5 - Sul grado di labilita' ed iperstaticita'

- **[A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 14 ottobre 2012]**

Una struttura e' labile se presenta una possibilita' di meccanismo rigido, e' isostatica se e' possibile calcolare le reazioni vincolari con l'ausilio delle sole equazioni della statica, e ' iperstatica se presenta una sovrabbondanza di vincoli, e le equazioni della statica non sono sufficienti per la determinazione delle reazioni.

Si e' visto che la classificazione delle strutture in base al loro grado di labilita' l ed iperstaticita' i e' usualmente molto agevole: basta contare i t tratti rigidi in cui la struttura e' suddivisa dai vincoli interni, contare gli s gradi di liberta' soppressi da ciascun vincolo - esterno ed interno - e valutare la differenza $3t$-s. Se tale differenza e' maggiore di zero, la struttura e' labile, se e' minore di zero, la struttura e' iperstatica:

$$\begin{aligned} 3t - s > 0 &\longrightarrow \text{struttura labile} \\ 3t - s < 0 &\longrightarrow \text{struttura iperstatica} \\ 3t - s = 0 &\longleftarrow \text{struttura isostatica} \end{aligned} \tag{1}$$

Queste tre implicazioni valgono solo nel verso indicato, perche' una struttura puo' essere contemporaneamente labile - ossia presentare la possibilita' di un meccanismo rigido - ed iperstatica - ossia presentare una ridondanza di vincoli. In tal caso diviene necessario uno studio piu' approfondito della struttura, e non ci si puo' piu' limitare ad un semplice computo di tratti, vincoli e gradi di liberta'. A questo tipo di strutture verra' dedicata la prima parte del presente capitolo.

Si e' poi finora presupposto che i vincoli fossero ben disposti, e che quindi le equazioni che li definiscono fossero (linearmente) indipendenti, dando luogo ad una matrice cinematica (o di equilibrio) di rango massimo. In questo capitolo si illustreranno alcuni casi in cui i vincoli sono mal disposti, e quindi inefficaci.

Un cenno meritano anche i cosiddetti *vincoli multipli*, come - ad esempio - una cerniera in cui convergono piu' di due tratti rigidi, che possono talvolta generare confusione, ed a cui vengono dedicati alcuni esempi.

Infine, si introducono alcune semplificazioni per casi speciali: il riconoscimento del carattere di una struttura attraverso la similitudine con casi gia' noti, il caso classico di trave ad asse rettilineo soggetto a forze trasversali e coppie, introducendo un conteggio *ad hoc* del numero di gradi di liberta' e del numero di vincoli, e lo studio delle travature reticolari a maglie triangolari.

Esempio n .1

Si consideri il portale di Figura 1, costituito da tre tratti rigidi connessi tra loro con due cerniere in B ed E, ed al suolo con due appoggi in A ed F. Senza il pendolo CD, la struttura e' *manifestamente* labile, in quanto possiede 3t = 9 gradi di liberta', e possono scriversi solo s = 8 equazioni di vincolo.
Introducendo il pendolo CD, si introduce anche una equazione di vincolo, sicche' 3t-s = 0, e la struttura e' *potenzialmente* isostatica: tuttavia, se il pendolo collega due punti di uno stesso tratto rigido, come in Figura, esso e' inefficace, come puo' facilmente controllarsi scrivendo le equazioni di equilibrio del secondo tratto. Ne segue che la struttura di Figura e' una volta labile ed una volta iperstatica.

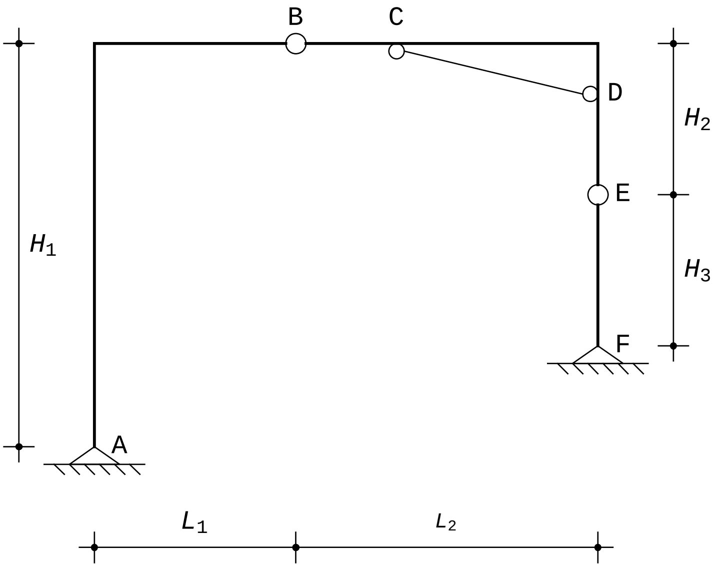

Figura 1 - Un portale a quattro cerniere con pendolo inefficace, l=1,i=1

Esempio n .2

Il portale di Figura 2 e' costituito da quattro tratti rigidi, connessi al suolo da un appoggio sulla sinistra ed un incastro a destra. In assenza del pendolo HK si ha $3t$ = 12, mentre i vincoli sopprimono 11 gradi di liberta', due in ciascuna delle cerniere nell'appoggio in A, tre nell'incastro in E. Introducendo il pendolo si ottiene quindi la relazione $3t$-s=0, ma nella situazione di figura esso e' palesemente inefficace, in quanto il punto K appartiene al tratto DE, che non si muove a causa dell'incastro, e quindi la reazione del pendolo e' nulla

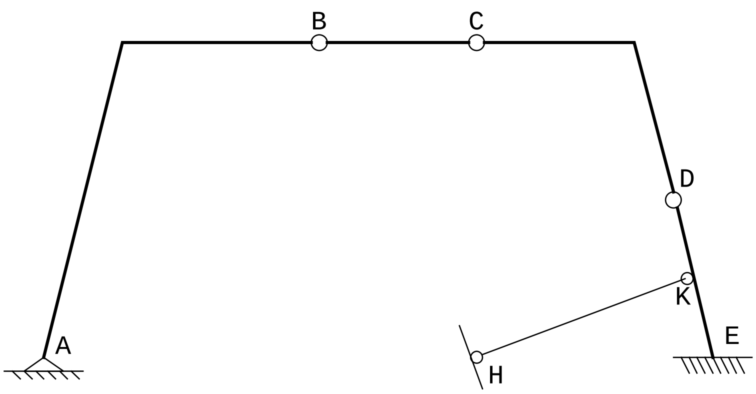

Figura 2 - Un portale a quattro cerniere ed incastro, con pendolo inefficace, l=1,i=1

Esempio n .3

Il portale di Figura 3 e' incastrato al piede, e vede tre cerniere a dividere la struttura in quattro tratti. Un veloce computo dei vincoli porta a scrivere $3t$ = 12, ed s = 12, quindi la relazione necessaria di isostaticita' e' soddisfatta, $3t$ - s = 0. Tuttavia, la presenza di tre cerniere allineate lungo il traverso implica la possibilita' di un meccanismo rigido con abbassamento della cerniera centrale, e quindi la struttura e' labile ed iperstatica allo stesso tempo

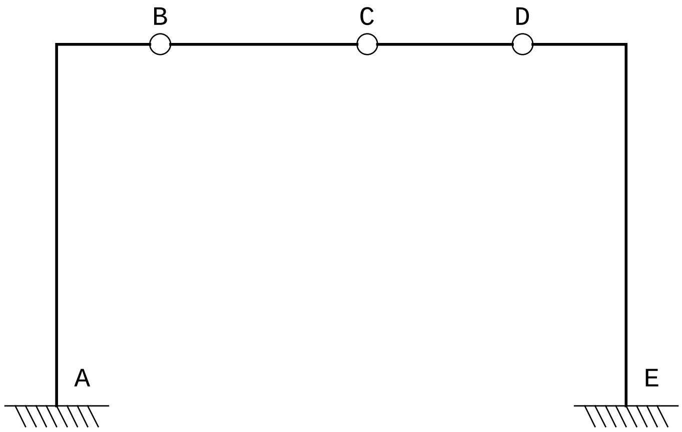

Figura 3 - Un portale incastrato al piede, con tre cerniere mal disposte

Esempio n .4

Un esempio piu' complesso e' riportato in Figura 4.

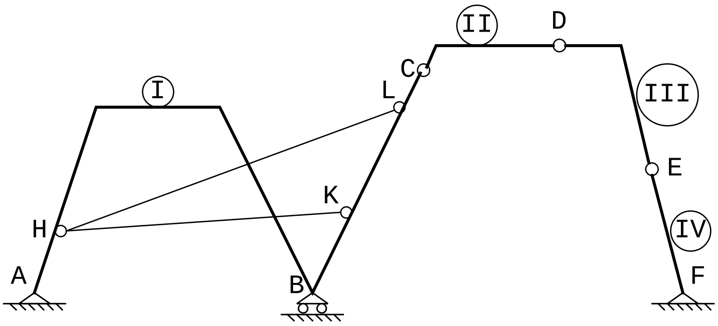

Figura 4a) - Un portale doppio una volta iperstatico: il pendolo HK puo' essere rimosso senza pregiudicare l'equilibrio

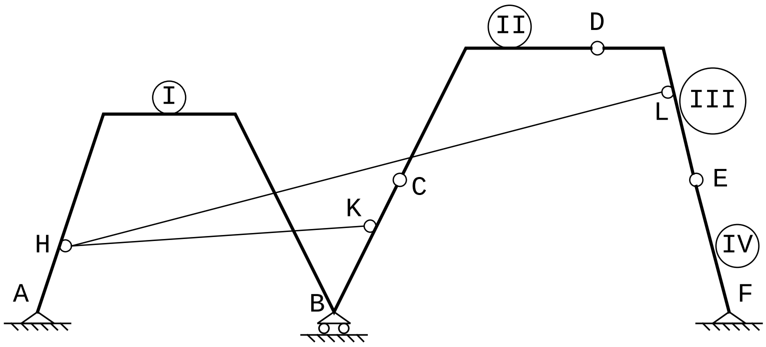

Figura 4b) - Un portale doppio una volta labile e due volte iperstatico: la labilita' risiede nell'arco a quattro cerniere CDEF

Si puo' agevolmente contare quattro tratti rigidi, e quindi $3t = 12$, mentre i vincoli sopprimono 13 gradi di liberta', e quindi la struttura e' sicuramente iperstatica. La differenza tra i due schemi risiede nella disposizione dei due pendoli: nel primo caso si puo' rimuovere il pendolo HK, giungendo ad una struttura isostatica, e quindi la struttura di Figura 4a) e' una volta iperstatica, l=0, i=1. Nel secondo caso, invece, la presenza dell'arco a quattro cerniere CDEF implica la presenza di una labilita', e quindi la struttura di Figura 4b) e' una volta labile e due volte iperstatica, l=1 ed i=2

Vincoli multipli

Si considerano in questa sezione alcuni vincoli multipli, che potrebbero generare perplessita' nel calcolo dei gradi di liberta' soppressi. Un primo caso , in Figura 5a), e' quello di una cerniera interna in cui concorrono n tratti rigidi. Considerando che per ogni coppia di tratti possono imporsi due condizioni di vincolo, esprimenti l'annullarsi degli spostamenti relativi, sembrerebbe che la cerniera multipla sopprima 2n gradi di liberta'. Tuttavia, l'annullarsi degli spostamenti relativi tra il primo e l'ultimo tratto e' gia' implicito nelle precedenti equazioni di vincolo, e quindi una cerniera interna che connette n aste, sopprime un totale di 2(n-1) gradi di liberta'. Nel caso in Figura, n = 8 e quindi i gradi di liberta' soppressi sono 14.

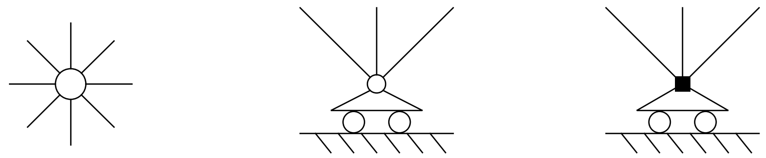

Figura 5 - Alcuni vincoli multipli e vincoli misti

In Figura 5 b) e' presentato un vincolo misto, ossia una cerniera cui sono connessi n tratti, riposante su un carrello a piano di scorrimento orizzontale. Analizzando separatamente la cerniera multipla, ed il carrello, si vede che il vincolo sopprime globalmente 2n-1 gradi di liberta'.

In Figura 5c), invece, gli n tratti convergono in un punto, vincolato con un carrello. In questo caso il punto di intersezione degli n tratti e' da considerare un incastro, e per esso possono scriversi 3(n-1) equazioni di vincolo linearmente indipendenti, cui va aggiunto il grado di liberta' soppresso dal carrello. In totale, quindi, il vincolo di Figura 5c) sopprime 3n-2 gradi di liberta'.
Situazioni simili possono essere esaminate secondo queste linee guida.

Il caso delle travi ad asse rettilineo in assenza di forze orizzontali

E' opportuno accennare ora ad alcune strutture particolari, per cui talvolta viene utilizzata una formula semplificata di calcolo del grado di labilita'/iperstaticita'.
Si consideri infatti una trave ad asse rettilineo, soggetta a forze trasversali e/o coppie concentrate agenti nel piano della trave, mentre si suppongono assenti le forze agenti secondo l'asse della trave. In tale ipotesi, le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale sono automaticamente soddisfatte, e per ciascun tratto possono scriversi due equazioni di equilibrio non banali. Corrispondentemente, i vincoli vanno ripensati, eliminando dal computo dei gradi di liberta' soppressi quelli relativi agli spostamenti orizzontali; ne segue che scompare la differenza tra appoggio e carrello a piano di scorrimento orizzontale, che una cerniera interna e' definita da due forze verticali uguali e contrarie, che un bipendolo interno reagisce con due coppie, che l'incastro elimina due gradi di liberta', e cosi' via.

Esempio n. 5

La trave di Figura 6 puo' essere facilmente analizzata secondo la classica e generale formula $3t\text{-}s = l\text{-}i$; considerato che esso e' costituita da 4 tratti, si potranno scrivere dodici equazioni di equilibrio. Corrispondentemente, il carrello in A identifica una reazione verticale, le due cerniere in B e D identificano due reazioni ciascuna, il bipendolo esterno in C e' definito dalla corrispondente coppia reattiva, il bipendolo interno equivale ad una coppia ed una forza orizzontale reattiva, i due appoggi a due reazioni ciascuno. In totale si possono quindi identificare dodici reazioni, e la condizione necessaria di isostaticita' e' soddisfatta: $3t\text{-}s=0$.

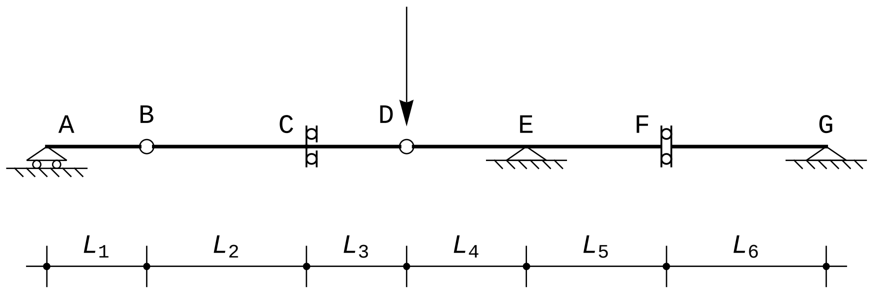

Figura 6 - Una trave ad asse rettilineo

Tuttavia, e' immediato realizzare che la trave in oggetto e' una volta labile, e quindi anche una volta iperstatica. Scrivendo infatti le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale, si ha un sistema di quattro equazioni in cinque incognite:

$$\begin{aligned}
&R_{BH} = 0\\
&-R_{BH} + R_{DH} = 0\\
&-R_{DH} + R_{EH} + R_{FH} = 0\\
&-R_{FH} + R_{GH} = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Non essendoci forze orizzontali applicate, le cinque reazioni possono essere supposte nulle.
Se si utilizza la formula semplificata $2t\text{-}s=l\text{-}i$, si scrivono otto equazioni di equilibrio, quattro alla traslazione verticale e quattro di rotazione, mentre le incognite reattive sono le tre reazioni verticali dei tre appoggi A, B e G (scompare la differenza tra carrello ed appoggio), le forze verticali reattive in B e D, le coppie reattive in C ed F, per un totale di sette incognite. Si ha cosi' $2t\text{-}s= 1$, e la struttura e' una volta labile.

Il caso delle travature reticolari

Un altro caso di particolare interesse e' quello delle travature reticolari, intendendosi per tali le strutture costituite da tratti rigidi collegati tra loro tramite cerniere, e caricate solo con forze concentrate nelle cerniere. Per esse il calcolo del grado di labilita'/iperstaticita' puo' essere certamente condotto attraverso la formula generale. Ad esempio, nel caso di Figura 7, si hanno 15 tratti e quindi la struttura non vincolata ha 45 gradi di liberta'. I vincoli sono rappresentati da due cerniere in cui concorrono due tratti, due cerniere in cui concorrono tre tratti, e cinque cerniere in cui concorrono quattro tratti.In totale i vincoli interni sopprimono $2 \times 2 + 2 \times 4 + 5 \times 6 = 42$ gradi di liberta', cui andranno aggiunti i tre gradi di liberta' soppressi dai vincoli esterni. Ne segue che e' soddisfatta la condizione necessaria di isostaticita'.

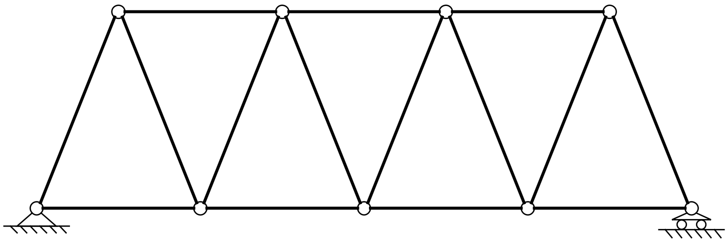

Figura 7 - Una travatura reticolare

E' pero' possibile semplificare il calcolo riguardando la travatura reticolare come un insieme di *c* punti materiali, le cerniere, connesse da *a* aste, che si comportano da pendoli. In tal modo la struttura non vincolata avra' 2*c* gradi di liberta', cui andranno sottratti gli *a* gradi di liberta' dei vincoli interni, ed i *v* gradi di liberta' dei vincoli esterni. Si ha quindi la formula semplificata:

$$2c - a - v = l - i \tag{3}$$

sicuramente molto piu' agevole della formula generale. Nella struttura di Figura 7, ad esempio, si ha *c* = 9, *a* = 15 e *v* = 3, per cui subito: 18-15-3=0

Figure