

# 4 - Analisi statica delle strutture

## Metodo grafico

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 20 settembre 2011]

Come si è visto nell' Applicazione precedente, ciascun vincolo esterno o interno può essere sostituito dalle reazioni da esso esplicitate. Ad esempio, un carrello può essere sostituito da una forza - di valore incognito - ortogonale al piano di scorrimento del carrello stesso, mentre il valore della forza deve essere poi calcolato imponendo le equazioni di equilibrio. Analogamente, un appoggio è equivalente a due forze incognite, un incastro a due forze ed una coppia, etc. Sostituite le reazioni ai vincoli, si possono imporre le condizioni di equilibrio, tratto per tratto, tra le reazioni e le forze applicate.

In questa Applicazione si imporranno tali equilibri in forma grafica, tenendo conto che:

- un carrello definisce la retta d'azione della reazione, che passa per il carrello ed è ortogonale al piano di scorrimento
- un doppio bipendolo fornisce una coppia reattiva
- un appoggio, o una cerniera interna, può essere visto come equivalente ad una forza appartenente ad una retta che passa per l'appoggio (o per la cerniera), la cui direzione viene definita imponendo l'equilibrio
- un bipendolo, esterno o interno, può essere visto come equivalente ad una forza appartenente ad una retta ortogonale all'asse di scorrimento dei bipendoli, la cui posizione viene definita imponendo l'equilibrio
- un incastro è equivalente ad una retta di cui non è noto a priori né la direzione né la posizione, che dovranno calcolarsi in base alle condizioni di equilibrio

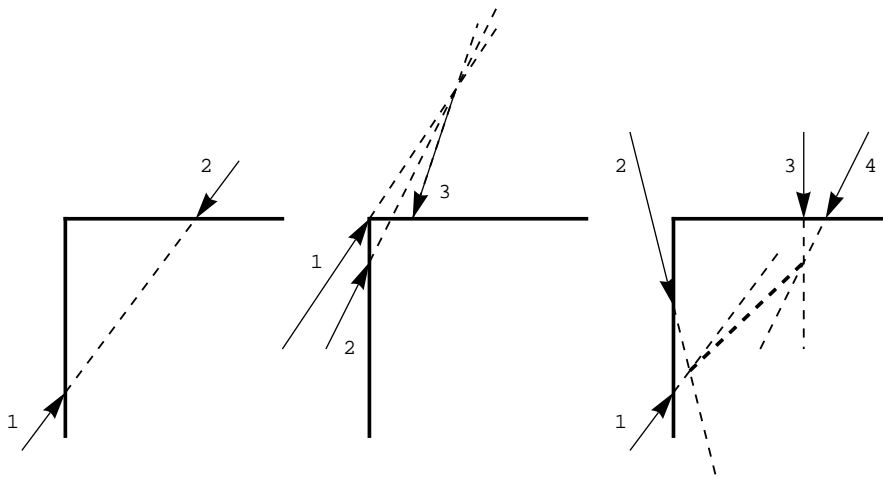


Figura 1 - Condizioni di equilibrio per tratto rigido soggetto a due, tre e quattro forze

Operate queste sostituzioni, le forze agenti su ciascun tratto rigido devono essere equilibrate, e possono presentarsi i seguenti casi:

- tratto rigido soggetto a 2 forze: per l'equilibrio, esse devono avere la stessa retta d'azione
- tratto rigido soggetto a 3 forze: per l'equilibrio, esse devono concorrere in un punto
- tratto rigido soggetto a 4 forze: per l'equilibrio, la risultante di due di esse deve avere la stessa retta d'azione della risultante delle altre due forze
- tratto rigido soggetto a 2 forze ed una coppia: per l'equilibrio, le due forze devono essere parallele, dirette in verso opposto, e a distanza tale da bilanciare la coppia

- tratto rigido soggetto a 3 forze ed una coppia: per l'equilibrio, la risultante di due forze deve risultare parallela alla terza, e giacere a distanza tale da bilanciare la coppia

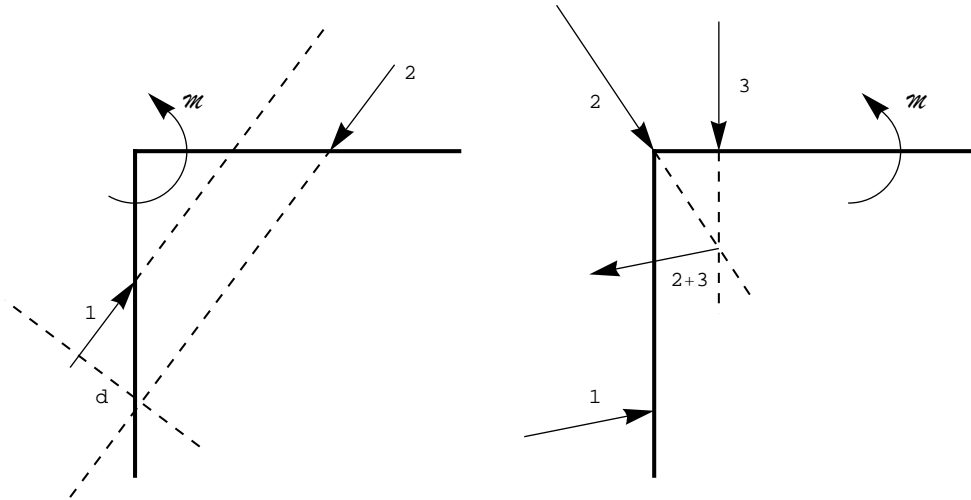


Figura 2 - Condizioni di equilibrio per tratto rigido soggetto a due forze ed una coppia, oppure tre forze ed una coppia

## Esercizio n .1

Si consideri il semplice portale di Figura 3, e si vogliono ricavare le reazioni con il metodo grafico. Il primo tratto e' soggetto ad una forza  $R_A$  passante per l'appoggio in A, alla forza F, e ad una forza orizzontale  $R_B$ , che rappresenta la reazione del bipendolo, senza che peraltro si conosca l'inclinazione della forza passante per A, ne' l'effettiva posizione della forza orizzontale.

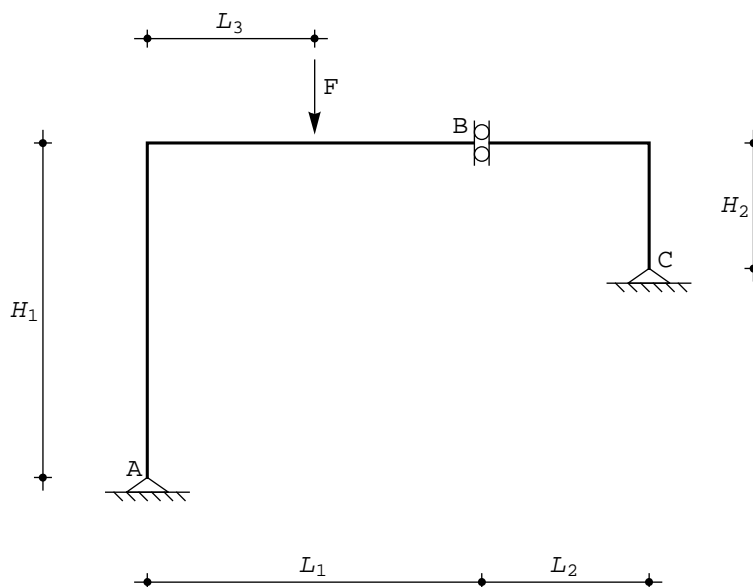


Figura 3 - Un portale zoppo con bipendolo interno

Il secondo tratto e' invece soggetto a due forze, la prima sicuramente orizzontale, la seconda,  $R_C$ , sicuramente passante per l'appoggio C. Si rientra nel caso a) della Figura 1, e quindi  $R_B$  ed  $R_C$  devono essere

situate sulla retta orizzontale passante per C. Conoscendo ora la retta d'azione di  $R_B$ , il primo tratto puo' essere considerato nella situazione b) della Figura 1. Ne segue che la reazione  $R_A$  dovra' passare per l'intersezione tra la retta di azione di F, e l'orizzontale per C. La sua retta d'azione e' cosi' determinata, ed un banale triangolo di equilibrio fornisce il loro effettivo valore, come illustrato in Figura 4.

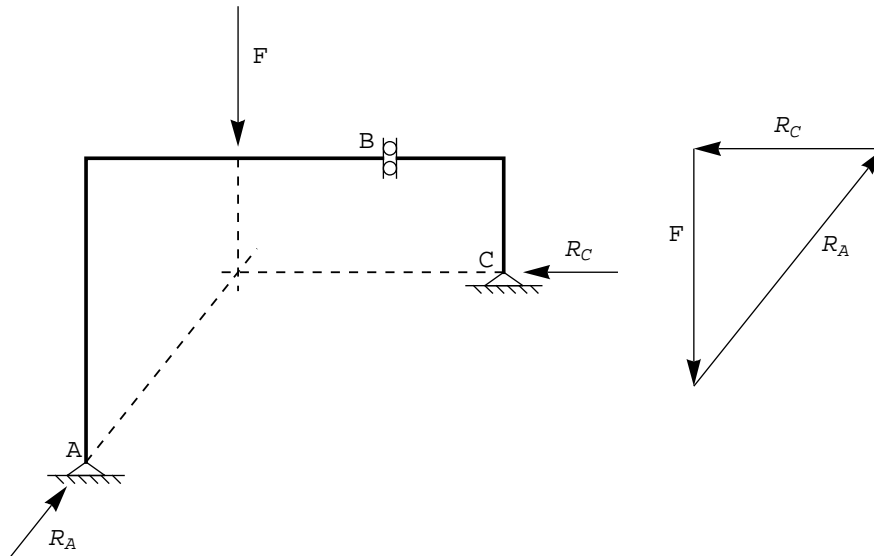


Figura 4 - La determinazione grafica delle reazioni per il telaio di Figura 3

Dal grafico possono, se necessario, trarsi informazioni analitiche: la retta d'azione della forza ha equazione  $z = L_3$ , la retta d'azione di  $R_C$  ha equazione  $y = H_2 - H_1$ , quindi il punto di intersezione ha coordinate  $(L_3, H_2 - H_1)$ . Ne segue che la retta d'azione di  $R_A$  deve passare per l'origine  $(0,0)$  e per il punto  $(L_3, H_2 - H_1)$ , e quindi ha equazione:

$$y(z) = \frac{H_2 - H_1}{L_3} z \quad (1)$$

E' tuttavia opportuno notare che queste deduzioni analitiche non sono affatto nello spirito dell' approccio grafico.

## Esercizio n .2

La struttura di Figura 5 differisce dalla struttura precedente sia nelle condizioni di vincolo (bipendolo a sinistra anziche' appoggio), sia nelle condizioni di carico.

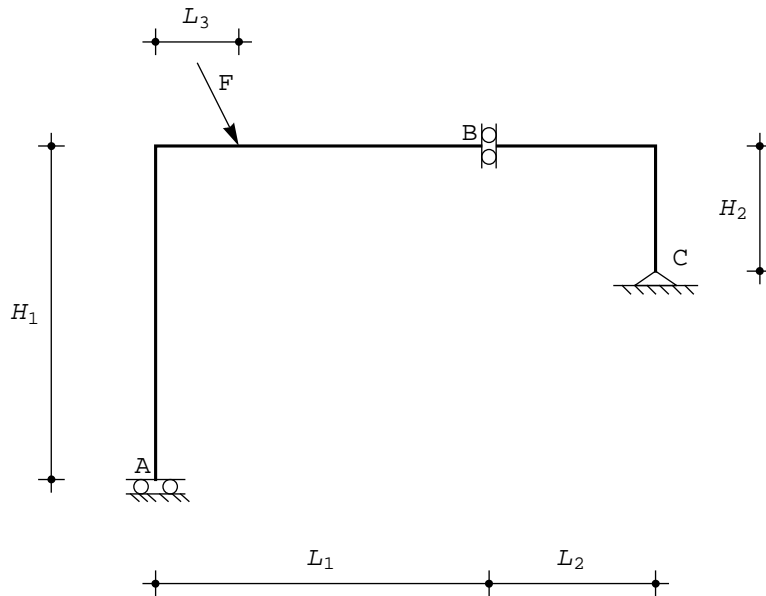


Figura 5 - Un secondo portale zoppo con bipendolo interno

Tuttavia, il secondo tratto e' ancora soggetto alle due sole forze reattive in B ed in C, sicche' la reazione  $R_C$  dovra' passare per C, ed avere retta d'azione orizzontale. La reazione  $R_A$ , questa volta, avra' direzione nota, in quanto dovra' essere verticale, e dovra' passare per il punto di intersezione delle due rette d'azione di F e di  $R_C$ .

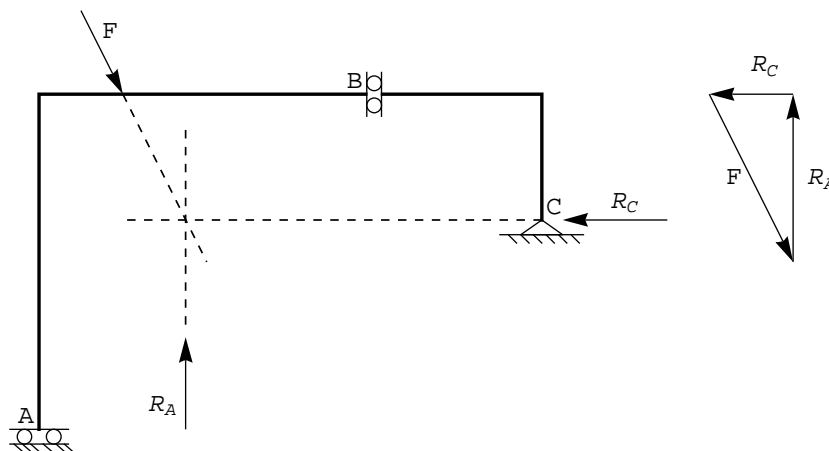


Figura 6 - La determinazione grafica delle reazioni per il telaio di Figura 5

Si ha cosi' la situazione di Figura 6, ed un triangolo delle forze, riportato a destra, fornisce i valori delle due reazioni.

Si noti che per l'equilibrio del secondo tratto si ha subito che la reazione del bipendolo interno dovra' essere uguale e contraria alla reazione  $R_C$ .

### Esercizio n .3

Lo stesso portale zoppo del primo esercizio sia ora soggetto ad una coppia  $\mathcal{M}$  agente sul primo tratto. Per il calcolo grafico delle reazioni si deve esaminare prima il secondo tratto, dove agiscono solo due forze, la reazione dell'appoggio C, che deve passare per il punto C, e la reazione del bipendolo, che dovrà essere necessariamente orizzontale. Per l'equilibrio, quindi, esse dovranno passare ambedue per C, ed essere uguali e contrarie.

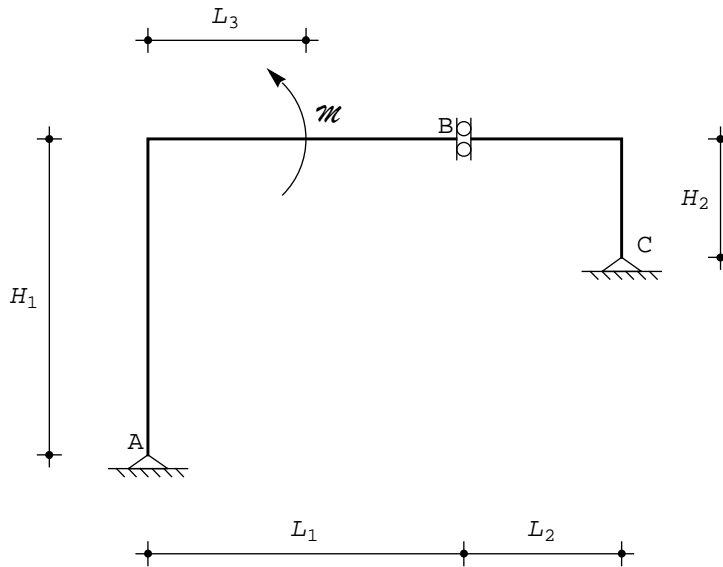


Figura 7 - Un portale zoppo soggetto ad una coppia concentrata

L'equilibrio dell'intera struttura impone poi che anche la reazione in A sia orizzontale, uguale e contraria ad  $R_C$  (per l'equilibrio alla traslazione orizzontale). Il valore effettivo delle reazioni si ottiene infine considerando che esse dovranno generare una coppia reattiva uguale e contraria alla coppia applicata  $\mathcal{M}$ , ossia oraria. Ne segue che sarà:

$$R_C = -R_A = \frac{\mathcal{M}}{d} \quad (2)$$

Si noti che se i due appoggi sono situati allo stesso livello, per cui  $H_1 = H_2$ , il braccio  $d$  della coppia reattiva si annulla e l'equilibrio non è più possibile.

### ■ Verifica analitica

La struttura è divisa in due tratti, connessi da un bipendolo. Le equazioni di equilibrio si scrivono, nelle usuali notazioni:

$$\begin{aligned} R_{Aw} + N_B &= 0 \\ R_{Av} &= 0 \\ \mathcal{M} - N_B H_1 + M_B &= 0 \\ R_{Cw} - N_B &= 0 \\ R_{Cv} &= 0 \\ -M_B + N_B H_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

e se  $H_2 = H_1$  la terza e sesta equazione non sono risolvibili.

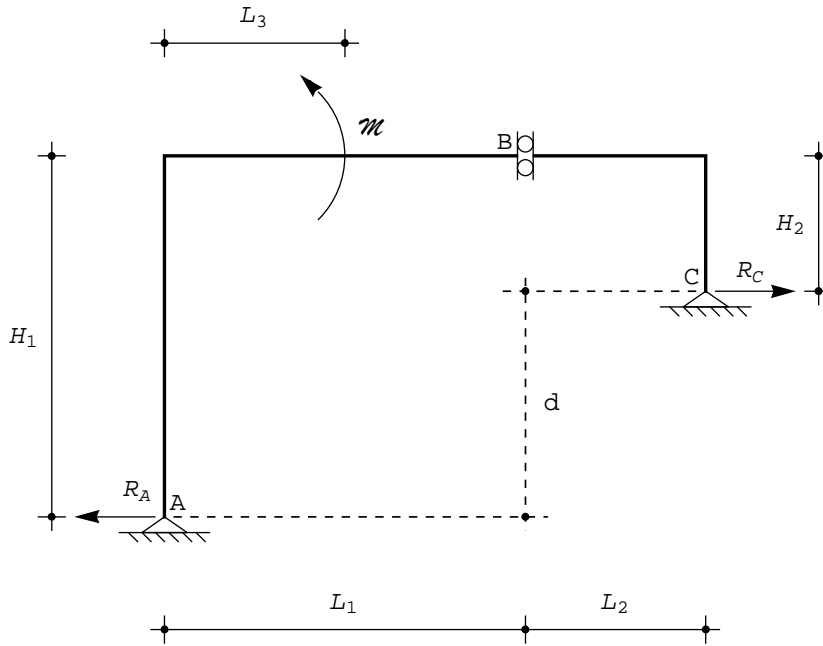


Figura 8 - Le reazioni per il telaio zoppo di Figura 7

## Esercizio n.4

Si consideri ora l'arco a quattro cerniere con pendolo di Figura 9, soggetto ad una forza sul primo tratto rigido. Sul tratto AB agiscono le reazioni  $R_A$  ed  $R_B$ , la reazione  $R_{HK}$  del pendolo, e la forza  $F$ , sul tratto BC agiscono le due reazioni  $R_B$  ed  $R_C$ , sul terzo tratto agiscono le reazioni  $R_C$  ed  $R_D$ , e la reazione  $R_{HK}$  del pendolo. E' quindi ovvio iniziare l'analisi dal secondo tratto, per cui puo' farsi riferimento alla situazione di Figura 1a).

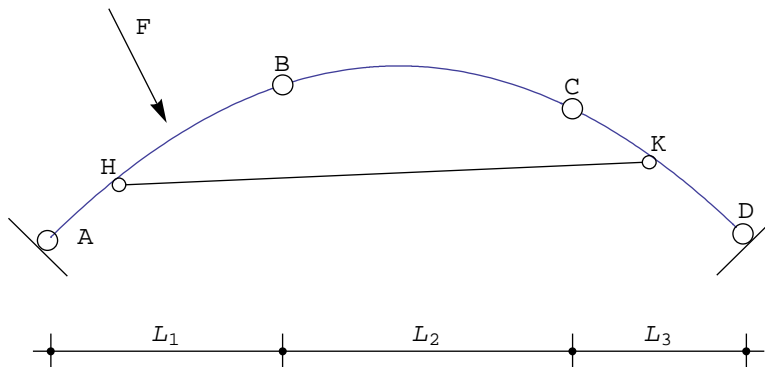


Figura 9 - Un arco a quattro cerniera e pendolo

Per l'equilibrio, le reazioni  $R_B$  ed  $R_C$  devono essere uguali e contrarie, quindi la loro retta d'azione non puo' che essere la congiungente B e C. E' usuale parlare, in questi casi, di un comportamento "a pendolo" del tratto BC. Conosciuta la retta d'azione delle reazioni  $R_B$  ed  $R_C$ , si passi ad esaminare il terzo tratto: su di

esso agisce  $R_C$ , di cui si conosce la retta d'azione,  $R_{HK}$ , di cui si conosce la retta d'azione, ed  $R_D$ , che deve passare per la cerniera D. Ne segue che puo' farsi riferimento alla Figura 1b) per concludere che la reazione  $R_D$  deve passare per il punto di intersezione di  $R_C$  ed  $R_{HK}$ , e quindi si puo' conoscere la retta d'azione di  $R_D$ .

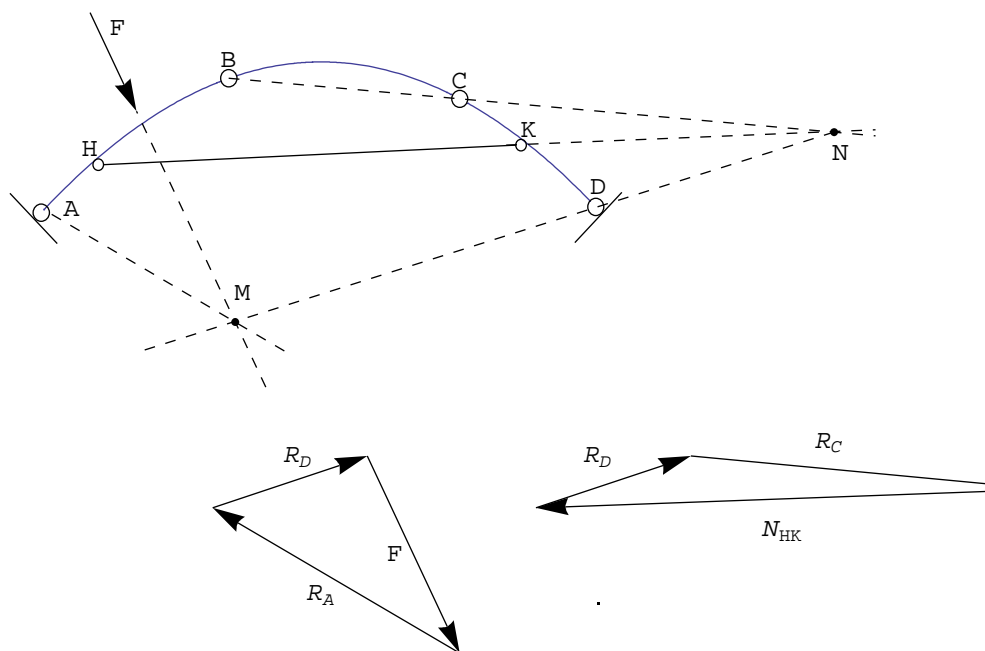


Figura 10 - Le reazioni per l'arco di Figura 9

Facendo riferimento alla Figura 10, si prolunga la congiungente BC ed il pendolo HK, fino all'intersezione N. La reazione  $R_D$ , per l'equilibrio del tratto, deve passare per N, e quindi  $R_D$  e' diretta secondo la retta DN.

L'equilibrio globale della struttura implica che le tre forze agenti su di essa, ossia le due reazioni  $R_A$  ed  $R_D$  e la forza  $F$ , devono incontrarsi in un punto: prolungando quindi la retta d'azione di  $F$  e di  $R_D$  si identifica il punto M, per cui dovra' passare anche  $R_A$ . Si conosce anche la retta d'azione di  $R_A$ , ed un semplice triangolo di equilibrio fornisce - graficamente - i valori delle due reazioni esterne. Infine, in basso a destra e' riportato il triangolo di equilibrio delle tre forze agenti sul terzo tratto, ottenendo anche  $R_{HK}$  ed  $R_C$ .

Ne segue che il pendolo HK e' teso, mentre il tratto BC si comporta come un pendolo compresso.

## Esercizio n .5

Si vuole ora esaminare la struttura di Figura 11, costituita da quattro tratti rigidi connessi tra di loro attraverso quattro cerniere, e ciascuna cerniera e' connessa al suolo tramite un pendolo. La struttura libera ha quindi 12 gradi di liberta', le quattro cerniere permettono di scrivere otto equazioni di vincolo, ciascuno dei quattro pendoli permette la scrittura di una equazione di vincolo, quindi la struttura e' potenzialmente isostatica..

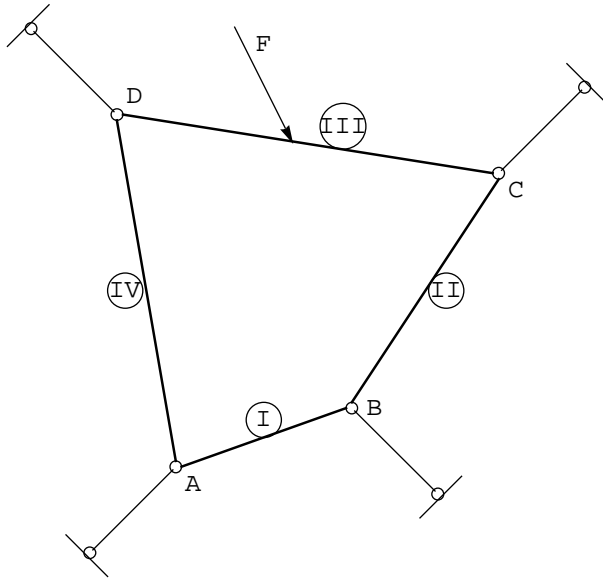
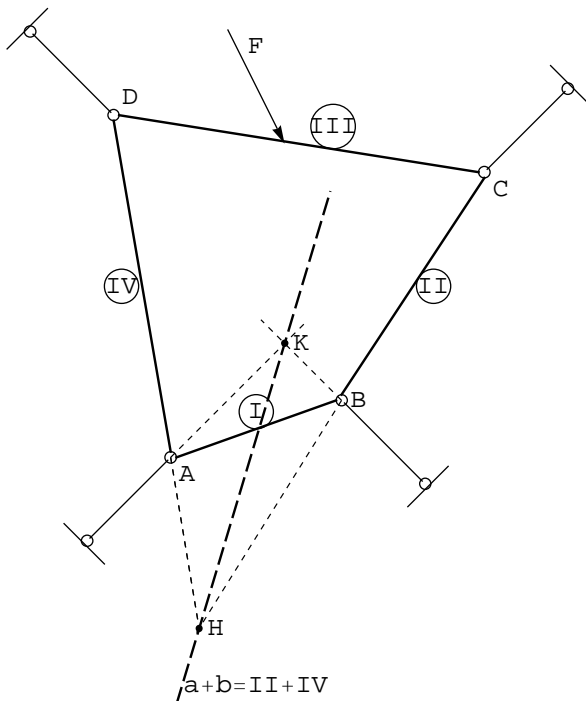


Figura 11 - Una struttura chiusa a quattro tratti rigidi connessi da quattro cerniere

### ■ Primo passo

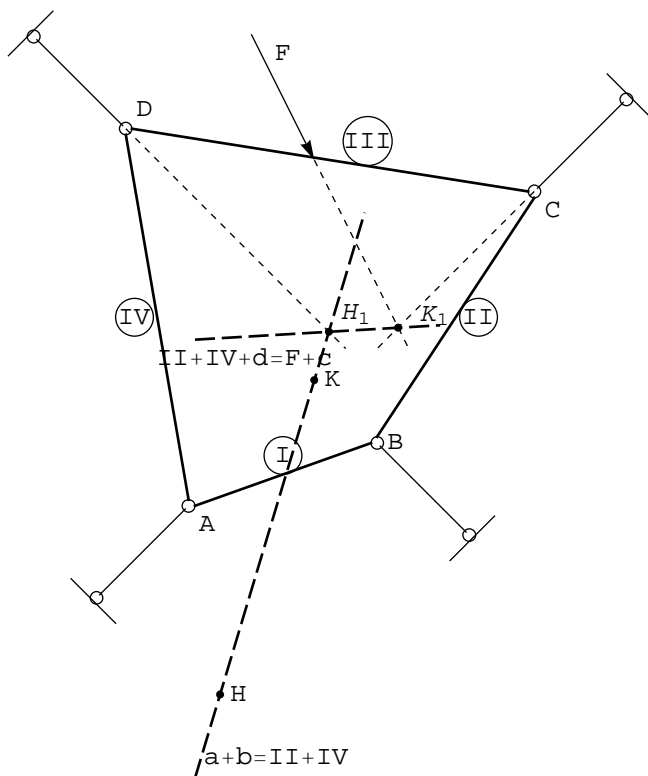
Esaminando il primo tratto, si nota che esso è soggetto alle due reazioni  $a$  e  $b$  dei pendoli A e B, dirette secondo l'asse dei pendoli ed alle due reazioni II e IV del secondo e quarto tratto, anch'esse note in direzione. Si è quindi nella situazione di Figura 1c, e può costruirsi la retta ausiliaria  $a+b = \text{II}+\text{IV}$ ; a tal fine si prolungano gli assi dei due pendoli, fino alla loro intersezione in H, si prolungano le due aste II e IV fino alla loro intersezione in K, e si ottiene la retta ausiliaria HK. La costruzione è riportata in Figura 12.





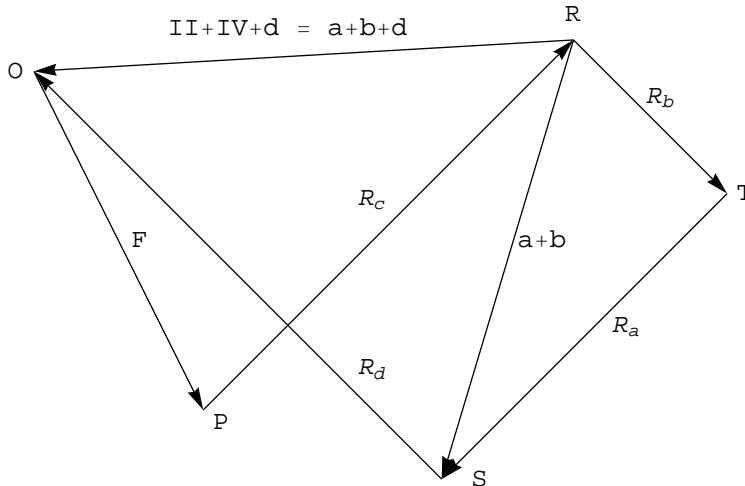
## Secondo passo

Esaminando ora il terzo tratto, si vede che esso è soggetto alla forza  $F$ , alle due reazioni  $c$  e  $d$  dei due pendoli, ed alla reazione combinata dei due tratti II e IV, la cui retta di azione è stata appena determinata. Anche ora si è quindi nelle condizioni della Figura 1c, ed occorre costruire la retta ausiliaria  $d + (II+IV) = F + c$ : per ottenerla si deve prolungare la retta d'azione del pendolo  $d$  fino ad intersecare la retta II+IV in  $H_1$ , e si deve prolungare la retta d'azione del pendolo  $c$  fino ad intersecare la retta d'azione della forza  $F$  in  $K_1$ . La richiesta retta ausiliaria è la retta  $H_1 K_1$ . La costruzione è riportata in Figura 13



## ■ Terzo passo

Conosciuta la retta d'azione ausiliaria  $II+IV+d$ , il terzo tratto è soggetto alle tre forze  $F$ ,  $R_c$  ed alla forza risultante  $II+IV+d$ . Ne segue che  $F$  si può scomporre secondo la direzione del pendolo  $C$  e secondo la direzione della seconda ausiliaria, ottenendo la reazione  $R_c$  e la forza risultante  $II+IV+d$ . A sua volta, questa forza può scomporsi secondo la direzione del pendolo  $d$  e della prima ausiliaria  $II+IV = a+b$ . In tal modo si ottiene la reazione  $R_d$  del pendolo  $d$ , e la forza risultante  $a+b$ . Infine, quest'ultima può scomporsi secondo le rette d'azione dei pendoli  $a$  e  $b$ , fornendo le reazioni  $R_a$  ed  $R_b$ . L'intera operazione è riportata in Figura 14



### ■ Una digressione nel campo della geometria analitica

Le operazioni descritte graficamente possono essere tutte ricondotte ad operazioni algebriche, applicando i dettami della geometria analitica, ed in realtà i disegni riportati sono stati ottenuti proprio seguendo questa via. Si definisca allora in modo geometricamente preciso la struttura iniziale, assegnando le coordinate delle quattro cerniere:

$$\begin{aligned} A &= (z_A, y_A) \\ B &= (z_B, y_B) \\ C &= (z_C, y_C) \\ D &= (z_D, y_D) \end{aligned} \quad (4)$$

e le inclinazioni dei quattro pendoli, attraverso gli angoli  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  che l'orizzontale forma ruotando in senso antiorario fino a sovrapporsi all'asse del pendolo. Infine, si definisca la retta d'azione della forza attraverso i due coefficienti  $m_F$  ed  $n_F$ :

$$y_F(z) = m_F z + n_F \quad (5)$$

A partire da questi dati, si possono costruire le equazioni delle rette cui appartengono i quattro tratti. Per il tratto I, che collega il punto A ed il punto B:

$$m_1 = \frac{y_A - y_B}{z_A - z_B}; \quad n_1 = y_B - \frac{y_A - y_B}{z_A - z_B} z_B; \quad y_1(z) = m_1 z + n_1 \quad (6)$$

ed analogamente per gli altri tratti :

$$m_2 = \frac{y_B - y_C}{z_B - z_C}; \quad n_2 = y_C - \frac{y_B - y_C}{z_B - z_C} z_C; \quad y_2(z) = m_2 z + n_2 \quad (7)$$

$$m_3 = \frac{y_C - y_D}{z_C - z_D}; \quad n_3 = y_D - \frac{y_C - y_D}{z_C - z_D} z_D; \quad y_3(z) = m_3 z + n_3 \quad (8)$$

$$m_4 = \frac{y_D - y_A}{z_D - z_A}; \quad n_4 = y_A - \frac{y_D - y_A}{z_D - z_A} z_D; \quad y_4(z) = m_4 z + n_4 \quad (9)$$

Per i quattro pendoli, invece, occorre definire la retta che passa un punto con una assegnata inclinazione. Per il pendolo  $a$ , inclinato di  $\alpha$  sull'orizzontale, si ha:

$$m_a = \frac{\sin[\alpha]}{\cos[\alpha]} ; n_a = Y_A - \frac{\sin[\alpha]}{\cos[\alpha]} z_A ; Y_a(z) = m_a z + n_a \quad (10)$$

ed analoghe formule valgono per gli altri tre pendoli :

$$m_b = \frac{\sin[\beta]}{\cos[\beta]} ; n_b = Y_B - \frac{\sin[\beta]}{\cos[\beta]} z_B ; Y_b(z) = m_b z + n_b \quad (11)$$

$$m_c = \frac{\sin[\gamma]}{\cos[\gamma]} ; n_c = Y_C - \frac{\sin[\gamma]}{\cos[\gamma]} z_C ; Y_c(z) = m_c z + n_c \quad (12)$$

$$m_d = \frac{\sin[\delta]}{\cos[\delta]} ; n_d = Y_D - \frac{\sin[\delta]}{\cos[\delta]} z_D ; Y_d(z) = m_d z + n_d \quad (13)$$

### ■ Costruzione prima ausiliaria

Per costruire la prima retta ausiliaria occorre ricavare le coordinate dell' intersezione tra le rette II e IV (punto H) e dell'intersezione tra le rette a e b (punto K). In altri termini occorre risolvere il sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{aligned} Y_H &= m_2 z_H + n_2 \\ Y_H &= m_4 z_H + n_4 \end{aligned} \quad (14)$$

ottenendo il punto H :

$$z_H = \frac{n_4 - n_2}{m_2 - m_4} ; Y_H = n_2 + m_2 \frac{n_4 - n_2}{m_2 - m_4} ; \quad (15)$$

Del tutto analogamente, il punto K ha coordinate :

$$z_K = \frac{n_b - n_a}{m_a - m_b} ; Y_K = n_a + m_a \frac{n_b - n_a}{m_a - m_b} ; \quad (16)$$

La retta ausiliaria II+IV = a+b e' la congiungente i punti H e K, e quindi:

$$m_{aux} = \frac{Y_H - Y_K}{z_H - z_K} ; n_{aux} = Y_K - \frac{Y_H - Y_K}{z_H - z_K} z_K ; Y_{aux}(z) = m_{aux} z + n_{aux} \quad (17)$$

### ■ Costruzione seconda ausiliaria

Per costruire la seconda retta ausiliaria occorre ricavare le coordinate dell' intersezione tra le rette d'azione della forza F e del pendolo c, (punto  $K_1$ ) e dell'intersezione tra la retta ausiliaria appena calcolata, e la retta d'azione del pendolo d (punto  $H_1$ ). Il procedimento e' identico a quanto gia' fatto per la prima ausiliaria, e fornisce le coordinate di  $K_1$  :

$$z_{K_1} = \frac{n_F - n_d}{m_d - m_F} ; Y_{K_1} = n_d + m_d \frac{n_F - n_d}{m_d - m_F} ; \quad (18)$$

e del punto  $H_1$  :

$$z_{H_1} = \frac{n_{aux} - n_c}{m_c - m_{aux}} ; Y_{H_1} = n_c + m_c \frac{n_{aux} - n_c}{m_c - m_{aux}} ; \quad (19)$$

La retta ausiliaria F+c = a+b+d e' la congiungente i punti  $H_1$  e  $K_1$ , e quindi:

$$m'_{aux} = \frac{Y_{H_1} - Y_{K_1}}{z_{H_1} - z_{K_1}} ; n'_{aux} = Y_{K_1} - \frac{Y_{H_1} - Y_{K_1}}{z_{H_1} - z_{K_1}} z_{K_1} ; Y'_{aux}(z) = m'_{aux} z + n'_{aux} \quad (20)$$

### Scomposizione della forza

In una prima fase, la forza  $F$  deve essere scomposta nelle sue componenti secondo il pendolo  $c$  e secondo la seconda ausiliaria. A cio' fare, si parte dalla forza  $F$ , definita dal segmento  $OP$ , e si definisce la retta parallela alla retta d'azione del pendolo  $c$ , e passante per  $P$ .

Per una nota formula di geometria analitica, la retta parallela ad una retta assegnata  $y = m x + n$  e passante per il punto  $(x_1, y_1)$  ha equazione  $(y - y_1) = m(x - x_1)$ . Ne segue che la retta  $r_c$  parallela alla retta d'azione del pendolo  $c$ , e passante per il punto  $P = (z_P, y_P)$  ha equazione:

$$m_{rc} = m_c; n_{rc} = y_P - m_c z_P; Y_{rc}(z) = m_{rc} z + n_{rc} \quad (21)$$

Identificata questa retta, si definisce una retta parallela alla seconda ausiliaria, e passante per  $O$ :

$$m_{raux} = m'_{aux}; n_{raux} = y_O - m'_{aux} z_O; Y_{raux}(z) = m_{raux} z + n_{raux} \quad (22)$$

Infine, l'intersezione tra  $y_{rc}(z)$  ed  $y_{raux}(z)$  fornisce il terzo vertice  $R$  del triangolo di equilibrio:

$$z_R = \frac{n_{rc} - n_{raux}}{m_{raux} - m_{rc}}; Y_R = n_{raux} + m_{raux} \frac{n_{rc} - n_{raux}}{m_{raux} - m_{rc}}; \quad (23)$$

Il segmento  $PR$  fornisce la reazione del pendolo  $c$ , mentre il segmento  $OR$  va ulteriormente scomposto secondo la prima ausiliaria, e la retta d'azione del pendolo  $d$ . A cio' fare si definiscono la retta parallela alla prima ausiliaria, e passante per  $R$ , e la retta parallela alla retta d'azione del pendolo  $d$ , e passante per  $O$ . La loro intersezione  $S$  fornisce la reazione  $R_d$  del pendolo  $d$ , e la somma delle reazioni dei pendoli  $a$  e  $b$ . Infine, anche il segmento  $RS$  deve essere scomposto, a fornire le reazioni dei due pendoli  $a$  e  $b$ .

### Esercizio n .6

La maglia chiusa non vincolata di Figura 15 e' costituita da quattro tratti rigidi connessi tra loro attraverso quattro cerniere, ed un pendolo  $HK$  collega il terzo e quarto tratto.

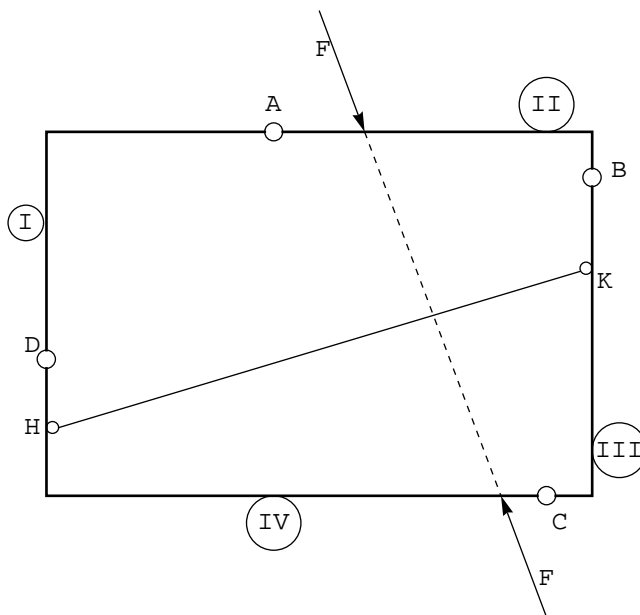


Figura 15 - Una maglia chiusa a quattro cerniere e pendolo

Poiche' non esistono vincoli esterni, le forze esterne devono farsi equilibrio: nel caso specifico si tratta di due

forze uguali e contrarie agenti sul tratto 2 e sul tratto 4.

Esaminando il primo tratto si nota che - al solito - esso e' scarico, e quindi le reazioni in A e D devono farsi equilibrio, il tratto si comporta da pendolo, e la retta d'azione della reazione delle due cerniere e' nota. Passando al secondo tratto, esso e' soggetto alla reazione della cerniera A, la cui retta d'azione e' nota, alla forza F, nota, ed alla reazione  $R_B$  della cerniera in B, che dovra' passare per la cerniera in B. Ne segue che basta prolungare la retta d'azione di  $R_A$  fino ad intersecare la retta d'azione della forza, nel punto M, e si ottiene il secondo punto per cui dovra' passare la  $R_B$ .

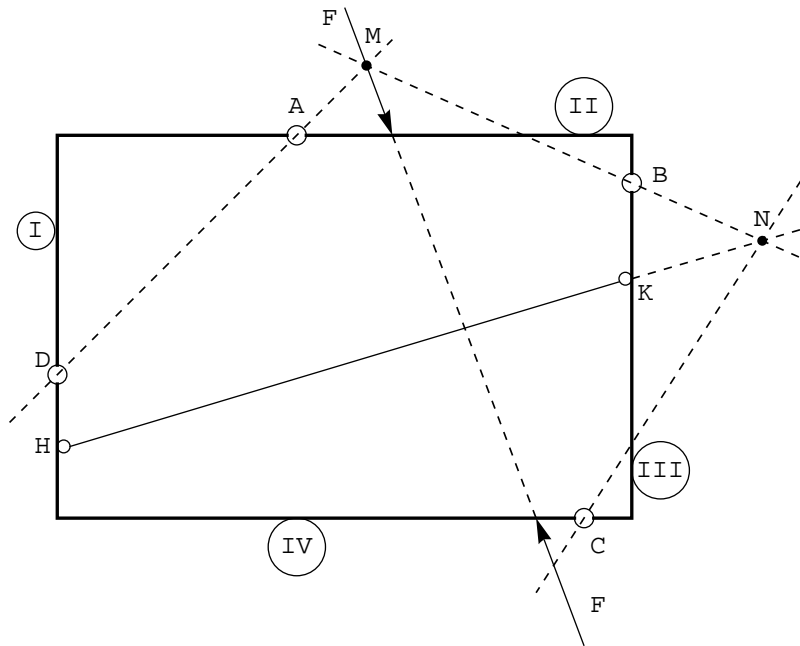


Figura 16 - Una maglia chiusa a quattro cerniere e pendolo: la ricerca delle reazioni

Il terzo tratto e' anch'esso soggetto a tre forze, due delle quali note in direzione ( $R_B$  e lo sforzo normale nel pendolo), mentre la terza deve passare per la cerniera C. Imponendo l'equilibrio del tratto si trova il secondo punto per cui  $R_C$  dovra' passare: basta, allo scopo, prolungare le rette d'azione del pendolo e di  $R_B$  fino alla loro intersezione in N. L'intero procedimento e' riportato in Figura 16.

Ottenute le rette d' azione di tutte le reazioni, si puo' passare alla determinazione del loro valore: a partire dalla forza F si disegna il triangolo di equilibrio OPR, ottenendo la reazione  $R_a$  e la reazione  $R_b$ . Cio' fatto, la reazione  $R_B$  si scompone secondo le due rette d'azione del pendolo e della cerniera in C. L'equilibrio del tratto IV puo' leggersi sullo stesso diagramma, considerando che esso e' soggetto a  $-F$ , ad  $R_d = -R_a$ ,  $R_{HK}$  ed  $R_c$ .

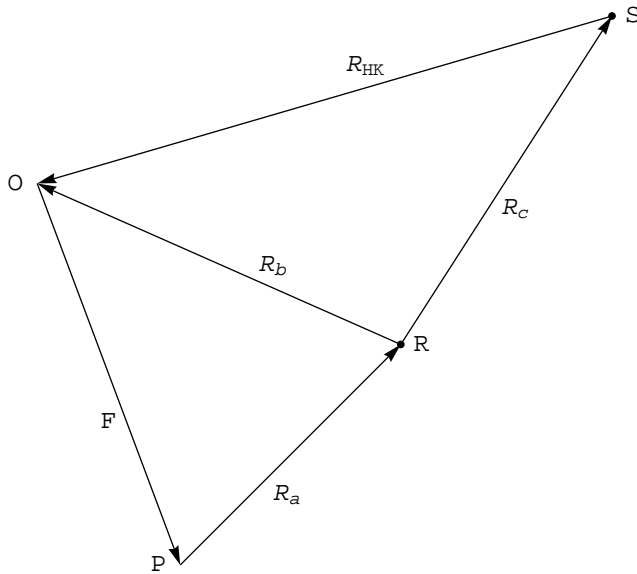


Figura 17 - Una maglia chiusa a quattro cerniere e pendolo: le reazioni

### Esercizio n .7

Si consideri ora la maglia chiusa a tre cerniere, caricata da tre forze, che per l'equilibrio devono necessariamente passare per un punto di intersezione comune. In questo esercizio si esamina il caso più semplice, in cui uno dei tratti è scarico, mentre un'altro è caricato da una sola forza, ed il tratto scarico è soggetto a due forze.

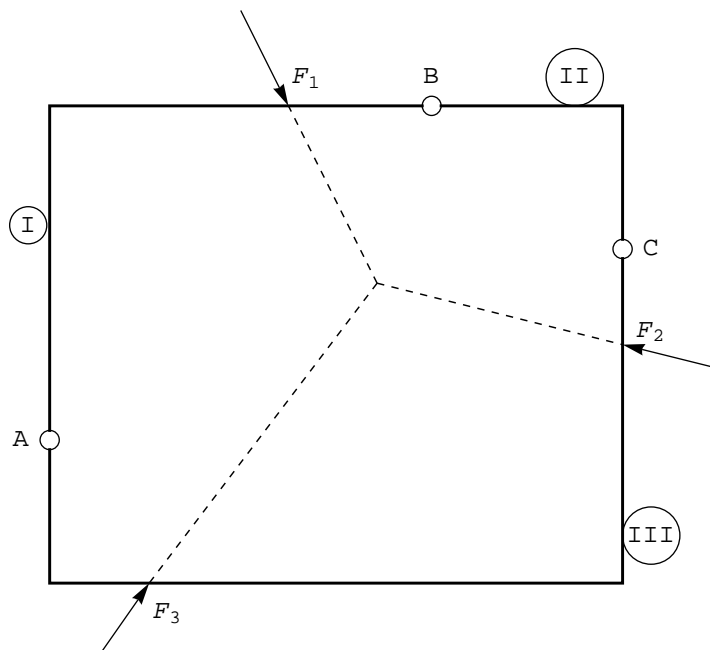


Figura 18 - Una maglia chiusa a tre cerniere soggetta ad un carico auto-equilibrato

La ricerca delle reazioni parte proprio dall'esame del tratto scarico, che come usuale si comporta da pendolo, e quindi le due reazioni delle cerniere B e C sono uguali e contrarie. Si passa poi al tratto soggetto ad una

forza, ossia al tratto I: esso e' in equilibrio in presenza della forza  $F$ , delle reazioni della cerniera in B, ambedue di direzione nota, e della reazione in A, che deve passare per A. Ne segue che basta prolungare le rette d'azione di  $F_1$  e di  $R_B$  per ottenere, con la loro intersezione H, il secondo punto che definisce la direzione di  $R_A$

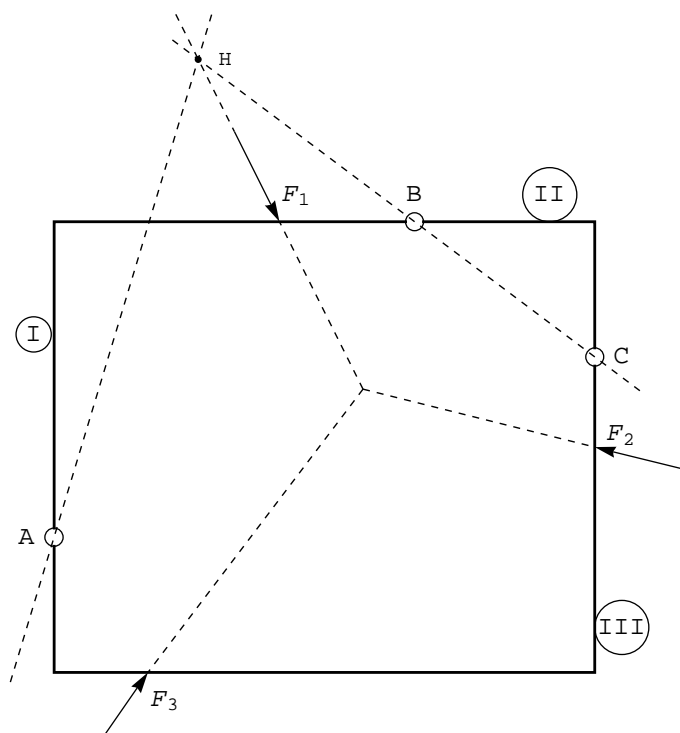


Figura 19 - La ricerca delle reazioni per la maglia di Figura 18

Nella Figura seguente e' riportato il triangolo di equilibrio delle tre forze, e la scomposizione di  $F_1$  secondo le sue componenti  $R_A$  ed  $R_B$ . Si noti che l'equilibrio del terzo tratto puo' verificarsi percorrendo il quadrilatero PROSP in senso antiorario.

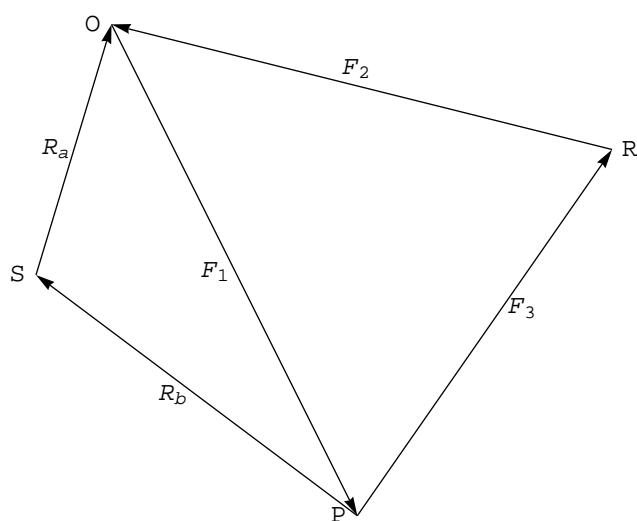


Figura 20 - Le reazioni per la maglia di Figura 18

## Esercizio n .8

Nel caso in esame, la maglia chiusa a tre cerniere di Figura e' soggetta a tre forze autoequilibrate, ciascuna agente su un tratto diverso. Ne segue che non esistono tratti scarichi, ed ognuno di essi e' soggetto ad una forza e a due reazioni che devono passare per le cerniere, ma di direzione incognita.

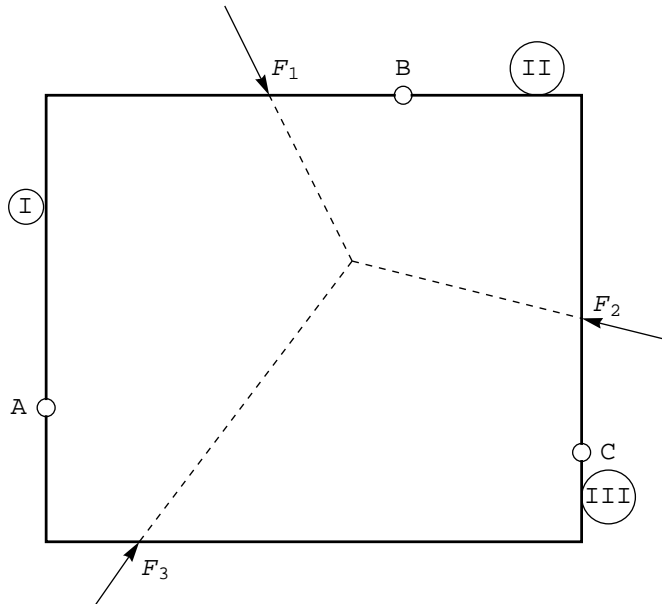


Figura 21 - Una maglia chiusa a tre cerniere soggetta ad un carico auto-equilibrato

Si risolvera' il problema del calcolo delle reazioni applicando i dettami della geometria analitica. Siano allora  $(z_A, y_A)$ ,  $(z_B, y_B)$  e  $(z_C, y_C)$  le coordinate delle tre cerniere, e definiamo le tre rette d'azione delle tre forze:

$$\begin{aligned} Y_1(z) &= m_{F_1} z + n_{F_1} \\ Y_2(z) &= m_{F_2} z + n_{F_2} \\ Y_3(z) &= m_{F_3} z + n_{F_3} \end{aligned} \quad (24)$$

Si noti che poiche' le tre forze concorrono in un punto, dovra' essere necessariamente:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} m_{F_1} & n_{F_1} & 1 \\ m_{F_2} & n_{F_2} & 1 \\ m_{F_3} & n_{F_3} & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (25)$$

Siano ora :

$$\begin{aligned} Y_a(z) &= m_A z + n_A \\ Y_b(z) &= m_B z + n_B \\ Y_c(z) &= m_C z + n_C \end{aligned} \quad (26)$$

le equazioni delle rette cui devono appartenere la tre reazioni incognite. Si hanno quindi sei parametri incogniti, che verranno calcolati imponendo le condizioni che le rette passino per A, B e C, rispettivamente:

$$\begin{aligned} Y_A &= m_A z_A + n_A \\ Y_B &= m_B z_B + n_B \\ Y_C &= m_C z_C + n_C \end{aligned} \quad (27)$$



la condizione che - per l'equilibrio del tratto I - la forza  $F_1$ , la reazione  $R_A$  e la reazione  $R_B$  debbono concorrere in un punto:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} m_{F_1} & n_{F_1} & 1 \\ m_A & n_A & 1 \\ m_B & n_B & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (28)$$

la condizione che - per l'equilibrio del tratto II - la forza  $F_2$ , la reazione  $R_B$  e la reazione  $R_C$  debbono concorrere in un punto:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} m_{F_2} & n_{F_2} & 1 \\ m_B & n_B & 1 \\ m_C & n_C & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (29)$$

e la condizione che - per l'equilibrio del tratto III- la forza  $F_3$ , la reazione  $R_C$  e la reazione  $R_A$  debbono concorrere in un punto:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} m_{F_3} & n_{F_3} & 1 \\ m_C & n_C & 1 \\ m_A & n_A & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (30)$$

Queste sei equazioni in sei incognite permettono la definizione delle rette d'azione delle reazioni, come illustrato in Figura

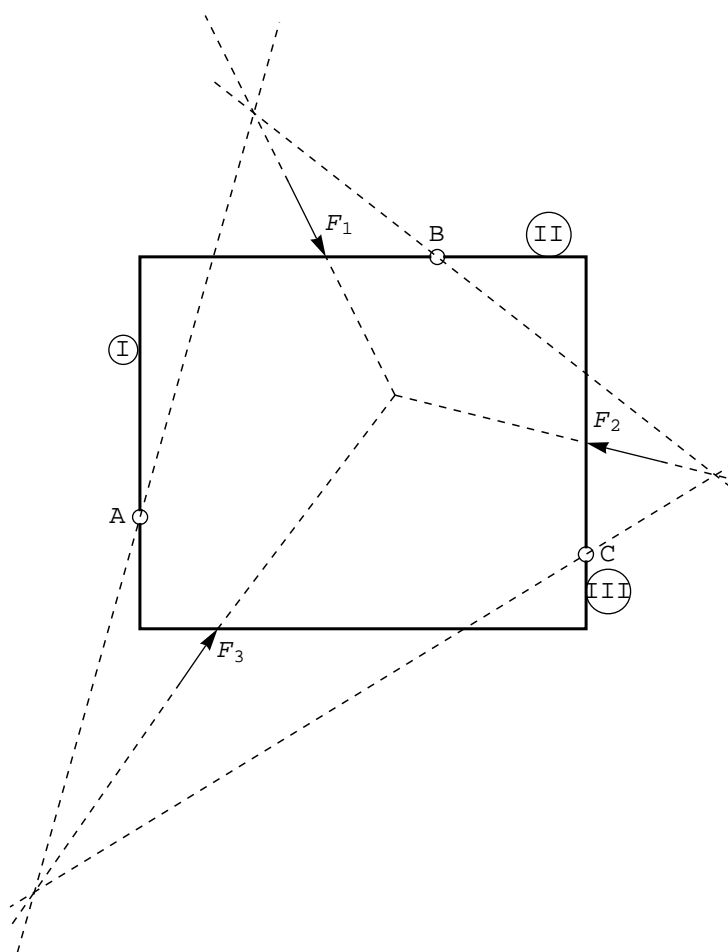


Figura 22 - La ricerca delle reazioni per la maglia di Figura 21

L'intensità delle reazioni può ora essere dedotta scomponendo  $F_1$  secondo le rette d'azione delle reazioni  $R_A$  ed  $R_B$ , la forza  $F_2$  secondo le rette d'azione delle reazioni  $R_B$  ed  $R_C$ , e per verifica la forza  $F_3$  secondo le rette d'azione delle reazioni  $R_A$  ed  $R_C$ .

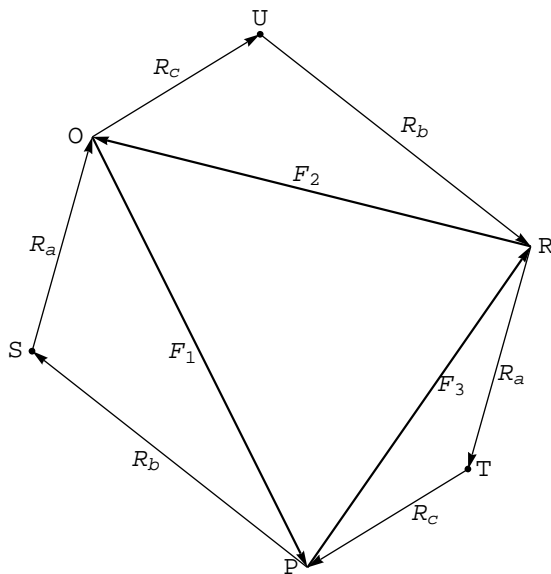


Figura 23 - Le reazioni per la maglia di Figura 21

## Esercizio n .9

Si consideri ora la maglia chiusa di Figura, in cui tre tratti rigidi sono collegati tra loro tramite una cerniera e due bipendoli. Non essendovi vincoli esterni, le tre forze concorrono in un punto, garantendo l'equilibrio.

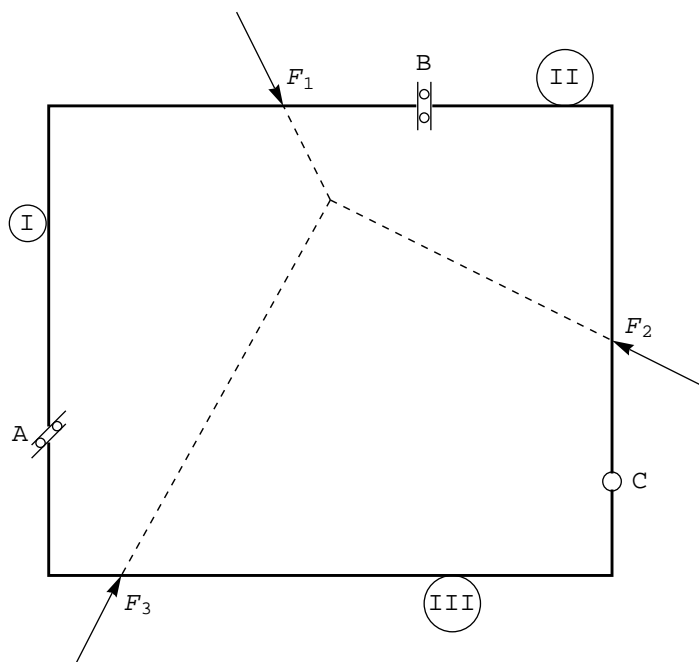


Figura 24 - Una maglia chiusa a due bipendoli ed una cerniera soggetta ad un carico auto-equilibrato

Si risolverà anche questo problema applicando i dettami della geometria analitica. Siano quindi  $(z_A, y_A)$ ,  $(z_B, y_B)$  e  $(z_C, y_C)$  le coordinate della cerniera e dei due bipendoli, e siano  $\alpha$  e  $\beta$  gli angoli che l'orizzontale forma - in senso antiorario, per sovrapporsi al piano di scorrimento del bipendolo in A ed in B, rispettivamente. Nel caso di Figura si è scelto  $\alpha = \pi/4$  e  $\beta = \pi/2$ . Si definiscano poi le rette d'azione delle tre forze:

$$\begin{aligned} Y_1(z) &= m_{F_1} z + n_{F_1} \\ Y_2(z) &= m_{F_2} z + n_{F_2} \\ Y_3(z) &= m_{F_3} z + n_{F_3} \end{aligned} \quad (31)$$

con la condizione di equilibrio:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} m_{F_1} & n_{F_1} & 1 \\ m_{F_2} & n_{F_2} & 1 \\ m_{F_3} & n_{F_3} & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (32)$$

Siano ora :

$$\begin{aligned} Y_a(z) &= m_A z + n_A \\ Y_b(z) &= m_B z + n_B \\ Y_c(z) &= m_C z + n_C \end{aligned} \quad (33)$$

le equazioni delle rette cui devono appartenere le tre reazioni incognite. Le reazioni  $R_A$  ed  $R_B$  hanno direzione nota, in quanto devono essere dirette secondo gli assi dei bipendoli, ossia devono essere inclinate di  $\alpha + \pi/2$  e  $\beta + \pi/2$  rispetto all'orizzontale. Se ne può dedurre:

$$\begin{aligned} m_A &= \text{Tan}(\alpha + \pi/2) \\ m_B &= \text{Tan}(\beta + \pi/2) \end{aligned} \quad (34)$$

La terza reazione è invece costretta a passare per il punto C:

$$Y_C = m_C z_C + n_C \quad (35)$$

A queste tre condizioni vanno aggiunte le tre condizioni di equilibrio dei tre tratti: la condizione che - per l'equilibrio del tratto I - la forza  $F_1$ , la reazione  $R_A$  e la reazione  $R_B$  debbono concorrere in un punto:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} m_{F_1} & n_{F_1} & 1 \\ m_A & n_A & 1 \\ m_B & n_B & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (36)$$

la condizione che - per l'equilibrio del tratto II - la forza  $F_2$ , la reazione  $R_B$  e la reazione  $R_C$  debbono concorrere in un punto:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} m_{F_2} & n_{F_2} & 1 \\ m_B & n_B & 1 \\ m_C & n_C & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (37)$$

e la condizione che - per l'equilibrio del tratto III- la forza  $F_3$ , la reazione  $R_C$  e la reazione  $R_A$  debbono concorrere in un punto:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} m_{F_3} & n_{F_3} & 1 \\ m_C & n_C & 1 \\ m_A & n_A & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (38)$$

Queste sei equazioni in sei incognite permettono la definizione delle rette d'azione delle reazioni, come illustrato in Figura. Si noti che l'intersezione tra  $R_C$ ,  $R_B$  ed  $F_2$  non è stata disegnata in quanto troppo spostata a sinistra.

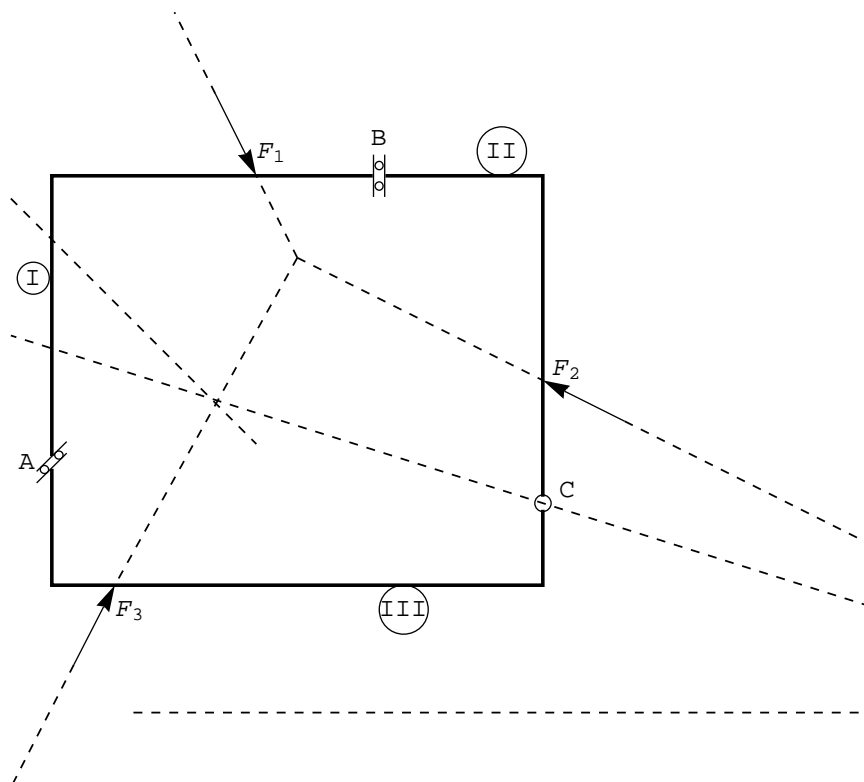


Figura 25 - La ricerca delle reazioni per la maglia di Figura 24

La forza  $F_1$  si scompone secondo le rette d'azione dei due bipendoli, ossia - in questo caso - secondo la retta orizzontale e la retta inclinata di  $3\pi/4$ , ottenendo le reazioni  $R_A$  ed  $R_B$ . La forza  $F_2$  si scompone secondo le rette d'azione della reazione del bipendolo in B e della reazione in C, ottenendo  $R_C$ . Infine, la terza forza deve essere equilibrata in presenza di  $R_A$  ed  $R_C$ .

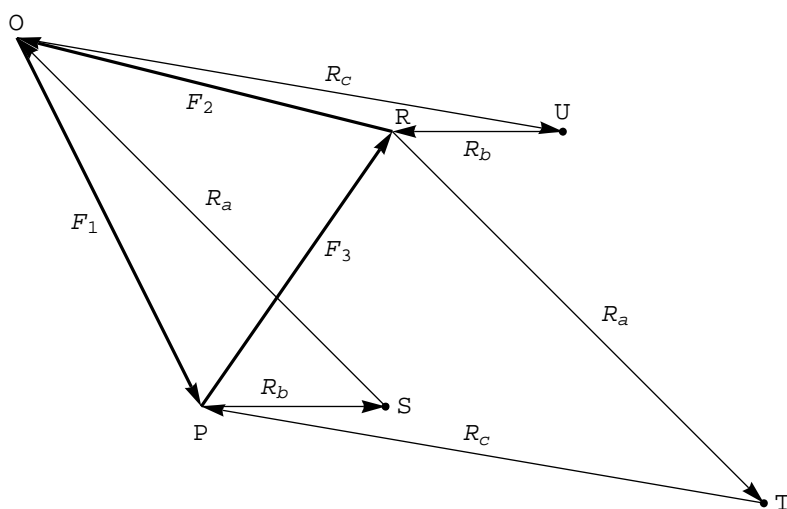


Figura 26 - Le reazioni per la maglia di Figura 24

## Figure