

---

# 3 - Analisi statica delle strutture

## Metodo analitico

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 23 settembre 2011]

Si consideri una struttura piana  $S$ , costituita da  $t$  tratti rigidi, e si immagini di rimuovere tutti i vincoli, sia interni che esterni, sostituendo ad essi le opportune reazioni incognite. Ci si è ricondotti ad un insieme di  $t$  tratti rigidi, sconnessi, soggetti ai carichi esterni, noti, ed alle reazioni incognite, e sia  $s$  il numero di tali reazioni.

Per ciascun tratto si possono scrivere tre equazioni di equilibrio, due di traslazione lungo i due assi coordinati  $z$  ed  $y$ , ed una di rotazione intorno ad un asse ortogonale al piano ( $z,y$ ) e passante per un punto arbitrario del piano, detto polo. Simbolicamente si possono quindi scrivere le  $3t$  equazioni di equilibrio:

$$\sum F_z^{(k)} = 0; \quad \sum F_y^{(k)} = 0; \quad \sum M^{(k)} = 0; \quad k = 1, \dots, t \quad (1)$$

Alternativamente, la prima equazioni di equilibrio di traslazione puo' essere sostituita da una seconda equazione di equilibrio di rotazione intorno ad un secondo polo  $O_2$  che non sia allineato verticalmente con il primo polo  $O_1$ , oppure la seconda equazione di equilibrio di traslazione puo' essere sostituita da una seconda equazione di equilibrio di rotazione intorno ad un secondo polo che non sia allineato orizzontalmente con il primo polo. Ancora, ambedue le equazioni di traslazione possono sostituirsi con due equazioni di rotazione, scegliendo un secondo e terzo polo in modo tale che la terna dei poli  $O_1, O_2, O_3$  sia non allineata.

Comunque sia, e' possibile scrivere solo tre equazioni indipendenti di equilibrio per ciascun tratto, e quindi si giunge infine a  $3t$  equazioni nelle  $s$  incognite reattive. Matricialmente si ha:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (2)$$

La matrice  $\mathbf{A}$  si dice *matrice di equilibrio*, e' rettangolare, con  $3t$  righe ed  $s$  colonne, e dipende solo dalla geometria della struttura  $S$ . Viceversa, il vettore dei  $3t$  termini noti  $\mathbf{b}$  dipende dai carichi applicati, ed e' nullo se la struttura non e' caricata, nel qual caso le equazioni di equilibrio risultano omogenee. Il vettore  $\mathbf{x}$  contiene le  $s$  incognite reattive.

Sia  $r$  il rango della matrice di equilibrio  $\mathbf{A}$ , e sia  $r^*$  il rango della sua orlata, ossia della matrice  $[\mathbf{A} | \mathbf{b}]$ , e si ipotizzi, in questa fase, che il rango  $r$  sia massimo, rimandando alla successive lezione il caso in cui cio' non avvenga. Possono verificarsi tre casi:

Caso I:  $3t-s > 0$

Esistono piu' equazioni che non incognite, la struttura si dice *labile*, ed  $l = 3t-s$  e' il corrispondente *grado di labilita'*. Il rango  $r$  della matrice di equilibrio e' pari ad  $s$ , ed in genere non e' garantito l'equilibrio, e la struttura ammette cinematismi rigidi che possono essere tracciati coi metodi gia' descritti nelle lezioni precedenti

Se tuttavia le forze applicate sono disposte in modo tale che il rango  $r^*$  dell'orlata sia anch'esso pari ad  $s$ , allora si ha possibilita' di equilibrio, la struttura  $S$  e' in realta' equilibrata per particolari condizioni di carico.

Caso II:  $3t-s = 0$

Il numero delle equazioni e' pari al numero delle incognite, la matrice di equilibrio e' quadrata, e poiche' si e' ipotizzato che il rango della matrice sia massimo, sara' sicuramente possibile risolvere le equazioni di

equilibrio, a fornire l'unica soluzione equilibrata. E' questo il caso delle strutture *isostatiche*, in cui il problema statico puo' essere risolto attraverso la scrittura delle sole equazioni di equilibrio:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \quad (3)$$

Caso III:  $3t-s < 0$

Esistono piu' incognite che equazioni di equilibrio, il rango della matrice e' pari a  $3t$ , la struttura e' sicuramente equilibrata, e la soluzione delle (2) e' definita a meno di  $i = s-3t$  parametri, che possono essere  $i$  reazioni arbitrariamente scelte. E' questo il caso delle strutture iperstatiche, ed  $i = s-3t$  e' il relativo grado di iperstaticita'. In questo caso, i valori delle reazioni non possono essere calcolati con l'ausilio delle sole equazioni di equilibrio, ed occorrera' affiancare ad esse altre equazioni (di congruenza).

Schematicamente, e nell' ipotesi che  $\mathbf{A}$  abbia rango massimo, si ha :

$$\text{Struttura S labile} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\text{Struttura S isostatica} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\text{Struttura S iperstatica} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

## Esercizio n .1

La struttura di Figura 1 e' gia' stata studiata da un punto di vista cinematico, giungendo alla conclusione che essa era cinematicamente determinata.

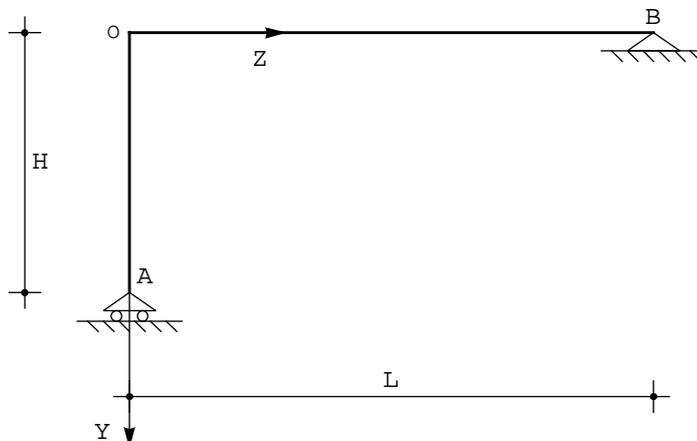


Figura 1 - Un portale zoppo

Si sostituisca al carrello in A la sua reazione verticale incognita  $R_{Av}$ , ed all'appoggio in B la reazione verticale  $R_{Bv}$  e la reazione orizzontale  $R_{Bw}$ . Poiche' la struttura e' costituita da un solo tratti, e' possibile scrivere tre equazioni di equilibrio, e la struttura risulta isostatica.

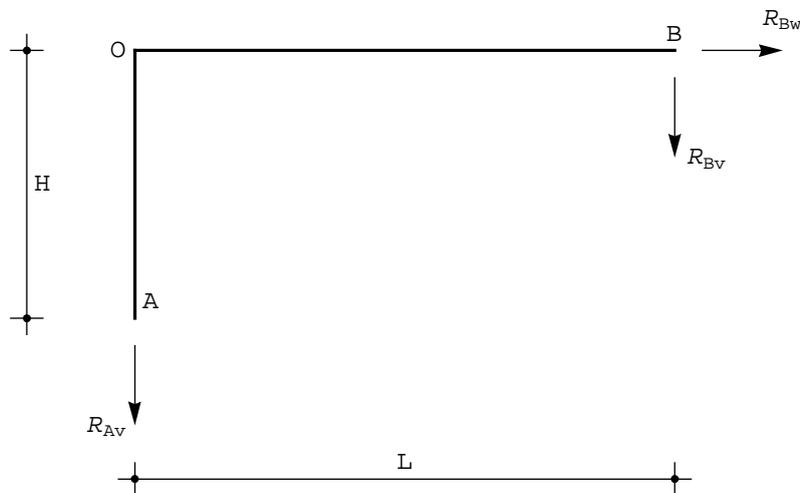


Figura 2 - Il diagramma delle reazioni per l'esempio di Figura 1

Le tre equazioni di equilibrio possono essere ad esempio le due equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale, e l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno al polo O:

$$\begin{aligned} R_{Bw} &= 0 \\ R_{Av} + R_{Bv} &= 0 \\ - R_{Bv} L &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

che matricialmente si scrivono :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{Av} \\ R_{Bw} \\ R_{Bv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Il rango della matrice di equilibrio e' pari a 3, e l'unica soluzione delle equazioni e' quella banale. Si noti che la matrice di equilibrio A e' la trasposta della matrice cinematica ottenuta nella (10) dell'Applicazione 1. Cio' esprime la cosiddetta dualita' statico-cinematica, ed e' conseguenza dell'aver utilizzato lo stesso polo O per ambedue le analisi.

## Esercizio n .2

La stessa struttura dell'esercizio precedente sia ora soggetta ad una stesa di carico uniformemente distribuito lungo l'asta orizzontale, di intensita'  $q$ . Poiche' l'asta su cui agisce il carico e' rigida, il carico stesso puo' essere sostituito da una corrispondente forza concentrata, di intensita' pari all'integrale del carico, ed agente nel baricentro del carico.

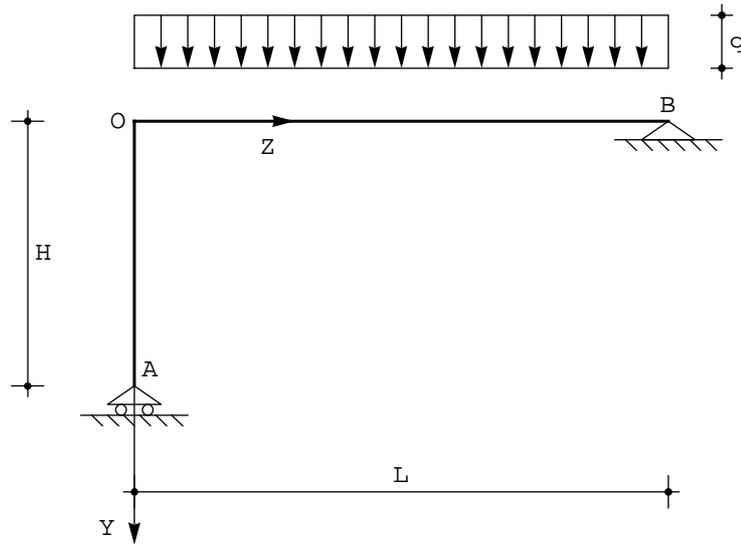


Figura 3 - Il telaio zoppo di Figura 1, caricato sul traverso da un carico  $q$  uniformemente distribuito

Nel caso in esame,

$$F = \int_0^B q \, dz = qL \quad (6)$$

ed il baricentro del rettangolo e' ovviamente situato in  $L/2$ . Ai fini della scrittura delle equazioni di equilibrio, si puo' sempre sostituire il carico distribuito con la corrispondente forza concentrata:

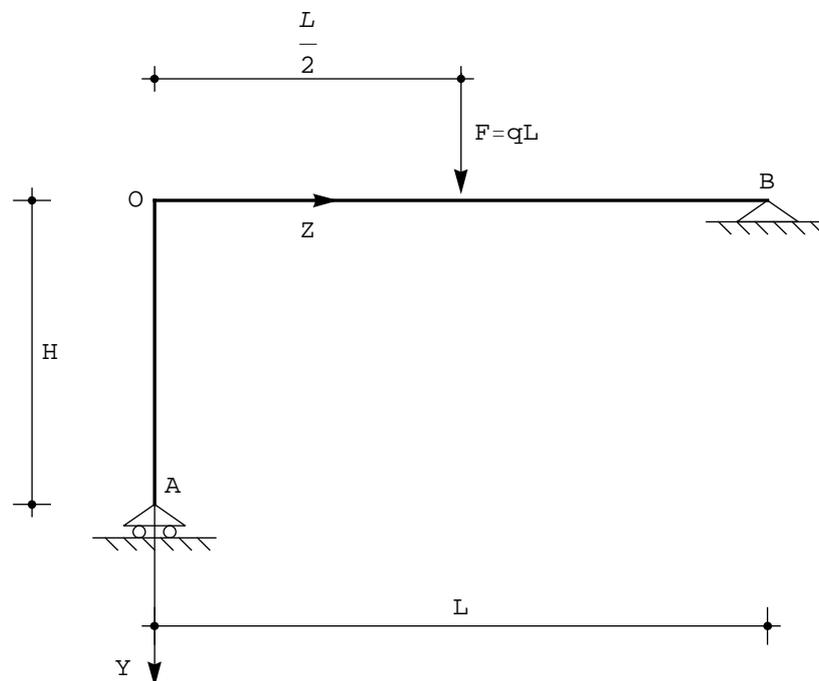


Figura 4 - Lo stesso telaio della Figura 3, con applicata la risultante  $F$  del carico

Le equazioni di equilibrio si scrivono quindi:

$$R_{Bw} = 0$$

$$R_{AV} + R_{BV} + qL = 0$$

$$- R_{BV} L - qL \frac{L}{2} = 0$$

che matricialmente si scrivono :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{AV} \\ R_{BW} \\ R_{BV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -qL \\ \frac{qL^2}{2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

con soluzione:

$$R_{BW} = 0$$

$$R_{AV} = R_{BV} = -\frac{qL}{2} \quad (9)$$

Il carico verticale si distribuisce equamente tra i due vincoli in A e B, dando luogo a due reazioni dirette verso l'alto.

### Esercizio n .3

Si voglia adesso eseguire l'analisi statica per il telaio di Figura 5, costituito da due tratti rigidi collegati tra loro da una cerniera, e vincolati al suolo tramite due appoggi. Poiche' per ogni tratto possono scriversi tre equazioni di equilibrio, si possono scrivere, in complesso, sei equazioni di equilibrio.

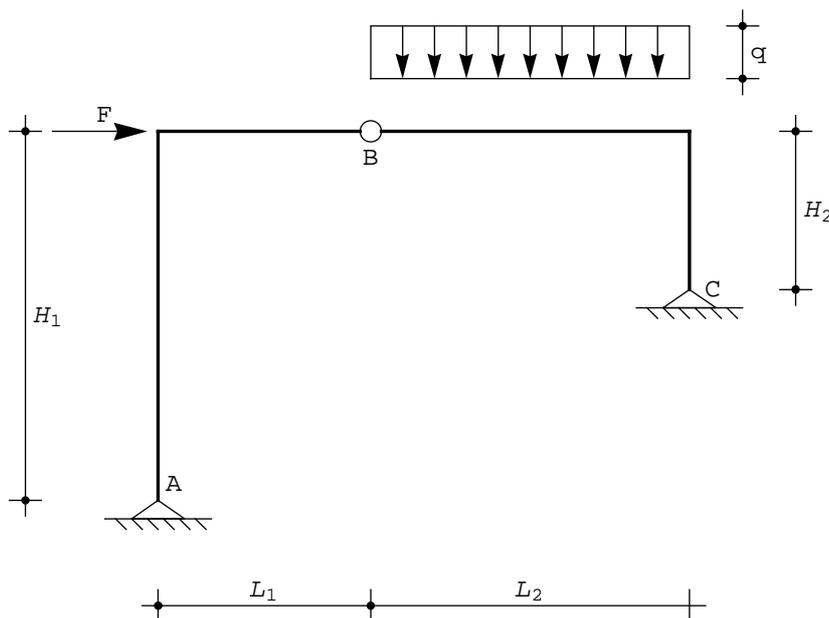


Figura 5 - Un arco a tre cerniere

Corrispondentemente, eliminando i vincoli, sia esterni che interni, e sostituendo ad essi le rispettive reazioni, si giunge allo schema di Figura 6, in cui sono evidenziate le sei incognite statiche, ossia le reazioni orizzontali e verticali dei due appoggi, lo sforzo normale e lo sforzo di taglio nella cerniera.

Si ha così una uguaglianza tra il numero di incognite ed il numero di equazioni di equilibrio,  $3t-s=0$ , e la struttura è potenzialmente isostatica.

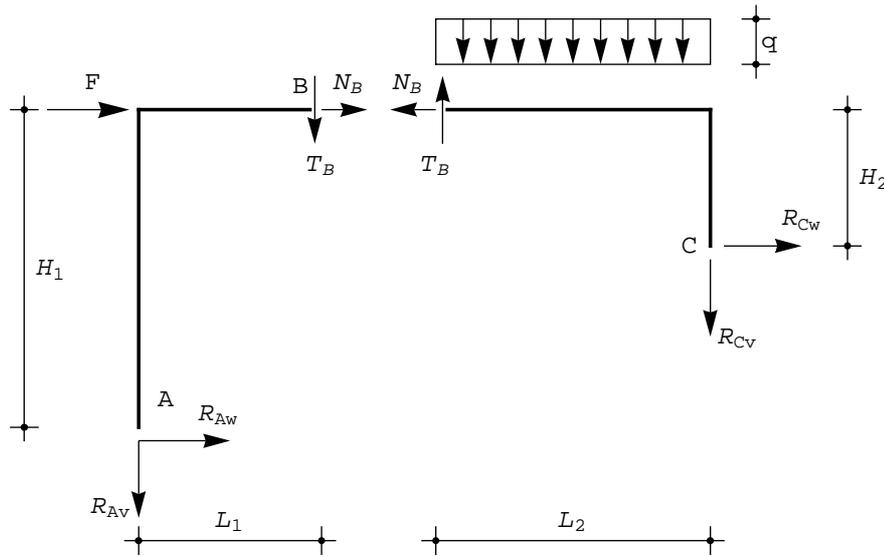


Figura 6 - Il diagramma delle forze per la struttura di Figura 5

Scegliendo come poli per la scrittura delle equazioni di equilibrio alla rotazione il punto A ed il punto C, rispettivamente per il primo ed il secondo tratto, si potranno scrivere le equazioni:

$$\begin{aligned}
 R_{Aw} + F + N_B &= 0 \\
 R_{Av} + T_B &= 0 \\
 -F H_1 - N_B H_1 - T_B L_1 &= 0 \\
 -N_B + R_{Cw} &= 0 \\
 -T_B + qL_2 + R_{Cv} &= 0 \\
 N_B H_2 - T_B L_2 + \frac{qL_2^2}{2} &= 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

o, matricialmente :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_1 & L_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & H_2 & -L_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{Aw} \\ R_{Av} \\ N_B \\ T_B \\ R_{Cw} \\ R_{Cv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ -FH_1 \\ 0 \\ -qL_2 \\ -\frac{qL_2^2}{2} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Il rango della matrice di equilibrio è massimo, come può evidenziarsi calcolando il suo determinante, pari a  $\Delta = -(H_1 L_2 + H_2 L_1)$ , banalmente diverso da zero se le dimensioni geometriche non si annullano. Ne segue che la struttura è isostatica, e che è possibile calcolare le reazioni dovute alle forze applicate, risolvendo il sistema (10). Sarà quindi:

$$\begin{aligned}
 R_{Aw} &= \frac{L_1 (2 F H_2 - q L_2^2)}{2 \Delta} \\
 R_{Av} &= - \frac{H_1 (2 F H_2 - q L_2^2)}{2 \Delta} \\
 N_B &= \frac{L_2 (2 F H_1 + q L_1 L_2)}{2 \Delta}
 \end{aligned}$$

$$T_B = \frac{H_1 (2 F H_2 - q L_2^2)}{2 \Delta}$$

$$R_{Cw} = \frac{L_2 (2 F H_1 + q L_1 L_2)}{2 \Delta}$$

$$R_{Cv} = -q L_2 + \frac{H_1 (2 F H_2 - q L_2^2)}{2 \Delta}$$

Un'utile verifica puo' essere il controllo dell'equilibrio globale della struttura. Dovra' essere:

$$\begin{aligned} R_{Aw} + R_{Cw} + F &= 0 \\ R_{Av} + R_{Cv} + qL_2 &= 0 \\ -FH_1 - R_{Cw} (H_1 - H_2) - qL_2 \left( L_1 + \frac{L_2}{2} \right) - R_{Cv} (L_1 + L_2) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

ed inserendo i valori delle reazioni gia' calcolati si ha :

$$\begin{aligned} \frac{L_1 (2 F H_2 - q L_2^2)}{2 \Delta} + \frac{L_2 (2 F H_1 + q L_1 L_2)}{2 \Delta} + F &\equiv 0 \\ - \frac{H_1 (2 F H_2 - q L_2^2)}{2 \Delta} - q L_2 + \frac{H_1 (2 F H_2 - q L_2^2)}{2 \Delta} + q L_2 &\equiv 0 \\ -FH_1 - \frac{L_2 (2 F H_1 + q L_1 L_2)}{2 \Delta} (H_1 - H_2) - & \\ qL_2 \left( L_1 + \frac{L_2}{2} \right) - (L_1 + L_2) \left( -q L_2 + \frac{H_1 (2 F H_2 - q L_2^2)}{2 \Delta} \right) &\equiv 0 \end{aligned} \quad (14)$$

#### ■ Calcoli

### Esercizio n .4

La struttura di Figura 7 e' gia' stata studiata nella prima Applicazione, e la scrittura della matrice cinematica aveva condotto a concludere che essa fosse cinematicamente determinata. Poiche' per essa si ha  $3t - s = 9 - 9 = 0$ , se ne deduce subito che essa e' isostatica.

La struttura e' caricata da una forza orizzontale in sommita' del primo tratto, e da una forza verticale in corrispondenza della cerniera in D. Sostituendo ai vincoli le reazioni incognite e le caratteristiche della sollecitazione interna, si giunge al diagramma di Figura 8, dove banali considerazioni di equilibrio della cerniera in D portano a scrivere:

$$T_{Dsin} = T_{Ddes} + F_v \quad (15)$$

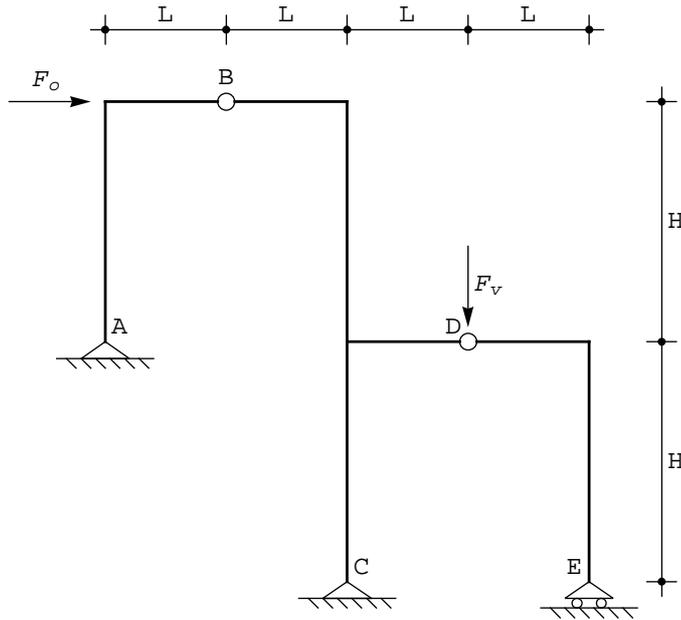


Figura 7 - Un telaio zoppo a due campate

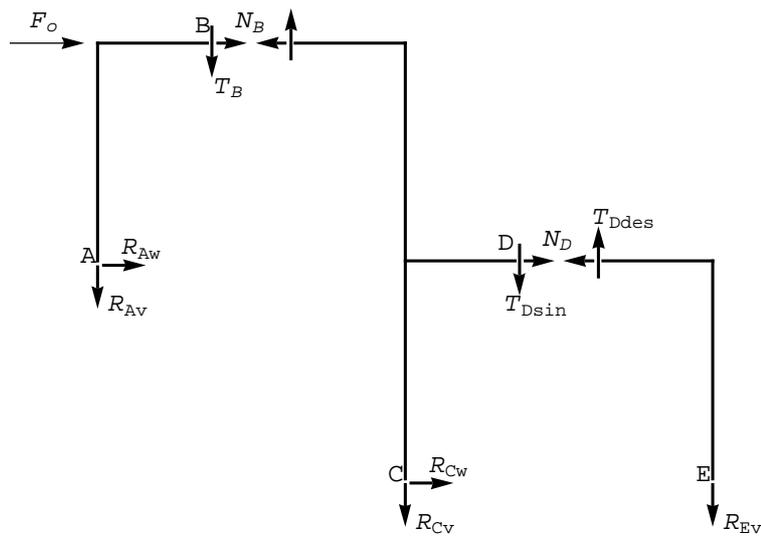


Figura 8 - Il diagramma delle forze per il telaio di Figura 7

Le equazioni di equilibrio si possono ora scrivere imponendo l'equilibrio dei tre tratti di Figura 8, e scegliendo come poli i punti A, C ed E, rispettivamente:

$$\begin{aligned}
 R_{Aw} + N_B + F_o &= 0 \\
 R_{Av} + T_B &= 0 \\
 -N_B H - F_o H - T_B L &= 0 \\
 -N_B + N_D + R_{Cw} &= 0 \\
 -T_B + T_{Dsin} + R_{Cv} &= 0 \\
 2 N_B H - T_B L - N_D H - T_{Dsin} L &= 0 \\
 -N_D &= 0 \\
 -T_{Ddes} + R_{Ev} &= 0 \\
 N_D H - T_{Ddes} L &= 0
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

ed introducendo la (15) si giunge alla relazione matriciale :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -H & -L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2H & -L & 0 & 0 & -H & -L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H & -L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{Aw} \\ R_{Av} \\ N_B \\ T_B \\ R_{Cw} \\ R_{Cv} \\ N_D \\ T_{Dsin} \\ R_{Ev} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_o \\ 0 \\ F_o H \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_v \\ F_v L \end{pmatrix} \quad (17)$$

La matrice di equilibrio risulta essere la trasposta della matrice cinematica dedotta nell'applicazione precedente, in quanto si sono scelti i medesimi poli. Il determinante e' quindi pari a  $-3HL^2$ , sicuramente diverso da zero. Risolvendo le (17) si ha:

$$\begin{aligned} R_{Aw} &= \frac{-2H F_o + L F_v}{3H} \\ R_{Av} &= \frac{2H F_o - L F_v}{3L} \\ N_B &= \frac{-H F_o - L F_v}{3H} \\ T_B &= \frac{-2H F_o + L F_v}{3L} \\ R_{Cw} &= \frac{-H F_o - L F_v}{3H} \\ R_{Cv} &= -\frac{2(H F_o - 2L F_v)}{3L} \\ N_D &= 0 \\ T_{Dsin} &= -F_v \\ R_{Ev} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Le equazioni globali di equilibrio si scrivono :

$$\begin{aligned} R_{Aw} + R_{Cw} + F_o &= 0 \\ R_{Av} + R_{Cv} + R_{Ev} + F_v &= 0 \\ -F_o H - 3F_v L + R_{Cw} H - 2R_{Cv} L - 4R_{Ev} L &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

avendo scelto come polo il punto A.

■ **Calcoli**

**Esercizio n .5**

Si consideri ora il telaio di Figura 9, ripreso da V. Franciosi, "Problemi di Scienza delle Costruzioni", Vol.1, pag.179-185. Esso puo' riguardarsi come un telaio rettangolare a quattro cerniere, con un pendolo che collega il primo ed il terzo tratto. Le incognite reattive sono rappresentate dalle reazioni orizzontali e verticali nei due appoggi, nei tagli e negli sforzi normali nelle due cerniere interne, e nello sforzo normale  $N_{HK}$  nel pendolo. In totale si ha quindi  $s = 9$ , e poiche' la struttura e' costituita da tre tratti rigidi, si ha  $3t-s = 0$

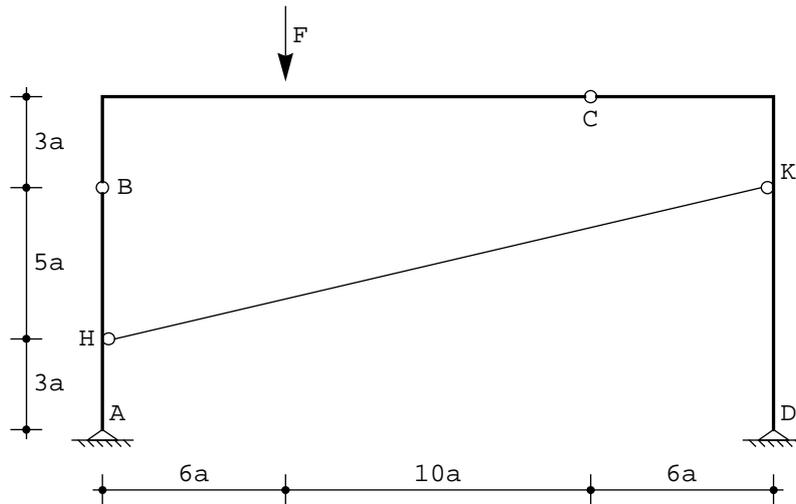


Figura 9 - Un telaio a quattro cerniere e pendolo interno

Lo sforzo normale nel pendolo e' considerato positivo se esso tende ad allungare il pendolo stesso (sforzo di trazione). Ne segue che lo stesso sforzo normale, agente sulla struttura, tende a far avvicinare i punti H e K di estremita' del pendolo. La struttura libera dei vincoli e' allora riportata in Figura 10.

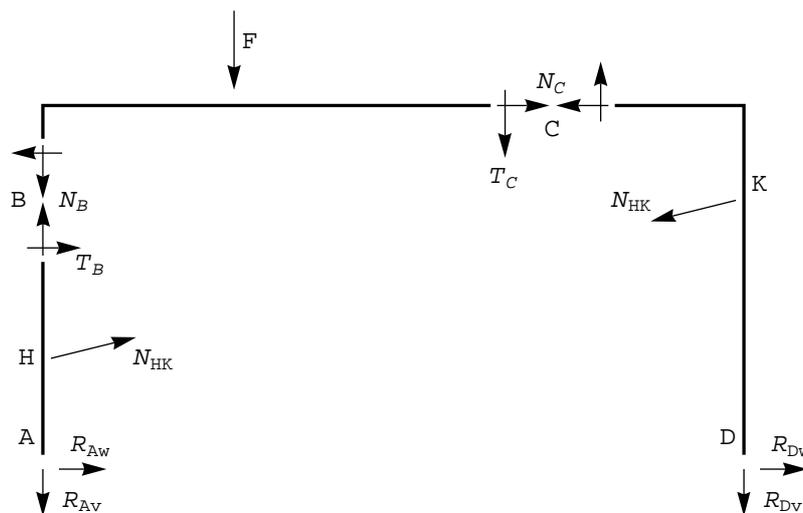


Figura 10 - Il diagramma delle forze per il telaio di Figura 9

Per il primo tratto si potra' scrivere :

$$\begin{aligned}
 R_{Aw} + T_B + N_{HK} \cos(\alpha) &= 0 \\
 R_{Av} - N_B - N_{HK} \sin(\alpha) &= 0 \\
 -8a T_B - 3a N_{HK} \cos(\alpha) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

avendo scelto come polo il punto A, ed avendo definito l'inclinazione del pendolo attraverso l'angolo  $\alpha = \text{Arctan}(5/22)$ . Per il secondo tratto, invece:

$$\begin{aligned}
 -T_B + N_C &= 0 \\
 N_B + F + T_C &= 0 \\
 -6a F - 16a T_C - 3a N_C &= 0
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

avendo scelto come polo il punto B, ed infine:

$$\begin{aligned} -N_C + R_{Dw} - N_{HK} \cos(\alpha) &= 0 \\ -T_C + R_{Dv} + N_{HK} \sin(\alpha) &= 0 \\ 11 a N_C - 6 a T_C + 8 a N_{HK} \cos(\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

avendo utilizzato D come polo del terzo tratto.

Si può quindi scrivere, matricialmente :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos(\alpha) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sin(\alpha) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 a \cos(\alpha) & 0 & 8 a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 a & 16 a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 a \cos(\alpha) & 0 & 0 & 11 a & -6 a & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{Aw} \\ R_{Av} \\ N_{HK} \\ N_B \\ T_B \\ N_C \\ T_C \\ R_{Dw} \\ R_{Dv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \\ -6 a F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Il determinante della matrice di equilibrio A e' pari a:

$$\det(A) = 442 a^3 \cos(\alpha) \quad (24)$$

e quindi la struttura e' isostatica. Per la particolare condizione di carico proposta in Figura 9 le reazioni valgono:

$$\begin{aligned} R_{Aw} &= \frac{90}{221} F; R_{Av} = -\frac{8}{11} F \\ R_{Dw} &= -\frac{90}{221} F; R_{Dv} = -\frac{3}{11} F \\ N_B &= -\frac{128}{221} F; T_B = \frac{54}{221} F \\ N_C &= \frac{54}{221} F; T_C = -\frac{93}{221} F \\ N_{HK} &= -\frac{72 \sqrt{509}}{2431} F \approx -0.6682 F \end{aligned} \quad (25)$$

e quindi il pendolo risulta compresso.

■ **Calcoli**

**Esercizio n .6**

La struttura di Figura 11 e' anch'essa ripresa da V.Franciosi, Problemi di Scienza delle Costruzioni, vol.1, dove e' risolta graficamente. Essa e' costituita da una trave appoggiata, con cerniera intermedia, carrello e sbalzo, su cui poggia una coppia di aste connesse da un pendolo. I tratti rigidi sono due, e quindi  $3t = 6$ , le incognite reattive sono le due reazioni nell'appoggio, la reazione verticale del carrello, lo sforzo normale ed il taglio nella cerniera, lo sforzo normale nel pendolo. Quindi  $s = 6$ , e  $3t - s = 0$

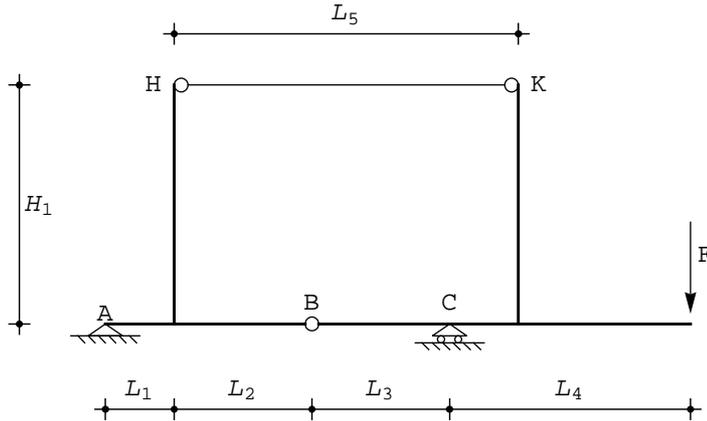


Figura 11 - Una trave appoggiata, con cerniera intermedia, carrello e sbalzo, su cui poggia una coppia di aste connesse da un pendolo

Rimuovendo i vincoli, si giunge allo schema di Figura 12, su cui possono scriversi le equazioni di equilibrio. Scegliendo i poli nei punti A - per il primo tratto, e C per il secondo tratto, si giunge a scrivere:

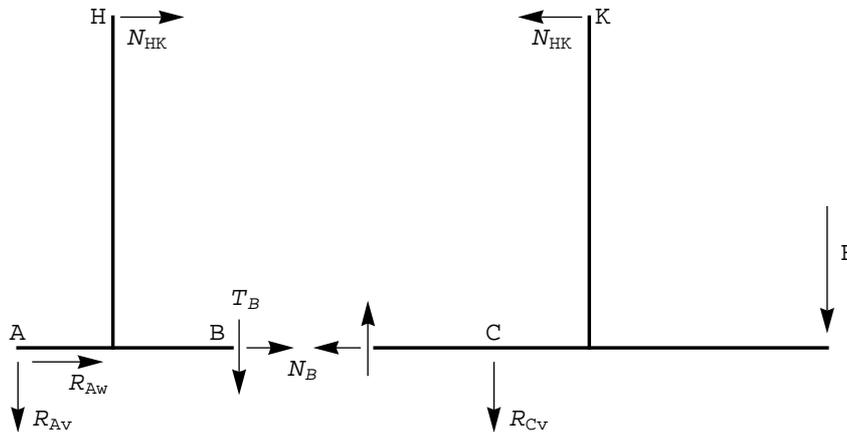


Figura 12 - Il diagramma delle forze per l'esempio di Figura 11

$$\begin{aligned} R_{Aw} + N_B + N_{HK} &= 0 \\ R_{Av} + T_B &= 0 \\ -N_{HK} H_1 - T_B (L_1 + L_2) &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} -N_B - N_{HK} &= 0 \\ -T_B + R_{Cv} + F &= 0 \\ -R_{Cv} L_3 - F (L_3 + L_4) + N_{HK} H_1 &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

ossia, matricialmente :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 + L_2 & 0 & H_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_3 & H_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{Aw} \\ R_{Av} \\ N_B \\ T_B \\ R_{Cv} \\ N_{HK} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \\ F (L_3 + L_4) \end{pmatrix} \quad (28)$$

Il determinante della matrice di equilibrio è pari ad  $H_1(L_1 + L_2 + L_3)$ , e quindi la struttura risulta isostatica. Le reazioni sono fornite da:

$$R_{Aw} = 0; R_{Av} = F \frac{L_4}{L_1 + L_2 + L_3}; R_{Cv} = -F \frac{L_1 + L_2 + L_3 + L_4}{L_1 + L_2 + L_3}$$

$$N_B = -F \frac{(L_1 + L_2) L_4}{H_1 (L_1 + L_2 + L_3)}; T_B = -\frac{L_4}{L_1 + L_2 + L_3}$$

$$N_{HK} = F \frac{(L_1 + L_2) L_4}{H_1 (L_1 + L_2 + L_3)}$$

E' ovviamente nulla l'unica componente reattiva orizzontale, mentre puo' facilmente verificarsi che  $R_{Av} + R_{Cv} + F = 0$ . Il pendolo HK risulta teso.

■ **Calcoli**

**Esercizio n .7**

La struttura seguente e' un telaio, costituito da due tratti rigidi connessi tra loro con un bipendolo interno, e vincolati al suolo con un appoggio ed un altro bipendolo. Per esso si potranno scrivere quindi sei equazioni di equilibrio, mentre le incognite reattive saranno le due reazioni orizzontali e verticali dell'appoggio in C, la reazione verticale e la coppia reattiva in A, lo sforzo normale ed il momento in B. Quindi, ancora una volta,  $3t-s=0$

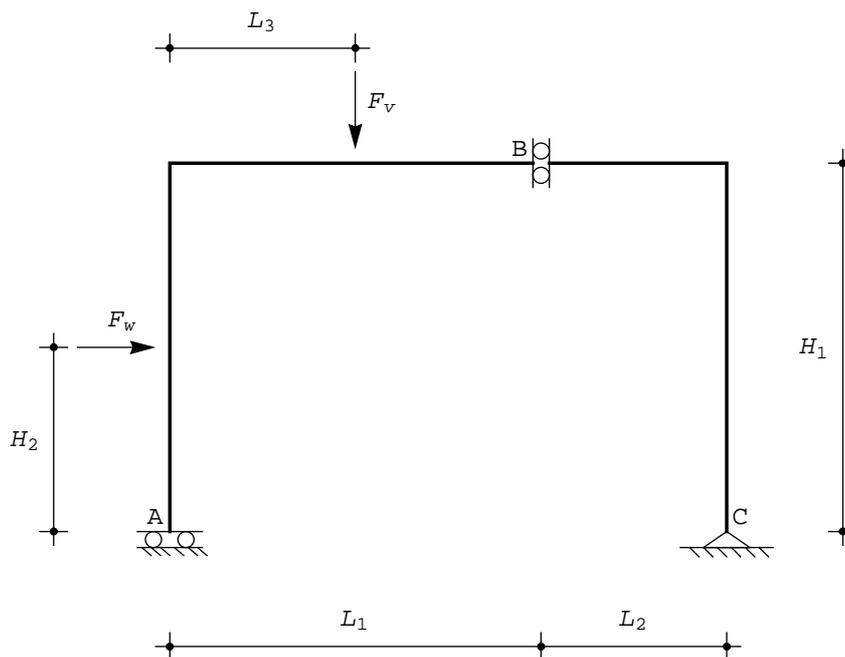


Figura 13 - Un telaio con cerniera e due bipendoli

Per scrivere le equazioni di equilibrio, si consideri lo schema di Figura 14, e si scelgano come poli i due punti A e C, rispettivamente per il primo ed il secondo tratto. Si ha:

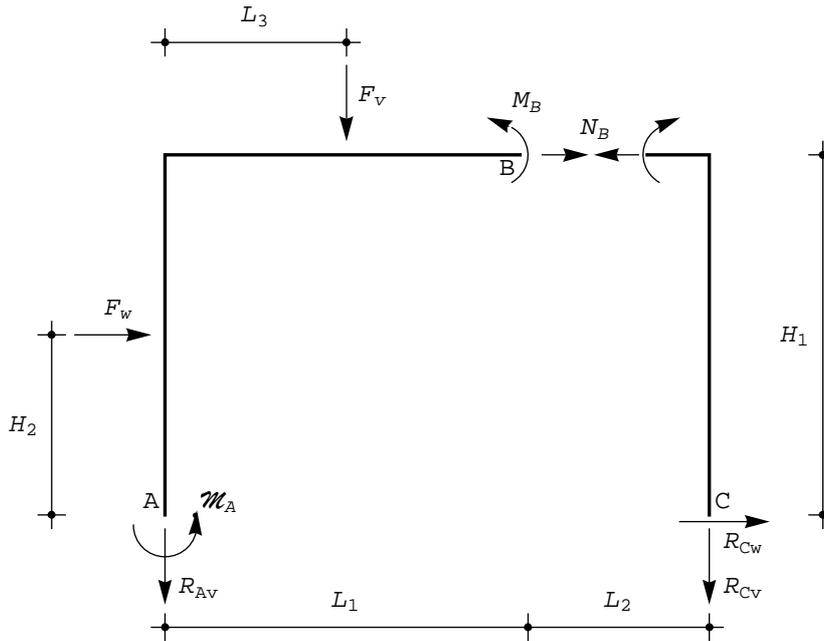


Figura 14 - Il diagramma delle forze per l'esempio di Figura 13

$$\begin{aligned}
 F_w + N_B &= 0 \\
 R_{Av} + F_v &= 0 \\
 \mathcal{M}_A + M_B - N_B H_2 - F_w H_2 - F_v L_3 &= 0 \\
 R_{Cw} - N_B &= 0 \\
 R_{Cv} &= 0 \\
 -M_B + N_B H_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{30}$$

e matricialmente :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -H_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & H_1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{Av} \\ \mathcal{M}_A \\ N_B \\ M_B \\ R_{Cw} \\ R_{Cv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_w \\ -F_v \\ F_w H_2 + F_v L_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

La struttura è sicuramente non labile, in quanto il determinante di A è pari a -1. La soluzione delle (30) è immediata:

$$\begin{aligned}
 R_{Av} &= -F_v; \quad \mathcal{M}_A = F_w H_1 + F_v L_3 \\
 N_B &= -F_w; \quad M_B = -F_w H_1 \\
 R_{Cw} &= -F_w; \quad R_{Cv} = 0
 \end{aligned} \tag{32}$$

Si noti infine che spesso, e quasi sempre nell'approccio grafico, si preferisce utilizzare il teorema del trasporto, pensare che il bipendolo reagisca con una forza ortogonale al piano di scorrimento del bipendolo stesso, e passante per un punto dettato dalle condizioni di equilibrio.

## ■ Calcoli

### Esercizio n .8

Il portale di Figura 15 e' formato da tre tratti rigidi, ed e' vincolato al suolo con un appoggio a sinistra ed un incastro a destra. Le nove incognite reattive possono calcolarsi in base alla scrittura di nove equazioni di equilibrio.

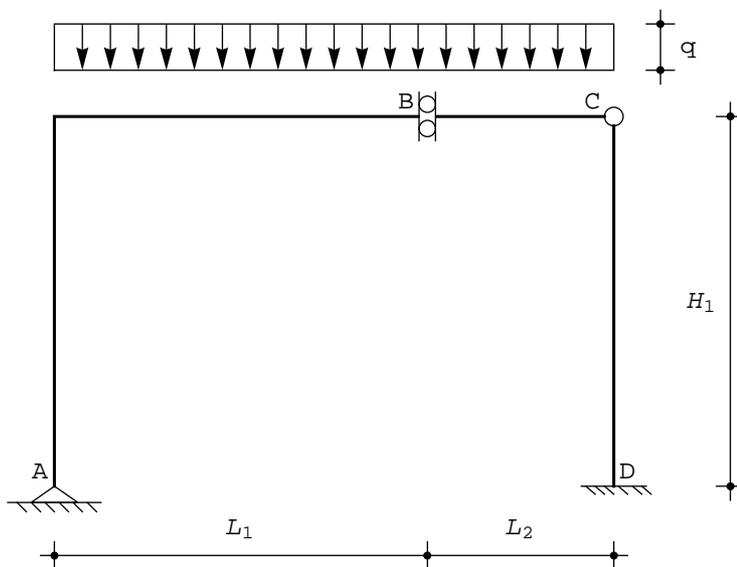


Figura 15 - Un altro semplice telaio soggetto a carico distribuito sul traverso

A tal fine, si sostituiscono ai vincoli le rispettive reazioni, giungendo al diagramma di Figura 16; si noti che la cerniera in C e' posta all'incrocio del traverso col ritto di destra, e che per l'equilibrio del concio lo sforzo normale nel traverso sara' uguale al taglio nel ritto, mentre il taglio nel traverso sara' uguale allo sforzo normale nel ritto. Le equazioni di equilibrio possono scriversi, utilizzando i punti A, B e D come poli:

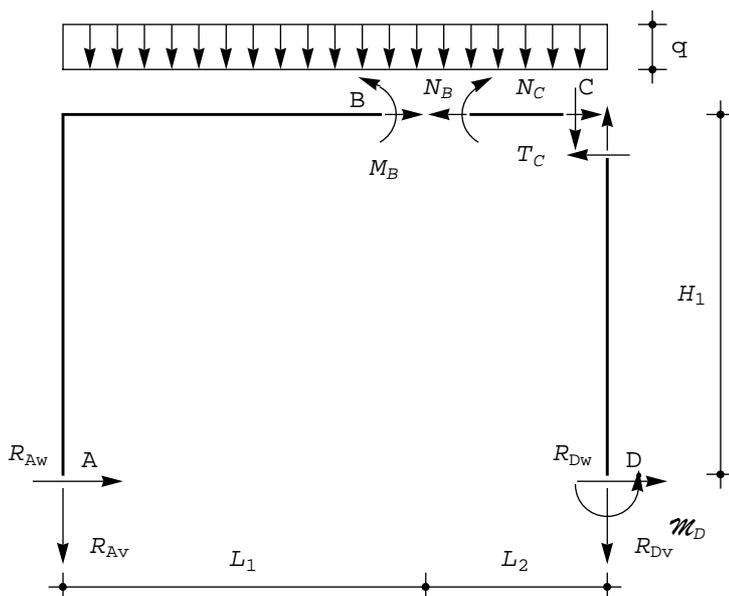


Figura 16 - Il diagramma delle forze per il telaio di Figura 15

$$\begin{aligned}
R_{Aw} + N_B &= 0 \\
R_{Av} + qL_1 &= 0 \\
M_B - N_B H_1 - q \frac{L_1^2}{2} &= 0 \\
-N_B + N_C &= 0 \\
T_C + qL_2 &= 0 \\
-M_B - T_C L_2 - q \frac{L_2^2}{2} &= 0
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
-N_C + R_{Dw} &= 0 \\
-T_C + R_{Dv} &= 0 \\
\mathcal{M}_D + N_C H_1 &= 0
\end{aligned} \tag{35}$$

ossia, matricialmente :

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -H_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -L_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
R_{Aw} \\
R_{Av} \\
N_B \\
M_B \\
N_C \\
T_C \\
R_{Dw} \\
R_{Dv} \\
\mathcal{M}_D
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\
-qL_1 \\
q \frac{L_1^2}{2} \\
0 \\
-qL_2 \\
q \frac{L_2^2}{2} \\
0 \\
0 \\
0
\end{pmatrix} \tag{36}$$

Il determinante di A e' pari ad  $H_1$  e quindi la struttura e' sicuramente non labile. Per il carico in Figura, le reazioni valgono:

$$\begin{aligned}
R_{Aw} = -R_{Dw} &= q \frac{L_1^2 - L_2^2}{2 H_1}; \quad R_{Av} = -qL_1; \quad R_{Dv} = -qL_2; \quad \mathcal{M}_D = \frac{1}{2} q (L_1^2 - L_2^2) \\
N_B = q \frac{L_2^2 - L_1^2}{2 H_1}; \quad M_B &= \frac{qL_2^2}{2}; \quad N_C = q \frac{L_2^2 - L_1^2}{2 H_1}; \quad T_C = -qL_2
\end{aligned} \tag{37}$$

#### ■ Calcoli

## Figure