibrio :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} &= -X_1 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} &= -X_2 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= -X_3 \end{aligned} \quad (25)$$

si trae subito che dovra' essere :

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{5}{2} \\ X_2 &= 0 \\ X_3 &= -2 \end{aligned} \quad (26)$$

## Esercizio n.7

Si consideri il punto P, interno al corpo B, e si assegni in P la seguente matrice delle componenti speciali di tensione:

$$S = \begin{pmatrix} 750 & -400 & 125 \\ -400 & 1000 & 0 \\ 125 & 0 & -500 \end{pmatrix} \text{ Kg/cm}^2 \quad (27)$$

Si vuole:

1. disegnare lo stato tensionale
2. calcolare le tensioni principali
3. calcolare le corrispondenti direzioni principali di tensione
4. calcolare le massime e minime tensioni tangenziali
5. identificare i piani su cui agiscono tali tensioni
6. tracciare i cerchi principali di Mohr, confermando i risultati del punto precedente

## ■ Soluzione

### ■ Punto 1

Lo stato tensionale e' disegnato in Figura 2 Si osservi che le tensioni sono state riportate col loro segno, e che di conseguenza il loro valore e' stato indicato in assoluto.

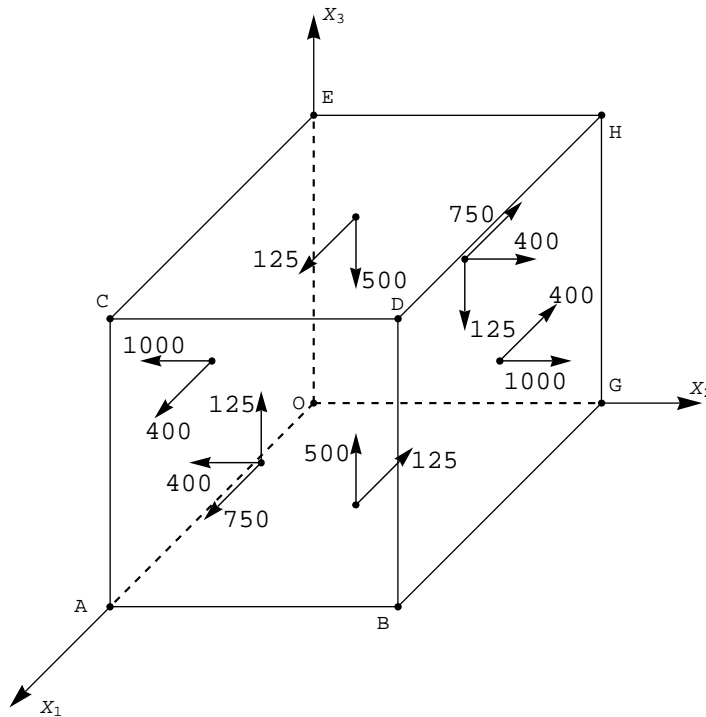


Figura 2 - Lo stato tensionale in esame

### ■ Punto 2

Per dedurre le tensioni principali, e' opportuno calcolare i tre invarianti:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 750 + 1000 - 500 = 1250 \quad (28)$$

$$I_2 = \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{11} \sigma_{33} + \sigma_{22} \sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 = -300\,625 \quad (29)$$

$$I_3 = \text{Det} (S) = -310\,625\,000 \quad (30)$$

da cui poi trarre l'equazione secolare:

$$-\sigma^3 + 1250 \sigma^2 + 300\,625 \sigma - 310\,625\,000 = 0 \quad (31)$$

Le tre radici, reali, possono essere calcolate con un qualsiasi metodo numerico, ottenendo le tre tensioni

principali:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 1297.15 \\ \sigma_2 &= 466.348 \\ \sigma_3 &= -513.496\end{aligned}\quad (32)$$

### ■ Punto 3

Per calcolare la prima direzione principale occorre risolvere il sistema:

$$(S - \sigma_1 I) n = 0 \quad (33)$$

ossia:

$$\begin{pmatrix} 750 - 1297.15 & -400 & 125 \\ -400 & 1000 - 1297.15 & 0 \\ 125 & 0 & -500 - 1297.15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

omogeneo ed a determinante nullo. Dividendo per  $n_3$  si ottiene, dalle prime due equazioni:

$$-547.15 \left( \frac{n_1}{n_3} \right) - 400 \left( \frac{n_2}{n_3} \right) = -125 \quad (35)$$

$$-400 \left( \frac{n_1}{n_3} \right) - 297.15 \left( \frac{n_2}{n_3} \right) = 0 \quad (36)$$

con soluzione ottenibile con un normale metodo di sostituzione:

$$\begin{aligned}\frac{n_1}{n_3} &= 14.3655 \\ \frac{n_2}{n_3} &= -19.3377\end{aligned}\quad (37)$$

Infine, la soluzione puo' essere normalizzata imponendo che sia:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (38)$$

Basta, a tal fine, scrivere:

$$n_1 = \frac{14.3655}{(14.3655^2 + 19.3377^2 + 1)^{1/2}} = 0.59582 \quad (39)$$

$$n_2 = \frac{-19.3377}{(14.3655^2 + 19.3377^2 + 1)^{1/2}} = -0.802046 \quad (40)$$

$$n_3 = \frac{1}{(14.3655^2 + 19.3377^2 + 1)^{1/2}} = 0.0414758 \quad (41)$$

La prima direzione principale e' quindi data da:

$$n^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.59582 \\ -0.802046 \\ 0.0414758 \end{pmatrix} \quad (42)$$

Per calcolare la seconda direzione principale occorre risolvere il sistema:

$$(S - \sigma_2 I) n = 0 \quad (43)$$

ossia:

$$\begin{pmatrix} 750 - 466.348 & -400 & 125 \\ -400 & 1000 - 466.348 & 0 \\ 125 & 0 & -500 - 466.348 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

omogeneo ed a determinante nullo. Dividendo per  $n_3$  si ottiene, dalle prime due equazioni:

$$283.652 \left( \frac{n_1}{n_3} \right) - 400 \left( \frac{n_2}{n_3} \right) = -125 \quad (45)$$

$$-400 \left( \frac{n_1}{n_3} \right) - 533.652 \left( \frac{n_2}{n_3} \right) = 0 \quad (46)$$

con soluzione ottenibile con un normale metodo di sostituzione:

$$\frac{n_1}{n_3} = 7.73091 \quad (47)$$

$$\frac{n_2}{n_3} = 5.79472$$

Infine, la soluzione puo' essere normalizzata imponendo che sia:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (48)$$

Basta, a tal fine, scrivere:

$$n_1 = \frac{7.73091}{(7.73091^2 + 5.79472^2 + 1)^{1/2}} = 0.79592 \quad (49)$$

$$n_2 = \frac{5.79472}{(7.73091^2 + 5.79472^2 + 1)^{1/2}} = 0.596584 \quad (50)$$

$$n_3 = \frac{1}{(7.73091^2 + 5.79472^2 + 1)^{1/2}} = 0.102953 \quad (51)$$

La seconda direzione principale e' quindi data da:

$$\mathbf{n}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.79592 \\ 0.596584 \\ 0.102953 \end{pmatrix} \quad (52)$$

Per calcolare la terza direzione principale occorre risolvere il sistema:

$$(\mathbf{S} - \sigma_3 \mathbf{I}) \mathbf{n} = 0 \quad (53)$$

ossia:

$$\begin{pmatrix} 750 + 513.496 & -400 & 125 \\ -400 & 1000 + 513.496 & 0 \\ 125 & 0 & -500 + 513.496 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (54)$$

omogeneo ed a determinante nullo. Dividendo per  $n_3$  si ottiene, dalle prime due equazioni:

$$1263.5 \left( \frac{n_1}{n_3} \right) - 400 \left( \frac{n_2}{n_3} \right) = -125 \quad (55)$$



$$-400 \begin{pmatrix} n_1 \\ n_3 \end{pmatrix} + 1513.496 \begin{pmatrix} n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (56)$$

con soluzione ottenibile con un normale metodo di sostituzione:

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{n_3} &= -0.107965 \\ \frac{n_2}{n_3} &= -0.0285339 \end{aligned} \quad (57)$$

Infine, la soluzione puo' essere normalizzata imponendo che sia:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (58)$$

Basta, a tal fine, scrivere:

$$n_1 = \frac{-0.107965}{(0.107965^2 + 0.0285339^2 + 1)^{1/2}} = -0.107298 \quad (59)$$

$$n_2 = \frac{-0.0285339}{(0.107965^2 + 0.0285339^2 + 1)^{1/2}} = -0.0283576 \quad (60)$$

$$n_3 = \frac{1}{(0.107965^2 + 0.0285339^2 + 1)^{1/2}} = 0.993822 \quad (61)$$

La terza direzione principale e' quindi data da:

$$\mathbf{n}^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.107298 \\ -0.0283576 \\ 0.993822 \end{pmatrix} \quad (62)$$

Si costruisca ora la matrice modale, inserendo le tre direzioni in colonne successive:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0.59582 & 0.79592 & -0.107298 \\ -0.80204612 & 0.596584 & -0.0283576 \\ 0.0414758 & 0.102953 & 0.9938224 \end{pmatrix} \quad (63)$$

Tale matrice risulta ortogonale, a determinante unitario, segnalando che le direzioni principali sono mutuamente ortogonali. Inoltre, e' facile verificare che:

$$\mathbf{N}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{N} = \mathbf{\Lambda} \quad (64)$$

con  $\mathbf{\Lambda}$  matrice diagonale contenente l'iesima tensione principale in posizione i-esima:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1297.15 & 0 & 0 \\ 0 & 466.348 & 0 \\ 0 & 0 & -513.496 \end{pmatrix} \quad (65)$$

#### ■ Punto 4

Conosciute le tensioni principali, e' immediato concludere che le minime e massime tensioni tangenziali sono fornite da:

1. sui quattro piani di normale  $\mathbf{n}^T = (0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$\tau = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \pm \frac{466.348 + 513.496}{2} = \pm 489.922 \quad (66)$$

con tensione normale, agente sul medesimo piano, pari a:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} = \frac{466.348 - 513.496}{2} = -23.574 \quad (67)$$

1. sui quattro piani di normale  $\mathbf{n}^T = (\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$\tau = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \pm \frac{-513.496 - 1297.15}{2} = \pm 905.323 \quad (68)$$

con tensione normale, agente sul medesimo piano, pari a:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} = \frac{-513.496 + 1297.15}{2} = 391.827 \quad (69)$$

1. sui quattro piani di normale  $\mathbf{n}^T = (\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

$$\tau = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm \frac{1297.15 - 466.348}{2} = \pm 415.401 \quad (70)$$

con tensione normale, agente sul medesimo piano, pari a:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{1297.15 + 466.348}{2} = 881.749 \quad (71)$$

#### ■ Punto 5

Il tracciamento dei cerchi principali di Mohr e' immediato:

1. si individuano sull'asse orizzontale i tre punti di ascissa  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ ,
2. si individuano i tre centri  $C_1 = (\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0)$ ,  $C_2 = (\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, 0)$ ,  $C_3 = (\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0)$
3. si traccia il cerchio di centro  $C_1$  e raggio  $r_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$ , il cerchio di centro  $C_2$  e raggio  $r_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ , il cerchio di centro  $C_3$  e raggio  $r_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ :

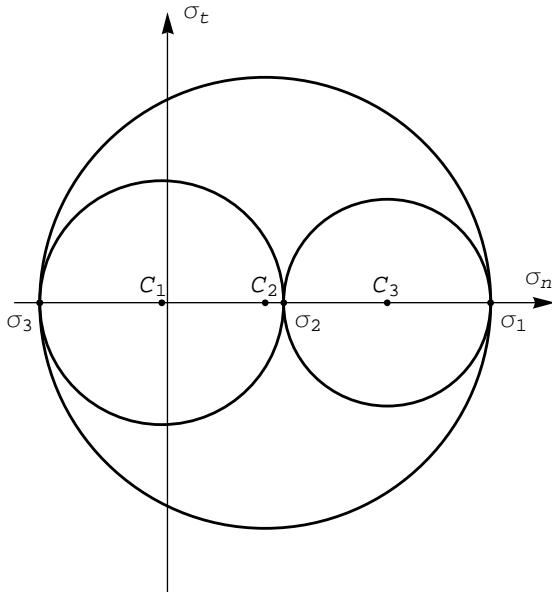


Figura 3 - I tre cerchi principali di Mohr

## Esercizio n.8

Si consideri un punto P interno al corpo B, e si assegni in P la seguente matrice delle tensioni:

$$S = \begin{pmatrix} 1000 & 500 & 0 \\ 500 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Kg/cm}^2; \quad (72)$$

Si vuol conoscere le tensioni principali e le corrispondenti direzioni principali di tensione.

### ■ Soluzione:

Lo stato tensionale è disegnato in Figura 4 : da esso si evince che tutte le componenti non nulle di tensione giacciono in un piano, come caratteristico negli *stati piani di tensione*.

Si cominci con l'osservare che la matrice **S** ha una riga (ed una colonna) interamente nulla, e che di conseguenza il suo determinante è nullo. Questo implica che il termine noto dell'equazione secolare, ossia l'invariante cubico, è anch'esso nullo. Ne segue che una radice sarà senz'altro nulla, e che l'equazione stessa si riduce ad un'equazione quadratica, di facile soluzione.

L'invariante lineare si calcola immediatamente, come traccia di **S**:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} = 800 \quad (73)$$

ed anche l'invariante quadratico non presenta difficoltà:

$$I_2 = \sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = -1000 * 200 - 500^2 = -450\,000 \quad (74)$$

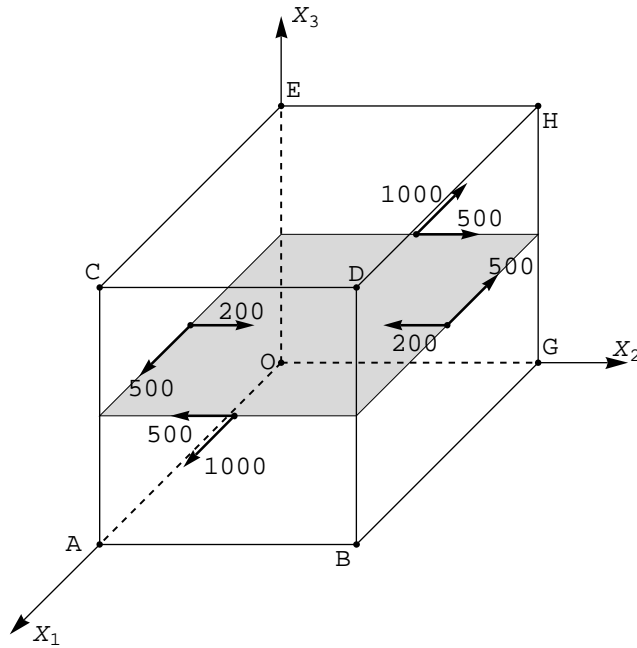


Figura 4 - Lo stato tensionale in esame

A questo punto l'equazione secolare si scrive:

$$\sigma (450\,000 + 800\sigma - \sigma^2) = 0 \quad (75)$$

con soluzione immediata:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 1181.02 \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= -381.025 \end{aligned} \quad (76)$$

Ottenute le radici, esse vanno sostituite, una per volta, nel sistema di equazioni  $(\mathbf{S} - \sigma \mathbf{I})\mathbf{l} = \mathbf{0}$ . Ad esempio, per  $\sigma = \sigma_1$  si ha:

$$\begin{aligned} -181.02 n_1 + 500 n_2 &= 0 \\ 500 n_1 - 1381.02 n_2 &= 0 \\ -1181.02 n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (77)$$

La terza equazione fornisce subito  $n_3 = 0$ , mentre è possibile verificare che la seconda equazione si ottiene dalla prima moltiplicata per 2.76213. Ciò significa che, come d'altronde ovvio, non si può certo sperare di calcolare un valore univoco e non nullo della coppia di incognite  $n_1, n_2$ . È però possibile calcolare il loro rapporto, dividendo, ad esempio, la prima equazione per  $n_2$ :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{500}{181.02} \approx 2.76213 \quad (78)$$

Per ottenere i coseni direttori, non resta che normalizzare, scrivendo:

$$n_1 \rightarrow \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{500}{\sqrt{500^2 + 181.02^2}} \approx 0.940275 \quad (79)$$

$$n_2 \rightarrow \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{181.02}{\sqrt{500^2 + 181.02^2}} \approx 0.340417 \quad (80)$$

Mentre il calcolo della direzione principale corrispondente a  $\sigma_2 = -381.025$  non presenta alcuna difficoltà, si noti che per la seconda direzione principale occorre risolvere il sistema (per  $\sigma_3 = 0$ ):

$$\begin{aligned} 1000 n_1 + 500 n_2 &= 0 \\ 500 n_1 - 200 n_2 &= 0 \\ 0 n_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (81)$$

che potrebbe causare qualche perplessità. Tuttavia è immediato realizzare che le prime due equazioni sono indipendenti, avendo determinante dei coefficienti diverso da zero, e pertanto ammettono solo la soluzione nulla. Dalla terza scompare ogni traccia di  $n_3$ , che pertanto può essere assunta arbitraria. Ne segue, normalizzando, la soluzione (0,0,1).

I cerchi principali di Mohr sono riportati in seguito:

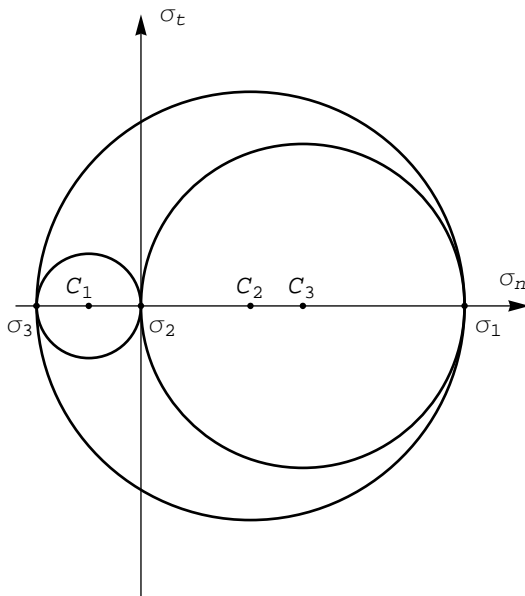


Figura 5 - I cerchi principali di Mohr

## Esercizio n.9

Si consideri un punto P interno al corpo B, e si assegni in P la seguente matrice delle tensioni:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 10 & 20 & 40 \\ 20 & 40 & 105 \end{pmatrix} \text{ Kg/cm}^2; \quad (82)$$

Si vuole conoscere le tensioni principali e le corrispondenti direzioni principali di tensione.

### ■ Soluzione:

Si cominci con l'osservare che la matrice  $\mathbf{S}$  ha due righe chiaramente linearmente dipendenti, poiché una è il doppio dell'altra, e che di conseguenza il suo determinante è nullo. Questo implica che il termine noto dell'equazione secolare, ossia l'invariante cubico, è anch'esso nullo. Ne segue che una radice sarà senz'altro nulla, e che l'equazione stessa si riduce ad un'equazione quadratica, di facile soluzione.

L'invariante lineare si calcola immediatamente, come traccia di  $\mathbf{S}$ :

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 130 \quad (83)$$

ed anche l'invariante quadratico non presenta difficoltà:

$$I_2 = \sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = -1000 * 200 - 500^2 = 625 \quad (84)$$

A questo punto l'equazione secolare si scrive:

$$-\sigma^3 + 130 \sigma^2 - 625 \sigma = 0 \quad (85)$$

con soluzione immediata:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 125 \\ \sigma_2 &= 5 \\ \sigma_3 &= 0 \end{aligned} \quad (86)$$

Ottenute le radici, esse vanno sostituite, una per volta, nel sistema di equazioni  $(\mathbf{S} - \sigma \mathbf{I})\mathbf{l} = \mathbf{0}$ . Ad esempio, per  $\sigma = \sigma_1$  si ha:

$$\begin{aligned} -120 n_1 + 10 n_2 + 20 n_3 &= 0 \\ 10 n_1 - 105 n_2 + 40 n_3 &= 0 \\ 20 n_1 + 40 n_2 - 20 n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (87)$$

e dividendo per  $n_3$ :

$$\begin{aligned} -120 \frac{n_1}{n_3} + 10 \frac{n_2}{n_3} &= -20 \\ 10 \frac{n_1}{n_3} - 105 \frac{n_2}{n_3} &= -40 \\ 20 \frac{n_1}{n_3} + 40 \frac{n_2}{n_3} &= 20 \end{aligned} \quad (88)$$

Le prime due equazioni forniscono, con un metodo di sostituzione,

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{1}{5}; \quad \frac{n_2}{n_3} = \frac{2}{5} \quad (89)$$

Una soluzione non normalizzata e' quindi  $n^T = (1, 2, 5)$ . Per ottenere i coseni direttori, non resta che normalizzare, scrivendo:

$$n_1 \rightarrow \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2^2 + 5^2}} \approx 0.182574 \quad (90)$$

$$n_2 \rightarrow \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + 2^2 + 5^2}} \approx 0.365148 \quad (91)$$

$$n_3 \rightarrow \frac{n_3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{5}{\sqrt{1 + 2^2 + 5^2}} \approx 0.912871 \quad (92)$$

La seconda direzione principale, corrispondente alla tensione principale  $\sigma_2 = 5$ , si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{aligned} 10 n_2 + 20 n_3 &= 0 \\ 10 n_1 + 15 n_2 + 40 n_3 &= 0 \\ 20 n_1 + 40 n_2 + 100 n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (93)$$

ossia, dividendo per  $n_3$ :

$$\begin{aligned}\frac{n_2}{n_3} &= -2 \\ 2 \frac{n_1}{n_3} + 3 \frac{n_2}{n_3} &= -8 \\ \frac{n_1}{n_3} + 2 \frac{n_2}{n_3} &= -5\end{aligned}\tag{94}$$

con soluzione:

$$\frac{n_1}{n_3} = -1; \quad \frac{n_2}{n_3} = -2\tag{95}$$

Una soluzione non normalizzata e' quindi  $n^T = (-1, -2, 1)$ . Per ottenere i coseni direttori, non resta che normalizzare, scrivendo:

$$n_1 \rightarrow \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1 + 2^2 + 1}} \approx -0.408248\tag{96}$$

$$n_2 \rightarrow \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{-2}{\sqrt{1 + 2^2 + 5^2}} \approx -0.816496\tag{97}$$

$$n_3 \rightarrow \frac{n_3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2^2 + 5^2}} \approx 0.408248\tag{98}$$

Infine, la direzione principale corrispondente a  $\sigma_3 = 0$  si ottiene dalla soluzione del sistema:

$$\begin{aligned}5 n_1 + 10 n_2 + 20 n_3 &= 0 \\ 10 n_1 + 20 n_2 + 40 n_3 &= 0 \\ 20 n_1 + 40 n_2 + 105 n_3 &= 0\end{aligned}\tag{99}$$

Se si cerca di utilizzare lo stesso approccio delle altre due direzioni principali, si ottiene il sistema:

$$\begin{aligned}\frac{n_1}{n_3} + 2 \frac{n_2}{n_3} &= -4 \\ \frac{n_1}{n_3} + 2 \frac{n_2}{n_3} &= -\frac{105}{20}\end{aligned}\tag{100}$$

che non ha soluzioni. Ne segue che  $n_3 = 0$ , e che conseguentemente:

$$\frac{n_1}{n_2} = -2\tag{101}$$

Una soluzione non normalizzata, in definitiva, e'  $n^T = (-2, 1, 0)$ , la cui normalizzazione si lascia come esercizio.

I cerchi principali di Mohr sono riportati in seguito, anche se il cerchio piu' piccolo e' scarsamente visibile.

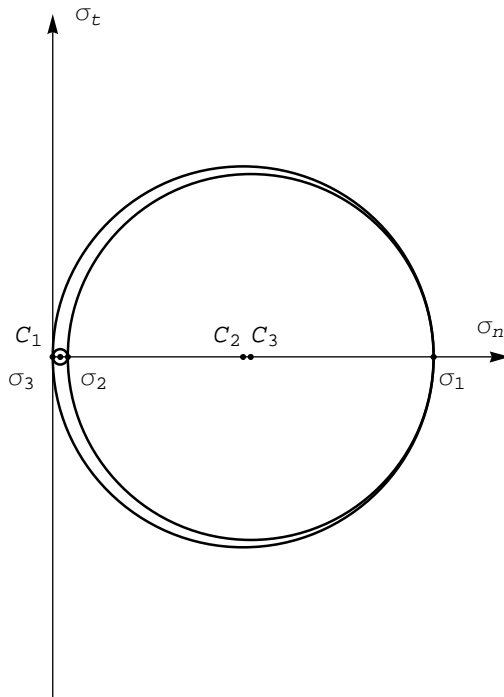


Figura 6 - I cerchi principali di Mohr

## Esercizio n.10

Si consideri un punto P interno al corpo B, e si assegni in P la seguente matrice delle tensioni:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ Kg/cm}^2; \quad (102)$$

Si vuole conoscere le tensioni principali e le corrispondenti direzioni principali di tensione.

### ■ Soluzione:

Si cominci con l'osservare che la matrice  $S$  ha la prima riga e la prima colonna in cui l'unica entrata non nulla è sulla diagonale principale. Ne segue che una tensione principale sarà sicuramente pari ad 1, mentre le altre due radici dell'equazione secolare possono ottenersi subito, giungendo alle tre tensioni:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 6 \\ \sigma_2 &= 4 \\ \sigma_3 &= 1 \end{aligned} \quad (103)$$

Ottenute le radici, esse vanno sostituite, una per volta, nel sistema di equazioni  $(S - \sigma I)n = 0$ . Per  $\sigma = \sigma_1 = 6$  si ha:

$$\begin{aligned} -5 n_1 &= 0 \\ -n_2 + n_3 &= 0 \\ n_2 - n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (104)$$

che ha ovviamente la soluzione  $n^T = (0, 1, 1)$

Per ottenere i coseni direttori, non resta che normalizzare, scrivendo:



$$n_2 \rightarrow \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (105)$$

$$n_3 \rightarrow \frac{n_3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (106)$$

Per la seconda direzione principale occorre risolvere il sistema (per  $\sigma_2 = 4$ ):

$$\begin{aligned} -3 n_1 &= 0 \\ n_2 + n_3 &= 0 \\ n_2 + n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (107)$$

con soluzione  $n^T = (0, -1, 1)$ . Infine, in corrispondenza della terza radice si ha il sistema:

$$\begin{aligned} 0 n_1 &= 0 \\ 4 n_2 + n_3 &= 0 \\ n_2 + 4 n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (108)$$

con soluzione  $n^T = (1, 0, 0)$ . Ciò indica che l'asse  $X_1$  era un asse principale. Infine, i cerchi principali di Mohr mostrano l'assenza di stati tensionali puramente tangenziali:

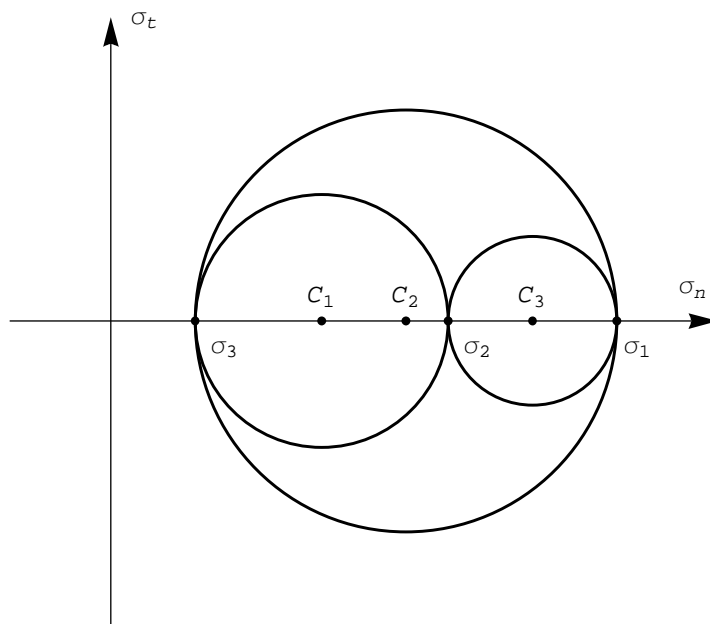


Figura 7 - I cerchi principali di Mohr

## Esercizio n.11

Si consideri un punto P interno al corpo B, e si assegni in P la seguente matrice delle tensioni:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}; \quad (109)$$

che, come vedremo in seguito, assume importanza fondamentale in teoria della trave.

Si avra':

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{33} \\ I_2 &= -\sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 = -\tau_3^2 \\ I_3 &= 0 \end{aligned}$$

da cui subito puo' notarsi che lo stato tensionale e' piano. L'equazione secolare si scrive:

$$-\sigma \left( \sigma^2 - \sigma_{33} \sigma - \tau_3^2 \right) = 0 \quad (111)$$

con una radice nulla, e due radici fornite da:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \sigma_{33} \pm \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4 \tau_3^2} \right) \quad (112)$$

La direzione principale corrispondente alla tensione  $\sigma_1 = \frac{1}{2} \left( \sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4 \tau_3^2} \right)$  sara' fornita dalla risoluzione del sistema:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left( \sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4 \tau_3^2} \right) n_{11} + \sigma_{13} n_{31} &= 0 \\ -\frac{1}{2} \left( \sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4 \tau_3^2} \right) n_{21} + \sigma_{23} n_{31} &= 0 \\ \left( \sigma_{13} - \frac{1}{2} \left( \sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4 \tau_3^2} \right) \right) n_{11} + \sigma_{23} n_{21} + \sigma_{33} n_{31} &= 0 \end{aligned} \quad (113)$$

Dividendo le prime due equazioni per  $n_{31}$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4 \tau_3^2} \right) \begin{pmatrix} n_{11} \\ n_{31} \end{pmatrix} &= \sigma_{13} \\ \frac{1}{2} \left( \sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4 \tau_3^2} \right) \begin{pmatrix} n_{21} \\ n_{31} \end{pmatrix} &= \sigma_{23} \end{aligned} \quad (114)$$

da cui subito:

$$\begin{aligned} \frac{n_{11}}{n_{31}} &= \frac{2 \sigma_{13}}{\sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4 \tau_3^2}} \\ \frac{n_{21}}{n_{31}} &= \frac{2 \sigma_{23}}{\sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4 \tau_3^2}} \end{aligned} \quad (115)$$

Ne segue che la prima direzione principale e' identificata da:

$$n_I = \left( 2 \sigma_{13}, 2 \sigma_{23}, \sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4 \tau_3^2} \right) \quad (116)$$

da normalizzare nel solito modo.

La direzione principale corrispondente alla tensione  $\sigma_2 = \frac{1}{2} \left( \sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4 \tau_3^2} \right)$  sara' fornita dalla risoluzione del sistema:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \left( \sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4 \tau_3^2} \right) n_{12} + \sigma_{13} n_{32} &= 0 \\
-\frac{1}{2} \left( \sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4 \tau_3^2} \right) n_{22} + \sigma_{23} n_{32} &= 0 \\
\left( \sigma_{13} - \frac{1}{2} \left( \sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4 \tau_3^2} \right) \right) n_{12} + \sigma_{23} n_{22} + \sigma_{33} n_{32} &= 0
\end{aligned} \tag{117}$$

Dividendo le prime due equazioni per  $n_{32}$  si ottiene:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left( \sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4 \tau_3^2} \right) \left( \frac{n_{12}}{n_{32}} \right) &= \sigma_{13} \\
\frac{1}{2} \left( \sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4 \tau_3^2} \right) \left( \frac{n_{22}}{n_{32}} \right) &= \sigma_{23}
\end{aligned} \tag{118}$$

da cui subito:

$$\begin{aligned}
\frac{n_{12}}{n_{32}} &= \frac{2 \sigma_{13}}{\sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4 \tau_3^2}} \\
\frac{n_{22}}{n_{32}} &= \frac{2 \sigma_{23}}{\sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4 \tau_3^2}}
\end{aligned} \tag{119}$$

Ne segue che la prima direzione principale e' identificata da:

$$n_{\text{I}} = \left( 2 \sigma_{13}, 2 \sigma_{23}, \sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4 \tau_3^2} \right) \tag{120}$$

da normalizzare nel solito modo.

La direzione principale corrispondente alla tensione  $\sigma_3 = 0$  sara' fornita dalla risoluzione del sistema:

$$\begin{aligned}
\sigma_{13} n_{33} &= 0 \\
\sigma_{23} n_{33} &= 0 \\
\sigma_{13} n_{13} + \sigma_{23} n_{23} + \sigma_{33} n_{33} &= 0
\end{aligned} \tag{121}$$

Se almeno una delle due tensioni tangenziali e' diversa da zero, allora  $n_{33} = 0$ , e dalla terza equazione:

$$\sigma_{13} n_{13} + \sigma_{23} n_{23} = 0 \tag{122}$$

da cui subito:

$$n_{\text{III}} = (\sigma_{23}, -\sigma_{13}, 0) \tag{123}$$

da normalizzare nel solito modo. Se invece le due tensioni tangenziali sono ambedue nulle, allora sara', banalmente  $n_{\text{III}} = (0, 0, 1)$ .

## Esercizio n.12

Si consideri un punto P interno al corpo B, e si assegni in P la seguente matrice delle tensioni:

$$S = \begin{pmatrix} 105 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 75 \end{pmatrix} \text{Kg/cm}^2; \tag{124}$$

Si vuole conoscere le tensioni principali e le corrispondenti direzioni principali di tensione, utilizzando la

teoria dei cerchi di Mohr

### ■ Soluzione:

Dall'esame dello stato tensionale risulta evidente che una delle tensioni principali è  $\sigma_2 = 20 \text{ Kg cm}^{-2}$ , e che la corrispondente direzione principale viene a coincidere con l'asse coordinato  $X_2$ . È allora opportuno studiare, con la teoria di Mohr, il fascio di piani che si appoggiano all'asse  $X_2$ , poiché a tale fascio appartengono gli altri due piani principali. Il relativo cerchio di Mohr è centrato nel punto  $C = ((\sigma_{11} + \sigma_{33})/2, 0) = (90, 0)$ , ed ha raggio:

$$R = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2}{4} + \sigma_{13}^2} = \sqrt{\frac{(105 - 75)^2}{4} + 20^2} = 25 \quad (125)$$

Ne seguono subito, dall'esame del cerchio di Mohr, i valori delle due tensioni principali:

$$\sigma_1 = OC + R = 90 + 25 = 115 \text{ Kg/cm}^2 \quad (126)$$

$$\sigma_3 = OC - R = 90 - 25 = 65 \text{ Kg/cm}^2 \quad (127)$$

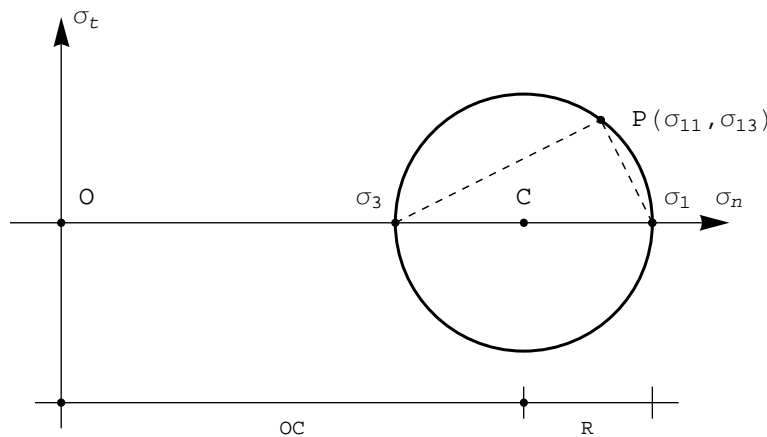


Figura 8 - Il cerchio di Mohr relativo ai fasci di piani che si appoggiano all'asse  $X_2$

## Funzioni Mathematica

In questa sezione di approfondimento vengono presentate alcune semplici funzioni *Mathematica* per il calcolo dei tre invarianti di tensione, delle tensioni principali, delle direzioni principali di tensione, e per il tracciamento dei cerchi principali di Mohr.

Le prime tre funzioni accettano come argomento la matrice **S** delle tensioni, e restituiscono i tre invarianti lineare, quadratico e cubico, rispettivamente, e sono così semplici da non abbisognare di alcuna spiegazione. La funzione `PrincipalStress[S_]` fa uso del comando `Eigenvalues[S]`, che calcola gli autovalori della matrice **S**, poi del comando `Sort`, che ordina gli autovalori in senso crescente, ed infine del comando `Reverse`, che ordina gli autovalori in senso decrescente. La funzione `PrincipalDirectionsStress[S_]`, infine, calcola gli autovettori della matrice **S** attraverso il comando `Eigenvalues[S]`, restituendo la matrice `PDirections`, che contiene in colonna gli autovettori non normalizzati. Si fornisce poi la routine `PrincipalMohrCircles[s1_,s2_,s3_]`, che accetta come argomento le tre tensioni principali, e traccia i corrispondenti cerchi di Mohr.

Si ricordi che queste funzioni vanno preventivamente valutate, prima di poter essere utilizzate:

```

FirstInvariant[S_] :=
Module[{I1},
  I1 = S[[1, 1]] + S[[2, 2]] + S[[3, 3]];
  Return[I1]]

SecondInvariant[S_] :=
Module[{I2},
  I2 = S[[1, 1]] S[[2, 2]] + S[[2, 2]] S[[3, 3]] + S[[1, 1]] S[[3, 3]] -
    S[[1, 2]] S[[1, 2]] - S[[1, 3]] S[[1, 3]] - S[[2, 3]] S[[2, 3]];
  Return[
    I2]]

ThirdInvariant[S_] :=
Module[{I3},
  I3 = Det[S];
  Return[I3]]

PrincipalStress[S_] :=
Module[{},
  Spectrum = Reverse[Sort[N[Eigenvalues[S]]]];
  Return[Spectrum]]

PrincipalDirectionsStress[S_] :=
Module[{},
  PDirections = N[Eigenvectors[S]];
  Return[PDirections]]

```

```

PrincipalMohrCircles[σ1_, σ2_, σ3_] :=
Module[{r3, C3, r2, C2, r1, C1, σaxis, τaxis, Cerchio1,
  Cerchio2, Cerchio3, LabelσAxis, LabelτAxis, puntos1,
  puntos2, puntos3, Labelσ1, Labelσ2, Labelσ3, Origin},
  r3 = (σ1 - σ2) / 2; C3 = σ2 + r3; r2 = (σ1 - σ3) / 2;
  C2 = σ3 + r2; r1 = (σ2 - σ3) / 2; C1 = σ3 + r1;
  σaxis = Arrow[{{-(C3 + r3), 0}, {1.25 (C3 + 2 r3), 0}}];
  τaxis = Arrow[{{0, -1.4 (σ1 - σ3) / 2}, {0, 1.4 (σ1 - σ3) / 2}}];
  Cerchio1 = Circle[{C1, 0}, r1, {0, 2 π}];
  Cerchio2 = Circle[{C2, 0}, r2, {0, 2 π}];
  Cerchio3 = Circle[{C3, 0}, r3, {0, 2 π}];
  LabelσAxis = Text["σn", {1.25 (C3 + 2 r3), -(C3 + 2 r3) / 20}];
  LabelτAxis = Text["τn", {1.4 (σ1 - σ3) / 18, 1.4 (σ1 - σ3) / 2}];
  puntos1 = Point[{σ1, 0}];
  puntos2 = Point[{σ2, 0}];
  puntos3 = Point[{σ3, 0}];
  Labelσ1 = Text["σ1", {1.1 σ1, -(C3 + 2 r3) / 20}];
  Labelσ2 = Text["σ2", {1.25 σ2, -(C3 + 2 r3) / 20}];
  Labelσ3 = Text["σ3", {1.25 σ3, -(C3 + 2 r3) / 20}];
  Origin = Point[{4, 0}];
  tt = Show[
    Graphics[{σaxis, τaxis, Cerchio1, Cerchio2, Cerchio3, Labelσ1,
      Labelσ2, Labelσ3, LabelσAxis, LabelτAxis, Thickness[0.005],
      Dashing[{0.02, 0.04}], PointSize[0.008], puntos1, puntos2,
      puntos3, Origin}, AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> All
    ];
  Return[tt]

```

## ■ L'utilizzo delle funzioni *Mathematica* per lo studio di uno stato tensionale

Si assegna una generica matrice delle tensioni:

$$s = \begin{pmatrix} 75 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 105 \end{pmatrix}$$

```
{{75, 0, 20}, {0, 20, 0}, {20, 0, 105}}
```

Si chiamano le tre funzioni per il calcolo degli invarianti, e la funzione per la deduzione delle tre tensioni principali:

```
FirstInvariant[S]
```

```
200
```

```
SecondInvariant[S]
```

```
11 075
```

```
ThirdInvariant[S]
```

```
149 500
```

```
PrincipalStress[S]
```

```
{115., 65., 20.}
```

Si estraggono le tre tensioni principali dal vettore Spectrum, che e' stato restituito dalla routine PrincipalStress:

```
 $\sigma_1 = \text{Spectrum}[[1]]$ ;  $\sigma_2 = \text{Spectrum}[[2]]$ ;  $\sigma_3 = \text{Spectrum}[[3]]$ ;
```

Si calcolano le direzioni principali:

```
PrincipalDirectionsStress[S]
```

```
{{1., 0., 2.}, {-2., 0., 1.}, {0., 1., 0.}}
```

Si estraggono le tre direzioni principali dalla matrice PDirections, che e' stata restituita dalla routine PrincipalStress:

```
n1 = PDirections[[1]]; n2 = PDirections[[2]]; n3 = PDirections[[3]];
```

Poiche' *Mathematica* non normalizza le soluzione, si provvede ad imporre che la lunghezza delle autosoluzioni sia unitaria:

```
n1 = n1 / Sqrt[Sum[n1[[i]]^2, {i, 1, 3}]];
```

```
n2 = n2 / Sqrt[Sum[n2[[i]]^2, {i, 1, 3}]];
```

```
n3 = n3 / Sqrt[Sum[n3[[i]]^2, {i, 1, 3}]];
```

Si costruisce la matrice modale:

```
Nn = {n1, n2, n3}
```

```
{{0.447214, 0., 0.894427}, {-0.894427, 0., 0.447214}, {0., 1., 0.}}
```

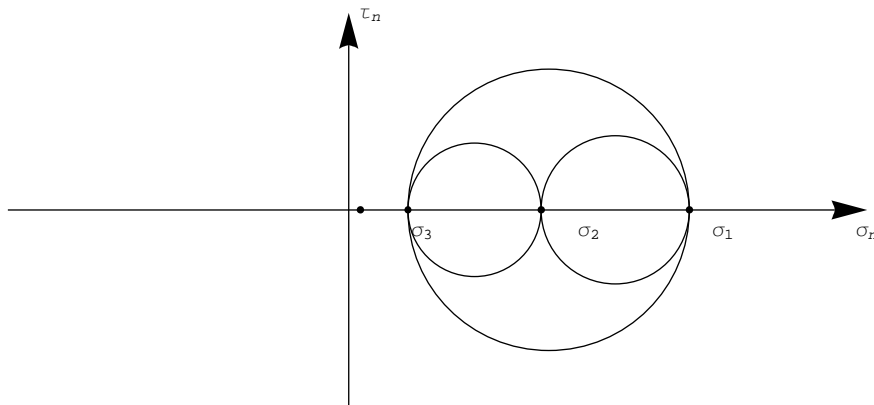
Si controlla che la matrice modale sia ortogonale:

```
Det[Nn]
```

```
-1.
```

Infine, si tracciano i tre cerchi principali di Mohr:

PrincipalMohrCircles[ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ]



**Figure**