
6 - Il principio dei lavori virtuali ed il procedimento di Lagrange

■ [A.a. 2013 - 2014 : ultima revisione 20 ottobre 2013]

In questa applicazione si utilizza il principio dei lavori virtuali per il calcolo di una singola reazione su una struttura isostatica. Il metodo, noto come procedimento di Lagrange, si articola nelle seguenti fasi:

- 1) Sia S una struttura isostatica, soggetta a determinati carichi, e sia R_i una generica reazione vincolare, corrispondente ad un vincolo V_i . Si elimini il vincolo V_i , rendendo quindi la struttura una volta labile
- 2) si traccia la deformata della struttura labile, e si scrive il lavoro (virtuale) delle forze e della reazione causato da questo cinematismo
- 3) si impone la condizione di equilibrio, annullando il lavoro calcolato al passo 2), e quindi ricavando il valore della reazione incognita.

Del tutto analogo è il procedimento per il calcolo di una caratteristica della sollecitazione interna in una sezione Σ della struttura:

1) Sia S una struttura isostatica, soggetta a determinati carichi, e sia Σ una generica sezione in cui si voglia conoscere una caratteristica della sollecitazione interna. Si operi una sconnessione in Σ , secondo il seguente schema:

1a) se si ricerca il momento flettente, si introduce una sconnessione di rotazione relativa, la sezione Σ diviene una cerniera, soggetta al momento flettente M incognito

1b) se si ricerca lo sforzo normale, si introduce una sconnessione di scorrimento assiale relativa, la sezione Σ diviene un bipendolo ad asse ortogonale all'asse della trave, soggetto allo sforzo normale N

1c) se si ricerca lo sforzo di taglio, si introduce una sconnessione di scorrimento trasversale relativa, la sezione Σ diviene un bipendolo ad asse parallelo all'asse della trave, soggetto allo sforzo di taglio T

2) si traccia la deformata della struttura labile, e si scrive il lavoro (virtuale) delle forze e della caratteristica, causato da questo cinematismo

3) si impone la condizione di equilibrio, annullando il lavoro calcolato al passo 2), e quindi ricavando il valore della caratteristica incognita

È evidente che il procedimento di Lagrange è tanto più conveniente quanto più è semplice tracciare il relativo cinematismo.

Il procedimento di Lagrange per il calcolo di una reazione

Si inizia con un esempio banale, su una trave ad una sola campata ad asse rettilineo:

■ Esempio 1

Si consideri la trave a mensola, di luce L , soggetta ad una forza in mezzera, ad una forza nell'estremo libero, e ad una coppia concentrata nell'estremo libero. Si voglia conoscere il valore della coppia reattiva dell'incastro.

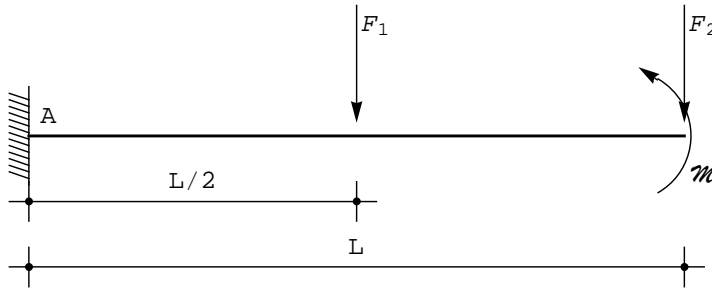


Figura 1 - Una trave a mensola

Rimuovendo il vincolo rotazionale in A, l'incastro si riduce ad un appoggio, carico dalla coppia reattiva \mathcal{M}_{rA} , il cui valore dovrà essere calcolato attraverso la scrittura del principio dei lavori virtuali. A ciò fare, si osservi che la struttura è divenuta una volta labile, ed è possibile tracciarne un cinematismo:

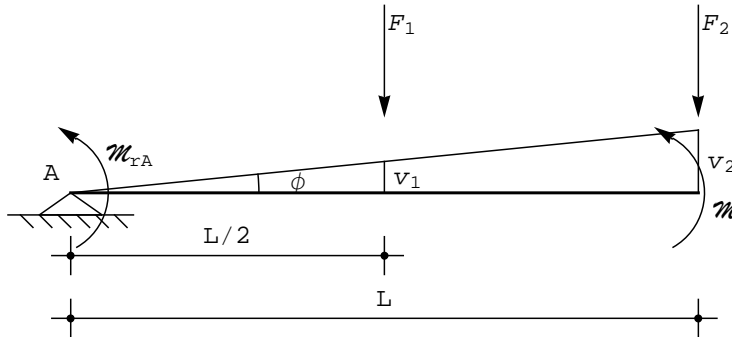


Figura 2 - Lo schema per il calcolo della coppia reattiva dell'incastro

Il principio dei lavori virtuali esprime la condizione di equilibrio della struttura, imponendo che sia nulla la parte del primo ordine del lavoro svolto da forze e reazioni:

$$L_v = \mathcal{M}_{rA} \phi + F_1 v_1 + F_2 v_2 + \mathcal{M} \phi = 0 \quad (1)$$

Si devono ora esprimere le quantità cinematiche in funzione di una singola coordinata lagrangiana, ad esempio l'angolo ϕ . Dovrà allora essere:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\phi \frac{L}{2} \\ v_2 &= -\phi L \end{aligned} \quad (2)$$

dove il segno negativo si giustifica in quanto a rotazioni positive (antiorarie) corrispondono spostamenti negativi (verso l'alto). Si noti che il principio dei lavori virtuali impone la scrittura delle (2), al posto delle corrispondenti relazioni trigonometriche:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\tan(\phi) \frac{L}{2} \\ v_2 &= -\tan(\phi) L \end{aligned} \quad (3)$$

in quanto si deve annullare solo la parte del primo ordine dello spostamento (atto di moto). La (1) diviene allora:

$$L_v = \mathcal{M}_{rA} \phi - F_1 \frac{L}{2} \phi - F_2 L \phi + \mathcal{M} \phi = 0 \quad (4)$$

ed attesa l'arbitrarietà di ϕ , si potrà dedurre il valore della coppia reattiva:

$$\mathcal{M}_{rA} = F_1 \frac{L}{2} + F_2 L - \mathcal{M} = 0 \quad (5)$$

■ Esempio 2

Si consideri ora la trave a tre luci di Figura 3, ovviamente isostatica, e si voglia calcolare la reazione dell'appoggio in B. Rimuovendo l'appoggio stesso, e sostituendolo con la reazione incognita R_B , la struttura diviene una volta labile, il centro C_1 del primo tratto e' situato in corrispondenza dell'appoggio in A, il centro relativo C_{12} e' situato nella cerniera, ed infine il centro assoluto C_2 del secondo tratto si situa nell'appoggio in D.

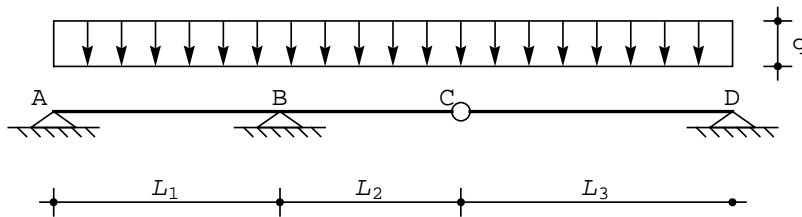


Figura 3 - Una trave a tre appoggi e cerniera

E' allora possibile tracciare una deformata, su cui calcolare il lavoro virtuale del carico distribuito e della reazione R_B . Si ha:

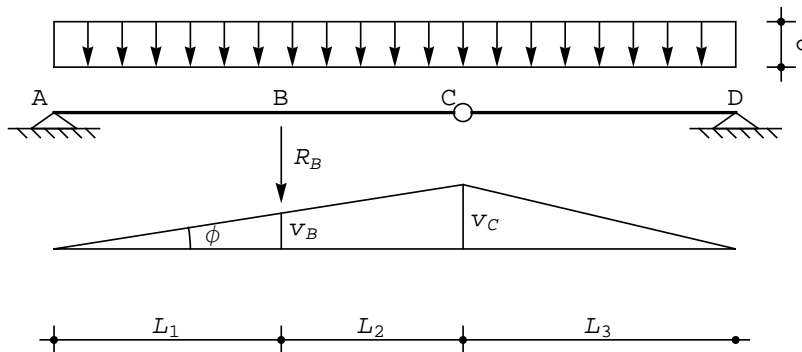


Figura 4 - Lo schema per il calcolo della reazione dell'appoggio in B

$$L_v = R_B v_B + q \int_0^{L_1+L_2+L_3} v \, dx_3 = 0 \quad (6)$$

Nel caso in esame, e' possibile ricavare dalla Figura 4:

$$\begin{aligned} v_B &= -L_1 \phi \\ v_C &= -(L_1 + L_2) \phi \end{aligned} \quad (7)$$

$$\int_0^{L_1+L_2+L_3} v \, dx_3 = -\frac{1}{2} (L_1 + L_2)^2 \phi - \frac{1}{2} (L_1 + L_2) L_3 \phi \quad (8)$$

e quindi :

$$R_B L_1 + q \frac{1}{2} (L_1 + L_2)^2 + \frac{1}{2} (L_1 + L_2) L_3 = 0 \quad (9)$$

da cui :

$$R_B = -\frac{1}{2} q \frac{(L_1 + L_2)^2}{L_1} - \frac{1}{2} (L_1 + L_2) \frac{L_3}{L_1} \quad (10)$$

■ Verifica

Utilizzando le equazioni cardinali della statica, dovranno scriversi le quattro condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} R_A + R_B + T_C + q(L_1 + L_2) &= 0 \\ -R_B L_1 - T_C (L_1 + L_2) - q \frac{(L_1 + L_2)^2}{2} &= 0 \\ -T_C + R_D + qL_3 &= 0 \\ -T_C L_3 + \frac{qL_3^2}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

dalla quarta puo' ricavarsi il taglio in C, che sostituito nella seconda fornisce la (10).

■ Esempio 3

Si vuole ora calcolare la reazione del pendolo EF sull'arco di Figura 5. Si tratta di un arco parabolico di luce L e freccia f, incernierato alle imposte e diviso in tre tratti dalla presenza di due cerniere poste a distanza L_1 ed $L_2 + L_2$ dalla cerniera di sinistra. Il pendolo EF insiste sul secondo tratto, ed e' inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale. La struttura e' soggetta ad un carico verticale uniformemente distribuito su tutta la luce, di intensita' q. La curva dell'arco e' quindi descritta dalla funzione parabolica:

$$g(z) = 4 \frac{f}{L^2} z (L - z) \quad (12)$$

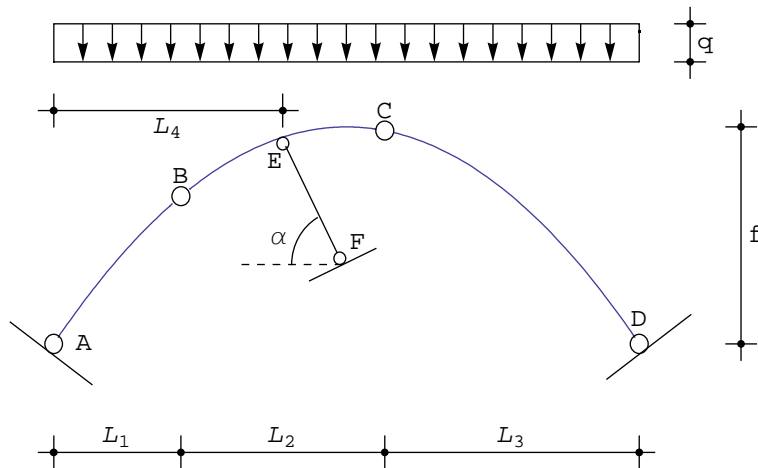


Figura 5 - Un arco a 4 cerniere e pendolo esterno

La struttura e' isostatica, in quanto possono scriversi nove equazioni di equilibrio nelle nove incognite (cinque reazioni esterne, due tagli e due sforzi normali nelle due cerniere interne), sicche' la reazione del pendolo puo' calcolarsi applicando il procedimento di Lagrange: si rimuove il pendolo, sostituendo ad esso la reazione incognita R_p , si traccia il cinematismo per la struttura labile cosi' ottenuta, e si annulla il lavoro virtuale del carico e della reazione R_p .

Il tracciamento della deformata

La ricerca dei centri di rotazione non presenta alcun problema: il centro di rotazione assoluto C_1 del primo tratto e C_3 del terzo tratto sono situati nelle cerniere A e D, rispettivamente, i due centri relativi C_{12} e C_{23} sono individuati nelle due cerniere interne B e C, mentre il centro di rotazione assoluto C_2 e' individuabile intersecando la retta che congiunge C_1 e C_{12} con la retta che congiunge C_{23} e C_3 .

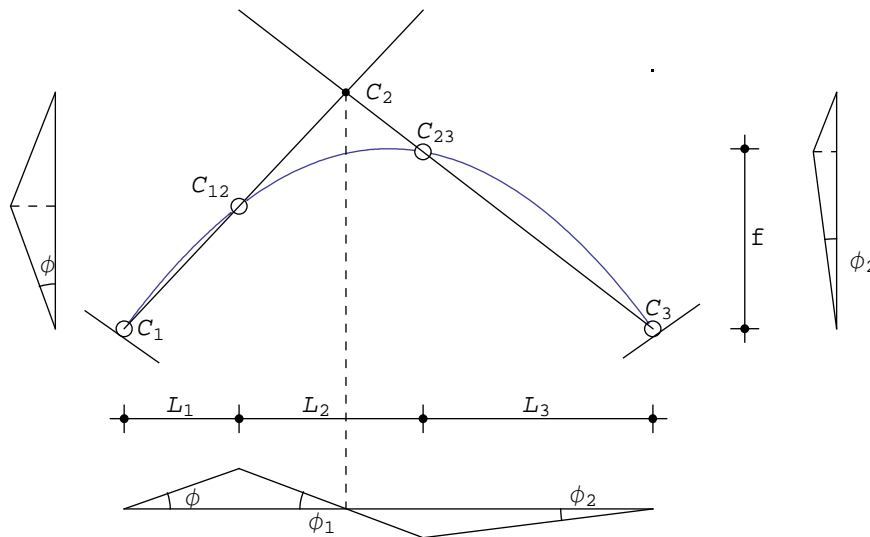


Figura 6 - Le deformate per l'arco a 4 cerniere

La retta a che passa per C_1 e C_{12} e' identificabile analiticamente come la retta che passa per i punti di coordinate $(0,0)$ ed $(L_1, g(L_1))$, e quindi avra' equazione:

$$Y_a(z) = \frac{g(L_1)}{L_1} z \quad (13)$$

mentre la retta b che passa per i punti C_{23} e C_3 e' identificabile analiticamente come la retta che passa per i punti di coordinate $(L_1 + L_2, g(L_1 + L_2))$ ed $(L, 0)$, e quindi avra' equazione:

$$Y_b(z) = \frac{g(L_1 + L_2)}{L_3} (L - z) \quad (14)$$

Infine, le coordinate del centro di rotazione assoluto C_2 si ottengono intersecando le rette a e b , e quindi puo' scriversi:

$$z_{C_2} = L_1 \frac{((L - g(L_1 + L_2)) - L_1 - L_2)}{L_3 g(L_1) + L_1 g(L_1 + L_2)} \quad (15)$$

$$Y_{C_2} = \frac{g(L_1)}{L_1} z_{C_2} = g(L_1) \frac{((L - g(L_1 + L_2)) - L_1 - L_2)}{L_3 g(L_1) + L_1 g(L_1 + L_2)} \quad (16)$$

Nota - Si ricorda che la retta passante per i punti di coordinate (z_1, y_1) e (z_2, y_2) e' esprimibile come:

$$Y(z) = \frac{Y_2 - Y_1}{z_2 - z_1} z + \frac{z_2 Y_1 - z_1 Y_2}{z_2 - z_1} \quad (17)$$

mentre l'intersezione I tra le due rette di equazioni :

$$\begin{aligned} Y_a(z) &= m_a z + n_a \\ Y_b(z) &= m_b z + n_b \end{aligned} \quad (18)$$

ha coordinate

$$\begin{aligned} z_I &= \frac{n_b - n_a}{m_a - m_b} \\ Y_I &= m_a \frac{n_b - n_a}{m_a - m_b} + n_a \end{aligned} \quad (19)$$

Si traccia ora il diagramma delle componenti verticali di spostamento, partendo dalla cerniera di sinistra, ed assegnando al primo tratto una rotazione arbitraria di ampiezza ϕ , positiva se antioraria. Lo spostamento verticale della cerniera in B sarà quindi pari a $-\phi L_1$, e la conoscenza di tale spostamento permette il tracciamento della deformata del secondo tratto, in quanto si conosce il punto di nullo, sulla verticale per C_2 . L'angolo ϕ_1 di cui ruota il secondo tratto è pari allora a:

$$\phi_1 = -\phi \frac{L_1}{z_{C_2} - L_1} \quad (20)$$

Lo spostamento verticale della cerniera in C è calcolabile come:

$$v_C = -\phi_1 \frac{L_1 + L_2}{z_{C_2}} = \phi \frac{L_1}{z_{C_2} - L_1} \frac{L_1 + L_2}{z_{C_2}} \quad (21)$$

e quindi l'angolo ϕ_2 di cui ruota il terzo tratto è pari a:

$$\phi_2 = \frac{v_C}{L_3} = -\phi_1 \frac{L_1 + L_2}{L_3 z_{C_2}} = \phi \frac{L_1}{L_3} \frac{L_1 + L_2}{(z_{C_2} - L_1) z_{C_2}} \quad (22)$$

Il diagramma delle componenti orizzontali di spostamento può tracciarsi analogamente: il primo tratto ruota dell'angolo ϕ , provocando uno spostamento orizzontale verso sinistra della cerniera B pari a:

$$w_B = -\phi g(L_1) \quad (23)$$

Il diagramma relativo al secondo tratto può tracciarsi dalla conoscenza di questo valore, e dalla conoscenza dell'ordinata del centro C_2 , dove lo spostamento si annulla. Si otterrà una retta inclinata dell'angolo ϕ_1 , che permetterà anche di leggere lo spostamento orizzontale della cerniera in C. Si può quindi tracciare anche la deformata relativa al terzo tratto, congiungendo tale valore con il punto di nullo in D, ed ottenendo una retta inclinata dell'angolo ϕ_2 .

■ La scrittura del lavoro virtuale

Se w_E e v_E indicano gli spostamenti orizzontali e verticali del punto di applicazione del pendolo, si avrà:

$$L_v = \alpha \int_0^L v(z) dz + R_{py} v_E + R_{pz} w_E = 0 \quad (24)$$

dove:

$$R_{py} = R_p \sin(\alpha)$$

$$R_{pz} = R_p \cos(\alpha)$$

Dalla Figura 6 si evince:

$$\int_0^L v(z) dz = \frac{1}{2} L_1 v_B + \frac{1}{2} (z_{C_2} - L_1) v_B + \frac{1}{2} (L_2 + L_1 - z_{C_2}) v_C + \frac{1}{2} L_3 v_C \quad (26)$$

ossia, in funzione dell'angolo arbitrario ϕ :

$$\int_0^L v(z) dz = -\frac{1}{2} L_1^2 \phi - \frac{1}{2} (z_{C_2} - L_1) L_1 \phi + \frac{1}{2} (L - z_{C_2}) \phi \frac{L_1}{L_3} \frac{L_1 + L_2}{(z_{C_2} - L_1) z_{C_2}} \quad (27)$$

Per quanto concerne invece le componenti di spostamento del punto di applicazione del pendolo, si potrà scrivere:

$$v_E = -\phi_1 (z_{C_2} - z_E) = \phi \frac{L_1}{z_{C_2} - L_1} (z_{C_2} - z_E) \quad (28)$$

$$w_E = -\phi_1 (y_{C_2} - y_E) = \phi \frac{L_1}{z_{C_2} - L_1} (y_{C_2} - y_E) \quad (29)$$

Ne segue, dalla (24) :

$$L_v = Q \left(-\frac{1}{2} L_1^2 - \frac{1}{2} (z_{C_2} - L_1) L_1 + \frac{1}{2} (L - z_{C_2}) \frac{L_1}{L_3} \frac{L_1 + L_2}{(z_{C_2} - L_1) z_{C_2}} \right) + R_{py} \frac{L_1}{z_{C_2} - L_1} (z_{C_2} - z_E) + R_{pz} \frac{L_1}{z_{C_2} - L_1} (y_{C_2} - y_E) = 0 \quad (30)$$

ossia ancora :

$$Q \left(-\frac{1}{2} L_1^2 - \frac{1}{2} (z_{C_2} - L_1) L_1 + \frac{1}{2} (L - z_{C_2}) \frac{L_1}{L_3} \frac{L_1 + L_2}{(z_{C_2} - L_1) z_{C_2}} \right) + R_{pz} \tan(\alpha) \frac{L_1}{z_{C_2} - L_1} (z_{C_2} - z_E) + R_{pz} \frac{L_1}{z_{C_2} - L_1} (y_{C_2} - y_E) = 0 \quad (31)$$

da cui subito la componente orizzontale della reazione :

$$R_{pz} = \frac{Q}{2} \frac{z_{C_2} - L_1}{(\tan(\alpha) (z_{C_2} - z_E) + (y_{C_2} - y_E)) \left(z_{C_2} - (L - z_{C_2}) \frac{L_1 + L_2}{L_3 (z_{C_2} - L_1) z_{C_2}} \right)} \quad (32)$$

ed infine :

$$R_{py} = R_{pz} \tan(\alpha) \quad (33)$$

$$R_p = \sqrt{R_{py}^2 + R_{pz}^2}$$

■ Un esempio numerico

Si consideri ora un arco con luce di 20 metri e freccia 5 metri, ipotizzando che le cerniere intermedie siano situate a 6 metri ed a 12 metri dall'imposta di sinistra. Il pendolo agisca invece all'imposta di sinistra, e sia inclinato di un angolo $\alpha = \pi/5$.

$$f = 6; L = 20; L_1 = 6; L_2 = 6; L_3 = 8; z_E = 7; \alpha = \pi / 5; q = 1;$$

$$g[z_-] := 4 \frac{f}{L^2} z (L - z)$$

$$z_C = N \left[L_1 \frac{(L g[L_1 + L_2] - L_1 - L_2)}{L_3 g[L_1] + L_1 g[L_1 + L_2]} \right]$$

$$8.26923$$

$$Y_C = \frac{g[L_1]}{L_1} z_C$$

$$6.94615$$

$$R_{pz} = \frac{q}{2} \frac{z_C - L_1}{(\tan[\alpha] (z_C - z_E) + (Y_C - g[z_E]))} \left(z_C - (L - z_C) \frac{L_1 + L_2}{L_3 (z_C - L_1) z_C} \right)$$

$$3.45407$$

$$R_{py} = R_{pz} \tan[\alpha]$$

$$2.50953$$

$$R_p = \sqrt{R_{py}^2 + R_{pz}^2}$$

$$4.26946$$

■ Esempio n .4

Si considera ora lo stesso arco parabolico dell'esempio precedente, ma vincolato a sinistra con un bipendolo a piano di scorrimento normale alla curva dell'asse. Inoltre, esso e' caricato da una forza F concentrata in corrispondenza della seconda cerniera, e da una coppia concentrata M agente sul terzo tratto.

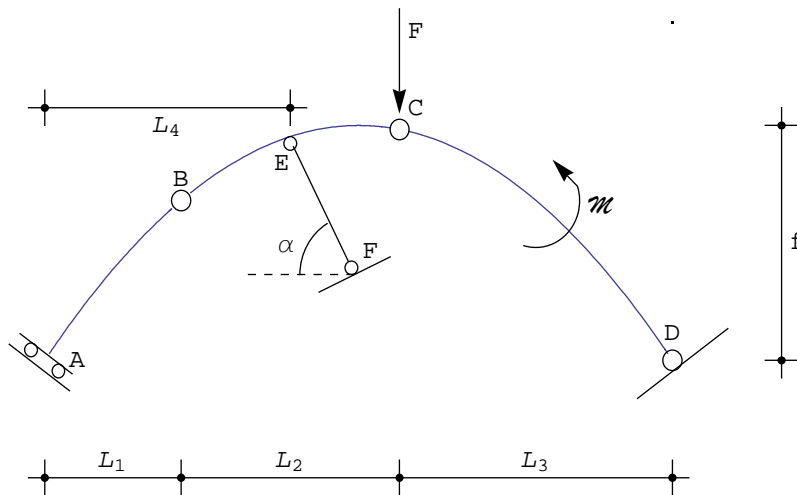


Figura 7 - Arco parabolico con bipendolo, tre cerniere e pendolo esterno

Eliminato il pendolo EF, la struttura diviene labile, e si deve tracciare il relativo cinematismo, individuando i centri e tracciando le relative deformate.

La presenza del bipendolo fissa il centro di rotazione C_1 nel punto improprio della retta tangente all'asse in A, ossia lungo la retta:

$$Y_1(z) = 4 \frac{f}{L} z \quad (34)$$

mentre i centri C_{12} , C_{23} e C_3 sono immediatamente situabili in corrispondenza delle cerniere in B, C e D. Ne segue che il centro di rotazione assoluto C_2 deve trovarsi sull'intersezione della retta a parallela alla (34), e passante per B, e la retta b passante per C e D. La retta a avr  equazione:

$$Y_a(z) = Y_B + (z - z_B) \frac{4f}{L} = g(L_1) + (z - L_1) \frac{4f}{L} \quad (35)$$

mentre la retta b avr  equazione fornita dalla (14):

$$Y_b(z) = \frac{g(L_1 + L_2)}{L_3} (L - z) \quad (36)$$

Nota - Si ricorda che una retta, passante per un punto di coordinate (x_1, y_1) e parallela alla retta di equazione $y(x) = m x + n$, avr  equazione:

$$y - y_1 = m (x - x_1) \quad (37)$$

L'intersezione fornisce le coordinate del centro C_2 :

$$z_{C_2} = \frac{L^2 g[L_1 + L_2] + (-L g[L_1] + 4f L_1) L_3}{L g[L_1 + L_2] + 4f L_3} \quad (38)$$

$$Y_{C_2} = \frac{g[L_1 + L_2] (L g[L_1] + 4f (L - L_1))}{L g[L_1 + L_2] + 4f L_3} \quad (39)$$

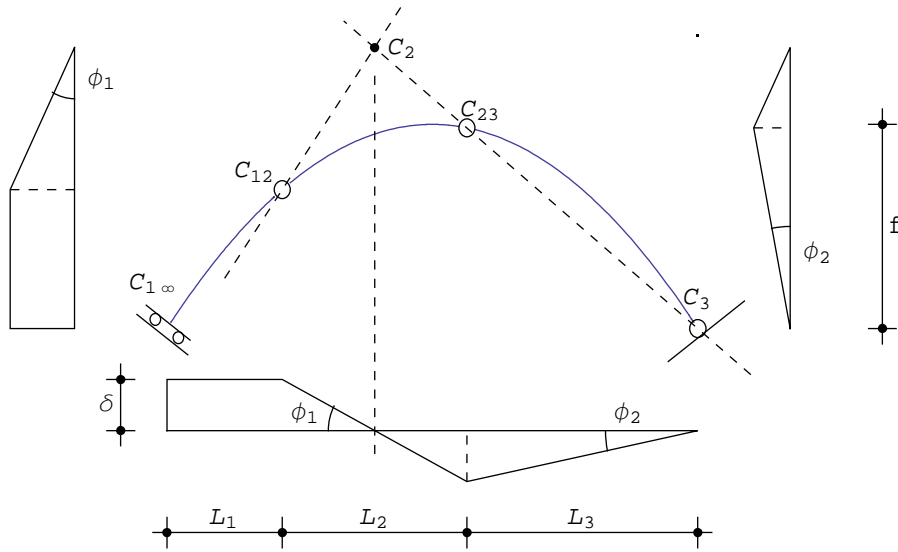


Figura 8 - Il cinematico per l'arco parabolico con bipendolo, tre cerniere e pendolo esterno

Si inizia ad imporre una componente verticale arbitraria δ allo spostamento del bipendolo, assumendo quindi δ come coordinata lagrangiana. Il punti del tratto I subiscono lo stesso abbassamento, sicché il diagramma prosegue costante fino a C_{12} . Per tracciare la deformata del secondo tratto, basta poi connettere questo valore con il punto di nullo in corrispondenza di C_2 , e proseguendo fino a C_{23} . Il tratto II ruota quindi di un angolo:

$$\phi_1 = \frac{\delta}{z_{C_2} - L_1} \quad (40)$$

e quindi lo spostamento verticale della cerniera C e' pari a :

$$v_C = \phi_1 (L_1 + L_2 - z_{C_2}) = \delta \frac{(L_1 + L_2 - z_{C_2})}{z_{C_2} - L_1} \quad (41)$$

Infine, il diagramma delle componenti verticali di spostamento lungo il terzo tratto non presenta difficoltà, dovendosi semplicemente congiungere l'abbassamento in C_{23} con il valore nullo in corrispondenza di C_3 . Il tratto III quindi ruota di un angolo:

$$\phi_2 = \frac{v_C}{L_3} = \frac{\delta}{L_3} \frac{(L_1 + L_2 - z_{C_2})}{z_{C_2} - L_1} \quad (42)$$

Per tracciare i diagrammi delle componenti orizzontali di spostamento, si parte dal tratto III, che ruota di ϕ_2 . Ne segue che lo spostamento orizzontale della cerniera C e' pari a:

$$w_C = \phi_2 g (L_1 + L_2) \quad (43)$$

Da qui in poi, si può tracciare la retta che giunge a zero in corrispondenza di y_{C_2} , fermo restando che tale diagramma ha significato solo fino alla chiave dell'arco. Infine, la parte di sinistra ruota dell'angolo ϕ_1 , permettendo il tracciamento del primo tratto di diagramma, da y_{C_2} a $g[L_1]$, per poi proseguire costante, in quanto il tratto I non ruota.

■ La scrittura del lavoro virtuale

Se w_E e v_E indicano gli spostamenti orizzontali e verticali del punto di applicazione del pendolo, si avrà:

$$L_v = F v_C + \mathcal{M} \phi_2 + R_{py} v_E + R_{pz} w_E = 0 \quad (44)$$

dove:

$$\begin{aligned} R_{py} &= R_p \sin (\alpha) \\ R_{pz} &= R_p \cos (\alpha) \end{aligned} \quad (45)$$

Dalla Figura 8 si evince:

$$v_E = -\phi_1 (z_{C_2} - z_E) = \frac{\delta}{z_{C_2} - L_1} (z_{C_2} - z_E) \quad (46)$$

$$w_E = -\phi_1 (y_{C_2} - y_E) = \frac{\delta}{z_{C_2} - L_1} (y_{C_2} - y_E) \quad (47)$$

e quindi, utilizzando le (41-42):

$$\begin{aligned} L_v &= F \delta \frac{(L_1 + L_2 - z_{C_2})}{z_{C_2} - L_1} + \mathcal{M} \frac{\delta}{L_3} \frac{(L_1 + L_2 - z_{C_2})}{z_{C_2} - L_1} + \\ &R_{py} \frac{\delta}{z_{C_2} - L_1} (z_{C_2} - z_E) + R_{pz} \frac{\delta}{z_{C_2} - L_1} (y_{C_2} - y_E) = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

ossia ancora:

$$\begin{aligned} L_v &= F (L_1 + L_2 - z_{C_2}) + \frac{\mathcal{M}}{L_3} (L_1 + L_2 - z_{C_2}) + \\ &R_{pz} \tan (\alpha) (z_{C_2} - z_E) + R_{pz} (y_{C_2} - y_E) = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

da cui subito la componente orizzontale della reazione :

$$R_{pz} = - \left(F + \frac{\mathcal{M}}{L_3} \right) \frac{(L_1 + L_2 - z_{C_2})}{(\tan (\alpha) (z_{C_2} - z_E) + (y_{C_2} - y_E))} \quad (50)$$

ed infine :

$$\begin{aligned} R_{py} &= R_{pz} \tan (\alpha) \\ R_p &= \sqrt{R_{py}^2 + R_{pz}^2} \end{aligned} \quad (51)$$

- Un esempio numerico
- Calcolo

Esempio n .5

Si consideri il portale zoppo di Figura 9, incernierato a sinistra e con carrello a destra, soggetto ad una forza verticale F agente a distanza L_1 dalla cerniera a sinistra, e ad una forza orizzontale F_1 agente in sommità' del ritto di sinistra. Si voglia la reazione del carrello di destra.

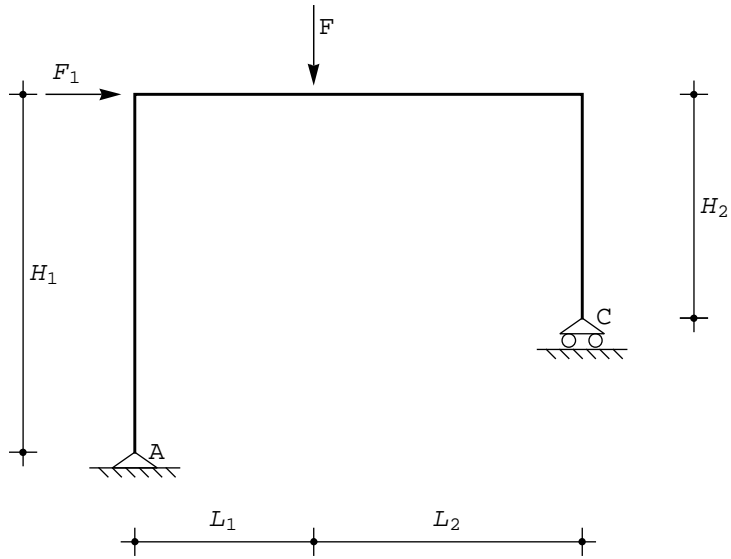


Figura 9 - Un portale zoppo

La struttura e' manifestamente isostatica, ed eliminando il carrello in C essa si trasforma in una struttura labile, il cui cinematismo puo' essere disegnato come in Figura 10.

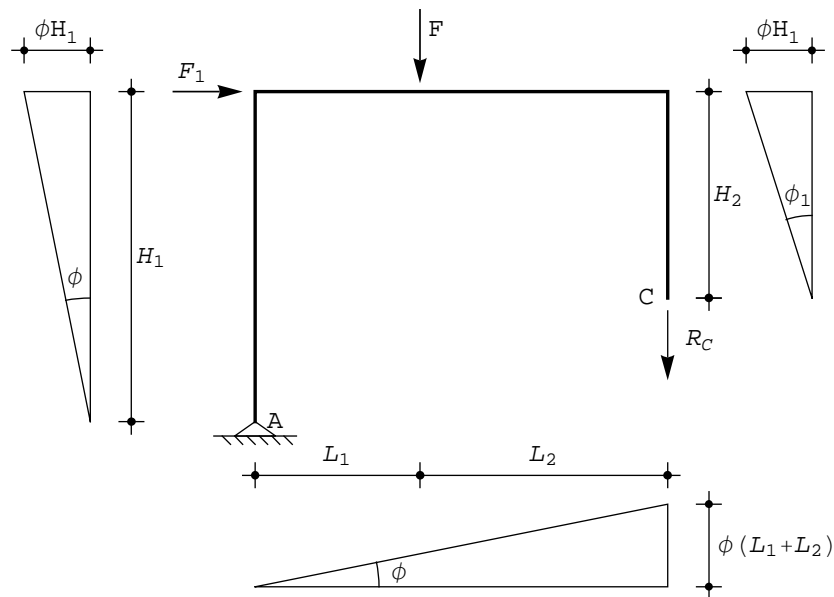


Figura 10 - Il cinematismo per il portale zoppo di Figura 9

La scrittura del lavoro virtuale risulta immediata:

$$L_v = - F \phi L_1 - R_C \phi (L_1 + L_2) - F_1 \phi H_1 = 0 \quad (52)$$

da cui subito la reazione del carrello :

$$R_C = - F \frac{L_1}{L_1 + L_2} - F_1 \frac{H_1}{L_1 + L_2} \quad (53)$$

Il procedimento di Lagrange per il calcolo di una c.s.i.

Si illustrano ora alcuni esempi di applicazione del metodo di Lagrange per il calcolo di una caratteristica della sollecitazione interna.

■ Esempio n. 6

Come primo, immediato esempio, si consideri la trave di Figura 11, incastrata a sinistra, appoggiata a destra, e con cerniera intermedia a distanza L_1 dall'incastro. Si voglia calcolare il momento flettente nella generica sezione S appartenente alla semiluce di sinistra della trave, ossia posta a distanza z dall'incastro, con $z < L_1$.

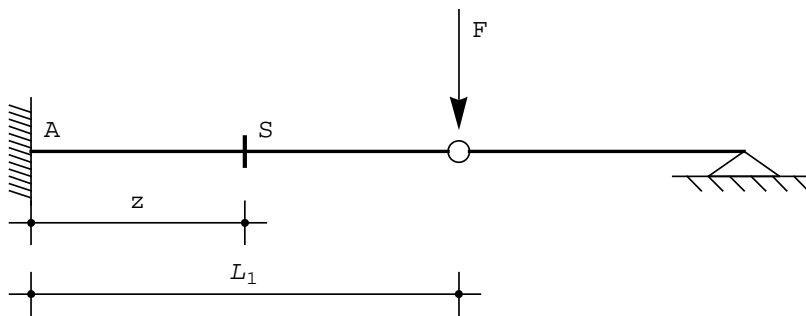


Figura 11 - Una semplice trave con incastro ed appoggio, e cerniera intermedia

Secondo la procedura sopra illustrata, si inserisce una cerniera in S, insieme al momento flettente $M(z)$ incognito, e si traccia un possibile cinematismo della risultante struttura labile:

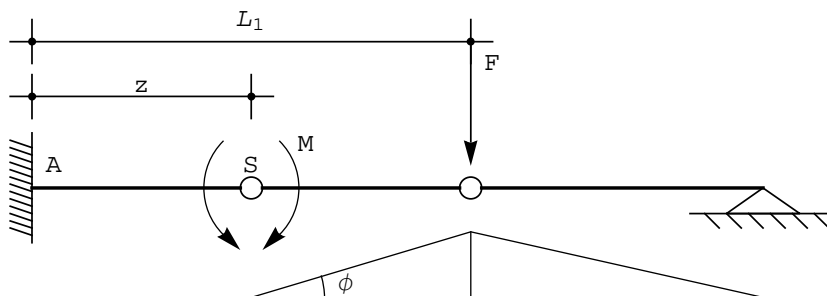


Figura 12 - Il cinematismo della trave di Figura 11

La scrittura del principio dei lavori virtuali e' immediata :

$$L_v = -M \phi - F \phi (L_1 - z) = 0 \quad (54)$$

da cui:

$$M(z) = -F(L_1 - z) \quad (55)$$

Si noti che quando la sezione S coincide con la sezione di incastro, si ottiene $M(0) = -F L_1$, mentre in corrispondenza della forza si ritrova un momento nullo. Si puo' quindi tracciare il diagramma del momento per l'intera semiluce di sinistra.

Esercizio - Determinare il taglio nella stessa sezione S

Esercizio - Verificare che il momento sulla semiluce di destra e' identicamente nullo

■ **Esempio n. 7** -

Si voglia ora conoscere il diagramma del taglio per la trave appoggiata con sbalzo di Figura 13, soggetta ad un carico uniformemente distribuito su tutta la luce. A far cio', si scelga una sezione all'ascissa generica $z < L_1$, e si introduca in z un bipendolo ad asse verticale, insieme alla forza di taglio $T(z)$

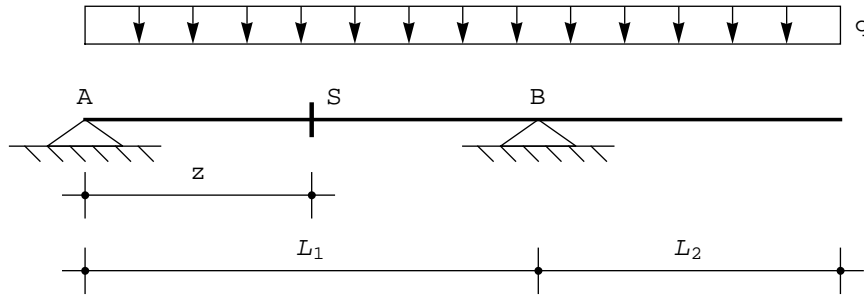


Figura 13 - Una trave appoggiata con sbalzo

La risultante struttura presenta una labilita', ed un suo possibile cinematismo e' disegnato in Figura 14: assegnata una rotazione di ampiezza arbitraria ϕ al primo tratto, la faccia di sinistra del bipendolo si alzerà della quantita' ϕz . Il secondo tratto sara' anch'esso ruotato dello stesso angolo ϕ , e quindi la faccia di destra del bipendolo si abbassera' di $\phi (L_1 - z)$.

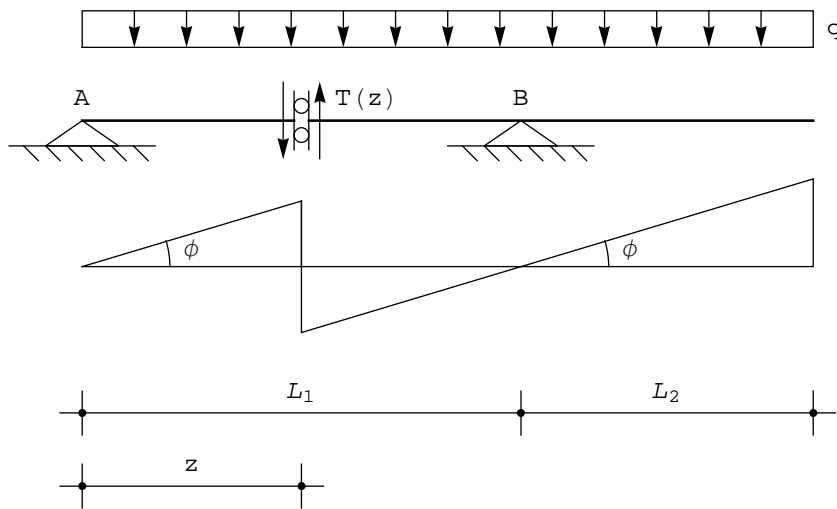


Figura 14 - Il cinematismo della trave di Figura 13

La scrittura del principio dei lavori virtuali non presenta difficolta' :

$$L_v = -T(z) \phi z - T(z) \phi (L_1 - z) + \int_0^z q v(z) dz + \int_z^{L_1} q v(z) dz + \int_{L_1}^{L_1+L_2} q v(z) dz = 0 \tag{56}$$

e semplificando :

$$L_v = -T(z) \phi L_1 + q \int_0^z v(\xi) d\xi + q \int_z^{L_1} v(\xi) d\xi + q \int_{L_1}^{L_1+L_2} v(\xi) d\xi = 0 \quad (57)$$

$$L_v = -T(z) \phi L_1 - q \phi \frac{z^2}{2} + q \phi \frac{(L_1 - z)^2}{2} - q \phi \frac{L_2^2}{2} = 0 \quad (58)$$

da cui :

$$T(z) = -\frac{q}{2} \left(\frac{z^2}{L_1} + \frac{(L_1 - z)^2}{L_1} - \frac{L_2^2}{L_1} \right) \quad (59)$$

Esercizio - Completare l'esercizio individuando una sezione S sullo sbalzo, ossia per $z > L_1$.

Figure

Calcolo