

29 - La ricerca dei carichi critici

■ [A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 7 maggio 2013]

In questo capitolo si studiano le travi soggette a carico assiale di compressione F , nell'ipotesi che gli effetti flessionali indotti dal carico non siano trascurabili. L'equazione differenziale che regge il problema e'

$$v_2''''(x_3) + \alpha^2 v_2''(x_3) = 0 \quad (1)$$

con :

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI} \quad (2)$$

La soluzione della (1) puo' scriversi come :

$$v_2(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 \cos[\alpha x_3] + a_3 \sin[\alpha x_3] \quad (3)$$

e le quattro costanti di integrazione devono essere calcolate imponendo le opportune condizioni ai limiti. L'estensione alle travi a piu' campate e' immediata

Esempio n .1

Si consideri la trave di Figura 1, costituita da due tratti di lunghezza L_1 ed L_2 , rispettivamente, connessi da una cerniera intermedia. Occorre introdurre due sistemi di riferimento, con origine nei nodi A e B, rispettivamente, e due linee elastiche, $u_2(x_3)$ e $v_2(x_3)$. In base alla (1) potra' scriversi:

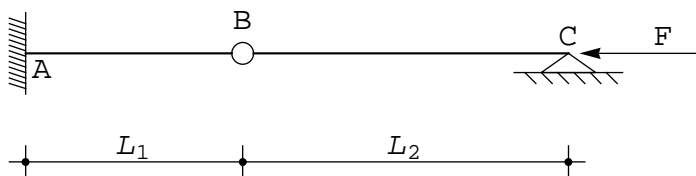


Figura 1 - Un primo esempio per il calcolo del carico critico

$$u_2''''(x_3) + \alpha^2 u_2''(x_3) = 0 \quad (4)$$

$$v_2''''(x_3) + \alpha^2 v_2''(x_3) = 0 \quad (5)$$

con soluzione :

$$u_2(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 \cos[\alpha x_3] + a_3 \sin[\alpha x_3] \quad (6)$$

$$v_2(x_3) = b_0 + b_1 x_3 + b_2 \cos[\alpha x_3] + b_3 \sin[\alpha x_3] \quad (7)$$

■ Le condizioni ai limiti

Le condizioni ai limiti in corrispondenza della cerniera devono essere attentamente considerate, in quanto l'equilibrio della cerniera va garantito nella sua configurazione deformata, a somiglianza di quanto detto per l'estremo libero della trave a mensola. Utilizzando un approccio variazionale, la trave di Figura avra' una energia potenziale totale la cui variazione prima potra' scriversi:

$$\delta_1 E_t = EI \int_0^{L_1} u_2'' \delta u_2'' dx_3 +$$

$$EI \int_0^{L_2} v_2'' \delta v_2'' dx_3 - F \int_0^{L_1} u_2' \delta u_2' dx_3 - F \int_0^{L_2} v_2' \delta v_2' dx_3 = 0$$

ed integrando opportunamente per parti si ottiene :

$$[EI u_2'' \delta u_2']_0^{L_1} - [EI u_2'' \delta u_2']_0^{L_1} +$$

$$EI \int_0^{L_1} u_2'''' \delta u_2 dx_3 + [EIV_2' \delta v_2']_0^{L_2} - [EIV_2'' \delta v_2]_0^{L_2} +$$

$$EI \int_0^{L_2} v_2'''' \delta v_2 dx_3 - [F u_2' \delta u_2]_0^{L_1} +$$

$$F \int_0^{L_1} u_2'' \delta u_2 dx_3 - [F v_2' \delta v_2]_0^{L_1} + F \int_0^{L_2} v_2'' \delta v_2 dx_3 = 0$$
(9)

Annullando gli integrali si ottengono le due equazioni differenziali (4 - 5), ed annullando le parti finite possono leggersi le condizioni ai limiti. In corrispondenza della cerniera sarà:

$$EI u_2''(L_1) \delta u_2'(L_1) - EIV_2''(0) \delta v_2'(0) = 0$$

$$(-EI u_2''''(L_1) - F u_2'(L_1)) \delta u_2(L_1) +$$

$$(EIV_2''''(0) + F v_2'(0)) \delta v_2(0) = 0$$
(10)

La cerniera impone che sia $\delta u_2(L_1) = \delta v_2(0)$, mentre le rotazioni possono essere diverse. Ne seguono la condizione di congruenza:

$$u_2(L_1) = v_2(0)$$
(11)

e le tre condizioni di equilibrio :

$$u_2''(L_1) = 0$$

$$v_2''(0) = 0$$

$$-EI u_2''''(L_1) - F u_2'(L_1) = -EIV_2''''(0) - F v_2'(0)$$
(12)

Nei due estremi, invece, vanno imposte le usuali condizioni:

$$u_2(0) = 0$$

$$u_2'(0) = 0$$

$$v_2(L_2) = 0$$

$$v_2''(L_2) = 0$$
(13)

■ Il sistema di equazioni

Derivando opportunamente, e valutando agli estremi, le otto condizioni ai limiti si tramutano in otto equazioni lineari ed omogenee nelle otto costanti di integrazione:

$$\begin{aligned}
a_0 + a_2 &= 0 \\
a_1 + \alpha a_3 &= 0 \\
a_0 + a_1 L_1 + a_2 \cos[\alpha L_1] + a_3 \sin[\alpha L_1] &= b_0 + b_2 \\
-\alpha^2 a_2 \cos[\alpha L_1] - \alpha^2 a_3 \sin[\alpha L_1] &= 0 \\
-\alpha^2 b_2 &= 0 \\
\alpha^2 (-a_1 + b_1) &= 0 \\
b_0 + b_1 L_2 + b_2 \cos[\alpha L_2] + b_3 \sin[\alpha L_2] & \\
-\alpha^2 b_2 \cos[\alpha L_2] - \alpha^2 b_3 \sin[\alpha L_2] &= 0
\end{aligned} \tag{14}$$

Il sistema (14) puo' scriversi, matricialmente :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \tag{15}$$

e la matrice dei coefficienti A si esplicita come :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & L_1 & \cos[\alpha L_1] & \sin[\alpha L_1] & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & \cos[\alpha L_1] & \sin[\alpha L_1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L_2 & \cos[\alpha L_2] & \sin[\alpha L_2] \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos[\alpha L_2] & \sin[\alpha L_2]
\end{pmatrix} \tag{16}$$

Per ottenere soluzioni non banali, ossia spostamenti diversi da zero, occorrera' annullare il determinante, giungendo all'equazione trascendente in α :

$$\alpha^8 \sin[\alpha L_2] (-\sin[\alpha L_1] + \alpha \cos[\alpha L_1] (L_1 + L_2)) = 0 \tag{17}$$

Ne segue che potra' essere:

$$\sin[\alpha L_2] = 0 \tag{18}$$

oppure :

$$\tan[\alpha L_1] = \alpha (L_1 + L_2) \tag{19}$$

La (18) condurra' alle soluzioni :

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L_2} \tag{20}$$

mentre la (19) dovra' essere risolta numericamente. E' pero' fisicamente evidente che per $L_2 \gg L_1$ la trave si comportera' come una trave semplicemente appoggiata agli estremi, mentre per $L_1 \gg L_2$ la trave si comportera' come una trave incastrata a sinistra ed appoggiata a destra. Nel primo caso il carico critico sara' dettato dalla (18), nel secondo caso dalla (19).

Piu' in dettaglio, e' possibile calcolare numericamente che per $L_1/L_2 \approx 0.4303$ la (18) e la (19) portano ad un carico critico coincidente, e quindi:

- per $L_1 < 0.4303 L_2$, sara' $\alpha_{cr} = \pi/L_2$,

- per $L_1 > 0.4303 L_2$, il carico critico andra' calcolato numericamente dalla (19)

■ La deformata nel caso $L_1 < 0.4303 L_2$

Come detto, in questo caso il carico critico e' fornito da:

$$\alpha_{cr} = \frac{\pi}{L_2} \quad (21)$$

e la deformata, sinusoidale, interessa la sola campata di destra.

$$u_2(x_3) = 0 \quad (22)$$

$$v_2(x_3) = C \operatorname{Sin}\left[\pi \frac{x_3}{L_2}\right] \quad (23)$$

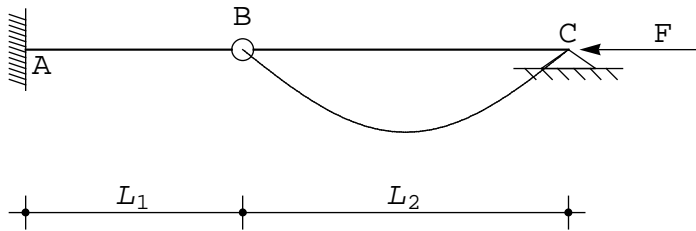


Figura 2 - La deformata in corrispondenza del carico critico per $L_1 < 0.4303 L_2$

■ La deformata nel caso $L_1 > 0.4303 L_2$

Si assuma ora $L_1 = L_2$, per cui il carico critico deve essere calcolato a partire dalla (19).

La prima radice dell'equazione

$$\operatorname{Tan}[\alpha L_1] = 2 \alpha L_1 \quad (24)$$

e' fornita da $\alpha L_1 = 1.16556$, e ad essa corrisponde la deformata di Figura.

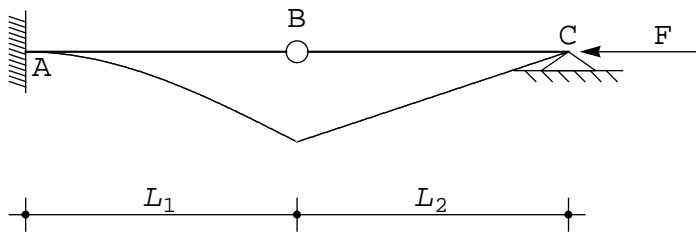


Figura 3 - La deformata in corrispondenza del carico critico per $L_1 = L_2$

Esempio n. 2

Si considera ora la trave a due campate con sbalzo di Figura 4, soggetta ad un carico assiale di compressione nell'estremo libero.

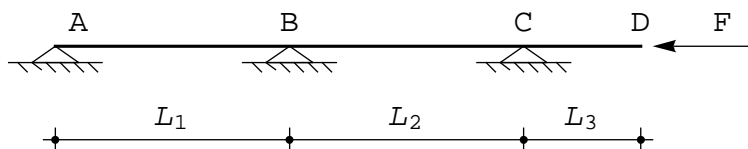


Figura 4 - Una trave continua su tre appoggi, con sbalzo

Occorre introdurre tre differenti linee elastiche:

$$u_2'''' (x_3) + \alpha^2 u_2'' (x_3) = 0 \quad (25)$$

$$v_2'''' (x_3) + \alpha^2 v_2'' (x_3) = 0 \quad (26)$$

$$w_2'''' (x_3) + \alpha^2 w_2'' (x_3) = 0 \quad (27)$$

a valori in [AB], [BC] e [CD], rispettivamente, e con soluzione :

$$u_2 (x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 \cos [\alpha x_3] + a_3 \sin [\alpha x_3] \quad (28)$$

$$v_2 (x_3) = b_0 + b_1 x_3 + b_2 \cos [\alpha x_3] + b_3 \sin [\alpha x_3] \quad (29)$$

$$w_2 (x_3) = c_0 + c_1 x_3 + c_2 \cos [\alpha x_3] + c_3 \sin [\alpha x_3] \quad (30)$$

Le dodici condizioni ai limiti non presentano particolari difficoltà:

$$\begin{aligned} u_2 (0) &= 0 \\ u_2'' (0) &= 0 \\ u_2 (L_1) &= 0 \\ v_2 (0) &= 0 \\ u_2' (L_1) &= v_2' (0) \\ u_2'' (L_1) &= v_2'' (0) \\ v_2 (L_2) &= 0 \\ w_2 (0) &= 0 \\ v_2' (L_2) &= w_2' (0) \\ v_2'' (L_2) &= w_2'' (0) \\ u_2'' (L_3) &= 0 \\ u_2'''' (L_3) + \alpha^2 u_2'' (L_3) &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

e portano ad un sistema omogeneo di dodici equazioni in dodici incognite, retto dalla matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & L_1 & \cos [\alpha L_1] & \sin [\alpha L_1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \sin [\alpha L_1] & \alpha \cos [\alpha L_1] & 0 & -1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \cos [\alpha L_1] & \sin [\alpha L_1] & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L_2 & \cos [\alpha L_2] & \sin [\alpha L_2] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha \sin [\alpha L_2] & \alpha \cos [\alpha L_2] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos [\alpha L_2] & \sin [\alpha L_2] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

Imponendo che il determinante di \mathbf{A} sia nullo, e semplificando, si giunge alla seguente equazione in α :

$$\begin{aligned} \sin [\alpha L_1] (-\sin [\alpha L_2] \sin [\alpha L_3] + \alpha L_2 \sin [\alpha (L_2 + L_3)]) + \\ \alpha L_1 (2 (-1 + \cos [\alpha L_2]) \sin [\alpha L_1] \sin [\alpha L_3] + \\ \sin [\alpha L_2] \sin [\alpha (L_1 + L_3)] - \alpha L_2 \sin [\alpha (L_1 + L_2 + L_3)]) = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

la cui soluzione può essere ricercata numericamente, una volta assegnate le tre luci L_1 , L_2 ed L_3 . Se ad esempio si ha $L_1 = L_2 = L$ ed $L_3 = L/2$, l'equazione si riduce a:

$$\sin\left[\frac{\alpha L}{2}\right] \left(-1 - 2 \alpha^2 L^2 + \cos[2 \alpha L] + 2 \alpha L (-2 \alpha L (\cos[\alpha L] + \cos[2 \alpha L]) + 3 \sin[2 \alpha L])\right) = 0 \quad (34)$$

Una prima soluzione si ottiene soddisfacendo la :

$$\sin\left[\frac{\alpha L}{2}\right] = 0 \quad (35)$$

e quindi $\alpha L = 2 \pi$, mentre una seconda possibile soluzione si ha in corrispondenza di :

$$-1 - 2 \alpha^2 L^2 + \cos[2 \alpha L] + 2 \alpha L (-2 \alpha L (\cos[\alpha L] + \cos[2 \alpha L]) + 3 \sin[2 \alpha L]) = 0 \quad (36)$$

ed e' pari a $\alpha L = 1.90678$. Il carico critico, quindi, e' riferibile a quest'ultimo valore, ed e' esprimibile come:

$$F_{cr} = 3.6358 \frac{EI}{L^2} \quad (37)$$

La corrispondente deformata puo' ad esempio ottenersi risolvendo le equazioni (31) in funzione della costante c_0 . Si ottiene:

$$u_2(x_3) = c_0 \left(-0.306055 x_3 + 0.324181 \sin\left[1.90678 \frac{x_3}{L}\right]\right) \quad (38)$$

$$v_2(x_3) = c_0 \left(-0.306055 + 1.30605 x_3 + 0.306055 \cos\left[1.90678 \frac{x_3}{L}\right] - 0.9523 \sin\left[1.90678 \frac{x_3}{L}\right]\right) \quad (39)$$

$$w_2(x_3) = c_0 \left(1 - \cos\left[1.90678 \frac{x_3}{L}\right] + 0.71 \sin\left[1.90678 \frac{x_3}{L}\right]\right) \quad (40)$$

La deformata si presenta come in Figura 5

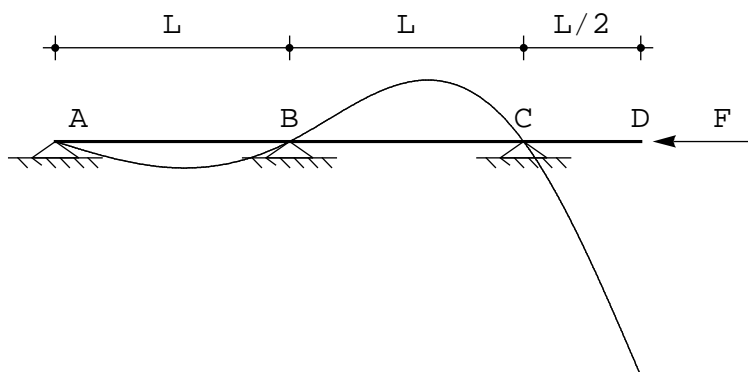


Figura 5 - La deformata per la trave continua in corrispondenza del carico critico

Esempio n .3

Un ulteriore esempio e' riportato in Figura 6: si tratta di una trave appoggiata a sinistra ed incastrata a destra con un incastro assialmente scorrevole, ulteriormente vincolata in una sezione intermedia tramite un bipendolo esterno. La trave e' soggetta ad un carico assiale di compressione di valore F_1 nella sezione di destra, e ad un'ulteriore forza assiale, di valore F_2 , agente in corrispondenza del bipendolo.

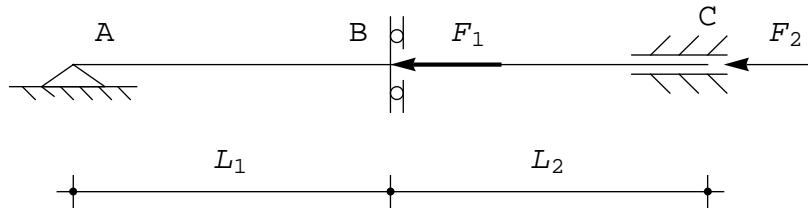


Figura 6 - Una trave soggetta a due forze assiali

Conseguentemente, lo sforzo normale nel tratto AB sarà pari ad $F_1 + F_2$, mentre nella restante parte BC lo sforzo normale sarà dovuto alla sola forza F_2 . Le due equazioni differenziali per i due tratti si scrivono quindi:

$$u_2''''(x_3) + \alpha_1^2 u_2''(x_3) = 0 \quad (41)$$

$$v_2''''(x_3) + \alpha_2^2 v_2''(x_3) = 0 \quad (42)$$

avendo definito le due quantità:

$$\alpha_1^2 = \frac{F_1 + F_2}{EI}; \quad \alpha_2^2 = \frac{F_2}{EI} \quad (43)$$

La soluzione delle (41 - 42) si scrive come:

$$u_2(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 \cos[\alpha_1 x_3] + a_3 \sin[\alpha_1 x_3] \quad (44)$$

$$v_2(x_3) = b_0 + b_1 x_3 + b_2 \cos[\alpha_2 x_3] + b_3 \sin[\alpha_2 x_3] \quad (45)$$

Le otto condizioni ai limiti sono ovvie:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2'(0) &= 0 \\ u_2(L_1) &= v_2(0) \\ u_2'(L_1) &= 0 \\ v_2'(0) &= 0 \\ u_2''(L_1) &= v_2''(0) \\ u_2(L_2) &= 0 \\ u_2'(L_2) &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

e portano ad un sistema omogeneo di otto equazioni, con matrice dei coefficienti pari a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & L_1 & \cos[L_1 \alpha_1] & \sin[L_1 \alpha_1] & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\sin[L_1 \alpha_1] \alpha_1 & \cos[L_1 \alpha_1] \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin[L_1 \alpha_1] \alpha_1^3 & -\cos[L_1 \alpha_1] \alpha_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L_2 & \cos[L_2 \alpha_2] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\sin[L_2 \alpha_2] \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (47)$$

Imponendo che il determinante di A sia nullo, si giunge ad una equazione in α_1 ed α_2 :

$$\begin{aligned} -\sin[\alpha_1 L_1] \sin[\alpha_2 L_2] \alpha_2^3 + \cos[\alpha_1 L_1] \sin[\alpha_2 L_2] L_1 \alpha_1 \alpha_2^3 + \\ \cos[\alpha_1 L_1] \alpha_1^3 (-2 + 2 \cos[\alpha_2 L_2] + \alpha_2 L_2 \sin[\alpha_2 L_2]) = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

che definisce, nel piano $\alpha_1 - \alpha_2$, una *frontiera di stabilità*. Se, ad esempio, $F_2 = F$ ed $F_1 = 2F$, allora

$\alpha_1 = \sqrt{3} \alpha_2$, e l'equazione precedente diviene, nell'ulteriore ipotesi di luci uguali $L_1 = L_2 = L$:

$$-\sin[\alpha_2 L] \sin\left[\sqrt{3} \alpha_2 L\right] + \sqrt{3} \cos\left[\sqrt{3} \alpha_2 L\right] (-6 + 6 \cos[\alpha_2 L] + 4 \alpha_2 L \sin[\alpha_2 L]) = 0 \quad (49)$$

la cui prima radice e':

$$\alpha_2 L = 1.7213 \quad (50)$$

cui corrispondono le forze assiali critiche :

$$F_{2 \text{ cr}} = 2.963 \frac{EI}{L^2}; \quad F_{1 \text{ cr}} = 5.926 \frac{EI}{L^2} \quad (51)$$

La corrispondente deformata puo' ad esempio ottenersi risolvendo le equazioni (46) in funzione della costante b_3 . Si ottiene:

$$u_2(x_3) = b_3 \left(-0.573767 x_3 - 0.194947 \sin\left[2.98 \frac{x_3}{L}\right] \right) \quad (52)$$

$$v_2(x_3) = b_3 \left(0.558216 - 1.7213 x_3 - 1.16308 \cos\left[1.7213 \frac{x_3}{L}\right] + \sin\left[1.7213 \frac{x_3}{L}\right] \right) \quad (53)$$

La deformata si presenta come in Figura 7, e si nota che la presenza del bipendolo esterno impone alla deformata di avere una tangenza orizzontale in mezzeria.

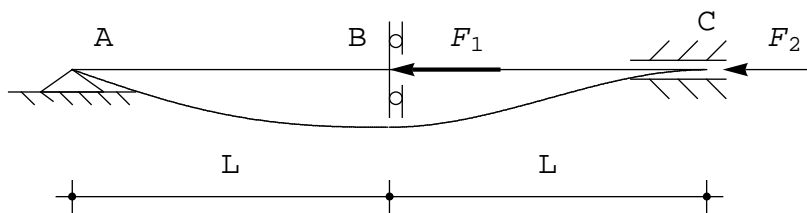


Figura 7 - La deformata per la trave di Figura 6 in corrispondenza del carico critico

Esempio n .4

Un valido criterio alternativo per il calcolo del carico critico e' il cosiddetto "criterio delle perturbazioni", secondo cui la struttura da studiare e' caricata dai carichi assiali di cui si vuol conoscere il valore critico, e da una stesa di carico trasversale. In assenza di carico assiale, la struttura subisce gli spostamenti dovuti al solo carico trasversale, e man mano che l'intensita' del carico assiale aumenta, tali spostamenti si amplificano - fino a divergere in corrispondenza del valore critico del carico.

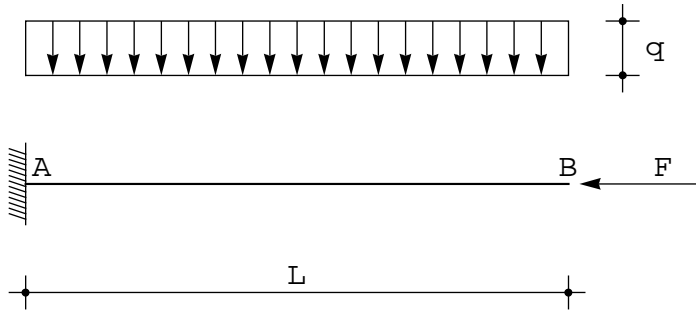


Figura 8 - Una trave a mensola soggetta al carico assiale F e ad una perturbazione q

A titolo di illustrazione, si consideri la mensola di Figura 8, soggetta alla forza assiale F. Per conoscere il valore critico della forza F, si ipotizza agente sulla trave un carico trasversale, come ad esempio la stessa di carico uniformemente distribuita su tutta la luce, di intensità q . L'equazione differenziale della linea elastica si scriverà:

$$u_2''''(x_3) + \alpha^2 u_2''(x_3) = \frac{q}{EI} \quad (54)$$

con soluzione :

$$u_2(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 \cos[\alpha x_3] + a_3 \sin[\alpha x_3] + \frac{q x_3^2}{2 EI \alpha^2} \quad (55)$$

Imponendo le condizioni ai limiti caratteristiche della trave a mensola si ha il sistema lineare non omogeneo:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \rightarrow a_0 + a_2 = 0 \\ u_2'(0) &= 0 \rightarrow a_1 + \alpha a_3 = 0 \\ u_2''(L) &= 0 \rightarrow -\alpha^2 a_2 \cos[L\alpha] - \alpha^2 a_3 \sin[L\alpha] + \frac{q}{EI \alpha^2} = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

$$u_2'''(L) + \alpha^2 u_2'(L) = 0 \rightarrow \alpha^2 a_1 + \frac{qL}{EI} = 0$$

la cui soluzione è :

$$\begin{aligned} a_0 &= - \frac{q (1 - L \alpha \sin[L\alpha])}{\cos[L\alpha] EI \alpha^4} \\ a_1 &= - \frac{qL}{EI \alpha^2} \\ a_2 &= \frac{q (1 - L \alpha \sin[L\alpha])}{\cos[L\alpha] EI \alpha^4} \\ a_3 &= \frac{qL}{EI \alpha^3} \end{aligned} \quad (57)$$

Gli spostamenti sono quindi esprimibili come :

$$u_2(x_3) = \frac{q}{2 EI \alpha^4} \left(x_3 (x_3 - 2L) \alpha^2 + 2 \sec[\alpha L] (-1 + \cos[\alpha x_3] + L \alpha (\sin[\alpha L] - \sin[\alpha(L - x_3)])) \right) \quad (58)$$

ed in particolare, all'estremo libero :

$$u_2(L) = \frac{q}{2EI\alpha^4} \left(-\alpha^2 L^2 + 2 \operatorname{Sec}[\alpha L] (-1 + \operatorname{Cos}[\alpha L] + \alpha L \operatorname{Sin}[\alpha L]) \right) \quad (59)$$

e per αL che tende a $\pi/2$ lo spostamento tende ad infinito, come conferma il grafico di Figura 9.

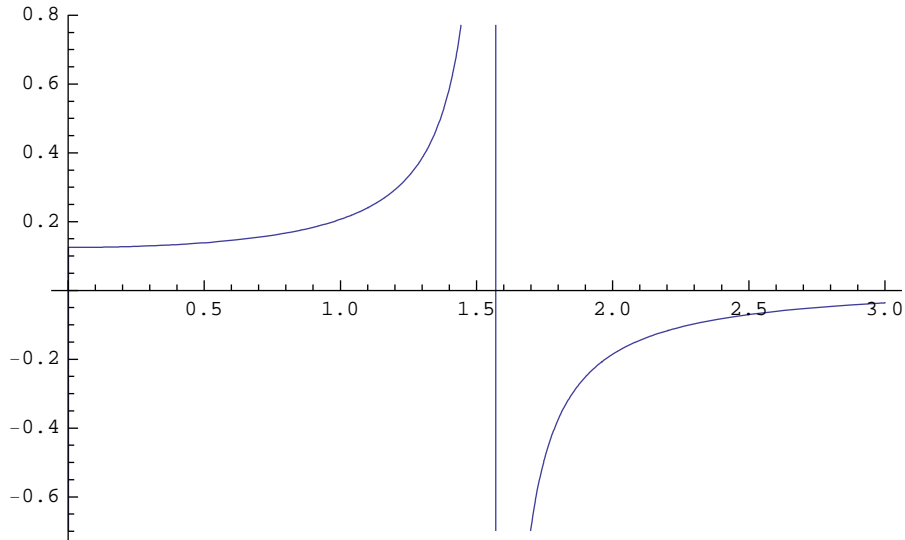


Figura 9 - L'effetto della perturbazione sullo spostamento in sommita' della mensola

Il vantaggio di questo metodo risiede nella possibilita' di evitare il calcolo del determinante, e la soluzione della seguente equazione trascendente, la sua limitazione nel non fornire indicazioni sul modo di inflettersi della trave.

Figure

Figura 9