28 - Le travi di Timoshenko

- **[A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 7 maggio 2013]**

La teoria di Eulero-Bernoulli, fin qui utilizzata per l'analisi delle travi, e delle strutture a scheletro, e' caratterizzata dalla relazione di congruenza:

$$\phi(x_3) = -\frac{du_2(x_3)}{dx_3} \qquad (1)$$

che esprime la rotazione della generica sezione retta in funzione della derivata prima dell'abbassamento della stessa sezione retta. Cio' equivale a presupporre nulla la deformazione tagliante e_{23}, e questa assunzione e' giustificata nel caso di travi snelle e poco deformabili a taglio.

Se invece la trave si presenta tozza, oppure se il materiale di cui e' coistituita e' caratterizzato da un basso valore del modulo G di resistenza a taglio, e' opportuno rinunciare all'ipotesi (1), ed adottare la teoria di Timoshenko. Secondo tale teoria, la (1) va sostituita con la relazione:

$$\phi(x_3) = -\frac{du_2(x_3)}{dx_3} + \psi(x_3) \qquad (2)$$

dove $\psi(x_3)$ e' una rotazione aggiuntiva dovuta al taglio, e rappresenta lo scorrimento angolare γ_{23}. Utilizzando la (2), le caratteristiche momento e taglio si scriveranno come:

$$\begin{aligned} M &= EI\frac{d\phi}{dx_3} \\ T &= GA_s\left(\phi + \frac{du_2(x_3)}{dx_3}\right) \end{aligned} \qquad (3)$$

dove $A_s = \kappa$ A e' l'*area resistente a taglio*. Utilizzando le ben note relazioni di equilibrio tra carico applicato, taglio e momento flettente:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx_3} &= -q \\ \frac{dM}{dx_3} &= T \end{aligned} \qquad (4)$$

si ottengono subito le due equazioni differenziali accoppiate nelle due incognite ϕ ed u_2:

$$\begin{aligned} GA_s\left(\phi' + u_2''\right) &= -q \\ EI\phi'' &= GA_s\left(\phi + u_2'\right) \end{aligned} \qquad (5)$$

dove - come usuale - l'operazione di derivazione rispetto ad x_3 e' stata indicata con l'apice.

Il metodo della funzione ausiliaria

La soluzione delle (5), insieme alle opportune condizioni ai limiti, non presenta usualmente difficolta', come peraltro si e' visto negli esempi contenuti nelle Lezioni. Tuttavia, e' talvolta conveniente ricondursi ad un problema ai limiti simile al problema del quarto ordine di Eulero-Bernoulli: a tal fine basta introdurre la funzione ausiliaria $\eta(x_3)$ tale da poter scrivere:

$$u_2(x_3) = \eta - \frac{EI}{GA_s}\eta''$$
$$\phi(x_3) = -\eta'$$

e quindi le caratteristiche si esprimeranno come:

$$M = -EI\,\eta''$$
$$T = -EI\,\eta''' \qquad (7)$$

Utilizzando le (6) si soddisfa identicamente la seconda equazione differenziale, mentre la prima diviene:

$$EI\,\eta'''' = q \qquad (8)$$

Le condizioni ai limiti devono essere convenientemente espresse in termini della funzione ausiliaria F. Si ha quindi, ad esempio:

- incastro:

$$\eta - \frac{EI}{GA_s}\eta'' = 0 \qquad (9)$$
$$\eta' = 0$$

- appoggio:

$$\eta = 0$$
$$\eta'' = 0 \qquad (10)$$

- bipendolo:

$$\eta' = 0$$
$$\eta''' = 0 \qquad (11)$$

- estremo libero:

$$\eta'' = 0$$
$$\eta''' = 0 \qquad (12)$$

Esempio n .1

Come primo esempio, si riconsideri la trave a mensola di Figura 1, gia' risolta nella Lezione 37 utilizzando un altro approccio. La funzione η si esprime come:

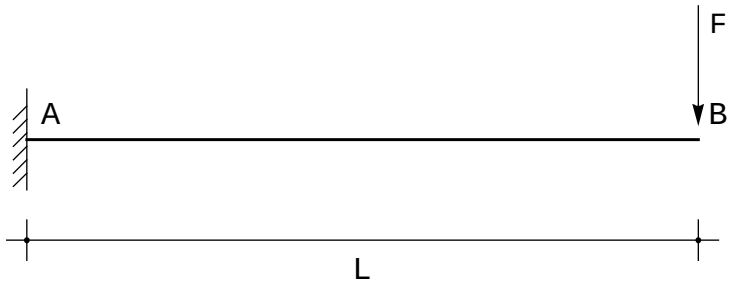

Figura 1 - Trave a mensola di Timoshenko

$$\eta(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \qquad (13)$$

e le quattro condizioni ai limiti divengono :

$$\begin{aligned} &\eta(0) - \frac{EI}{GA_s}\eta''(0) = 0 \\ &\eta'(0) = 0 \\ &\eta''(L) = 0 \\ &-EI\,\eta'''(L) = F \end{aligned} \tag{14}$$

ossia :

$$\begin{aligned} &a_0 - 2\frac{EI}{GA_s}a_2 = 0 \\ &a_1 = 0 \\ &2a_2 + 6a_3 L = 0 \\ &-6EI\,a_3 = F \end{aligned} \tag{15}$$

e risolvendo il sistema di quattro equazioni si ha :

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_3 &= -\frac{F}{6EI} \\ a_2 &= \frac{FL}{2EI} \\ a_0 &= \frac{FL}{GA_s} \end{aligned} \tag{16}$$

La funzione ausiliaria si scrive quindi :

$$\eta(x_3) = \frac{FL}{GA_s} + \frac{FL}{2EI}x_3^2 - \frac{F}{6EI}x_3^3 \tag{17}$$

e da essa possono ricavarsi spostamenti, rotazioni, momenti e tagli :

$$u_2(x_3) = \frac{F}{GA_s}x_3 + \frac{FL}{2EI}x_3^2 - \frac{F}{6EI}x_3^3 \tag{18}$$

$$\phi(x_3) = -\frac{FL}{EI}x_3 + \frac{F}{2EI}x_3^2 \tag{19}$$

$$M(x_3) = -FL + Fx_3 \tag{20}$$

$$T(x_3) = F \tag{21}$$

confermando i risultati della Lezione 37.

Esempio n .2

Si consideri la trave doppiamente incastrata di Figura 2, soggetta ad un carico concentrato in mezzeria. Si vuol conoscere l'effetto delle deformazioni da taglio sullo spostamento in corrispondenza della forza.

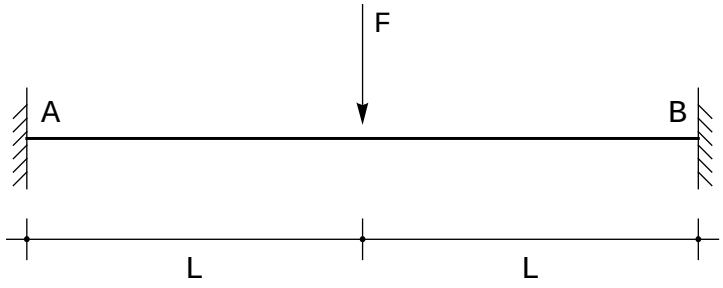

Figura 2 - Trave doppiamente incastrata di Timoshenko

Introducendo le due funzioni ausiliarie η_1 ed η_2, a valori nella prima e nella seconda campta, rispettivamente, si potra' scrivere:

$$\begin{aligned}\eta_1(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\ \eta_2(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3\end{aligned} \tag{22}$$

e le otto costanti di integrazione si calcolano imponendo le condizioni ai limiti :

$$\begin{aligned}&\eta_1(0) - \beta L^2 \eta_1''(0) = 0 \\ &\eta_1'(0) = 0 \\ &\eta_1(L_1) - \beta L^2 \eta_1''(L_1) = \eta_2(0) - \beta L^2 \eta_2''(0) \\ &\eta_1'(L_1) = \eta_2'(0) \\ &\eta_1''(L_1) = \eta_2''(0) \\ &-EI\eta_1'''(L_1) + EI\eta_2'''(0) + F = 0 \\ &\eta_2(L_2) - \beta L^2 \eta_2''(L_2) = 0 \\ &\eta_2'(L_2) = 0\end{aligned} \tag{23}$$

Si noti che - al fine di semplificare le formule - si e' introdotto il coefficiente adimensionale :

$$\beta = \frac{EI}{GA_s L^2} \tag{24}$$

e che per $\beta = 0$ si ritrova il problema ai limiti di Eulero-Bernoulli.

Il risultante sistema di otto equazioni si risolve facilmente, a fornire :

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{F L^3 \beta}{4 EI};\ a_1 = 0;\ a_2 = \frac{F L}{8 EI};\ a_3 = -\frac{F}{12 EI} \\ b_0 &= \frac{F L^3}{24 EI}(1 + 6\beta);\ b_1 = 0;\ b_2 = -\frac{F L}{8 EI};\ b_3 = \frac{F}{12 EI}\end{aligned} \tag{25}$$

e quindi le due funzioni ausiliarie si scrivono:

$$\begin{aligned}\eta_1(x_3) &= \frac{F L^3 \beta}{4 EI} + \frac{F L x_3^2}{8 EI} - \frac{F x_3^3}{12 EI} \\ \eta_2(x_3) &= \frac{F L^3 (1 + 6\beta)}{24 EI} - \frac{F L x_3^2}{8 EI} + \frac{F x_3^3}{12 EI}\end{aligned} \tag{26}$$

e da esse possono ricavarsi gli abbassamenti :

$$u_2(x_3) = \frac{F x_3^2}{24 EI}(3L - 2x_3) - \frac{F L^2}{2 EI}(L - 3x_3)\beta$$

$$v_2(x_3) = \frac{F (L - x_3)^2}{24 EI}(L + 2x_3) + \frac{F L^2}{2 EI}(2L - 3x_3)\beta$$

Ne segue che in mezzeria si ha l' abbassamento :

$$u_{2\,max} = \frac{F L^3}{24 EI} + \frac{F L^3 \beta}{EI} \tag{28}$$

ed e' chiaramente individuabile la componente aggiuntiva dovuta al taglio. Si noti anche che le rotazioni, i momenti ed i tagli non sono influenzati dalla deformabilita' tagliante.

Esempio n. 3

Si prende ora in esame la trave di Figura 2, gia' studiata con il principio dei lavori virtuali in una precedente esercitazione. Si vuole ora utilizzare la teoria di Timoshenko per ricavare la distribuzione di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli.

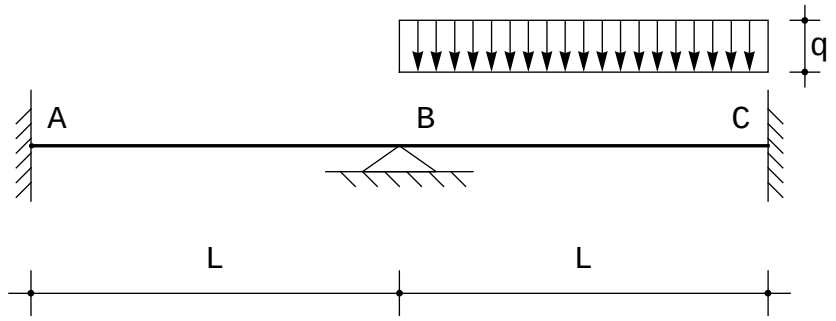

Figura 3 - Una trave di Timoshenko a due campate

Introducendo le due funzioni ausiliarie η_1 ed η_2, a valori in AB e BC, rispettivamente, si potra' scrivere:

$$\eta_1(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3$$
$$\eta_2(x_3) = b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 + \frac{q x_3^4}{24 EI} \tag{29}$$

Le condizioni ai limiti in A, B e C si scriveranno:

$$\begin{aligned}
&\eta_1(0) - \beta L^2 \eta_1''(0) = 0\\
&\eta_1'(0) = 0\\
&\eta_1(L) - \beta L^2 \eta_1''(L) = 0\\
&\eta_2(0) - \beta L^2 \eta_2''(0) = 0\\
&\eta_1'(L) = \eta_2'(0)\\
&\eta_1''(L_1) = \eta_2''(0)\\
&\eta_2(L) - \beta L^2 \eta_2''(L) = 0\\
&\eta_2'(L) = 0
\end{aligned} \tag{30}$$

e quindi si ha il sistema :

$$a_0 - 2\,L^2\,\beta\,a_2 = 0$$
$$a_1 = 0$$
$$a_0 + a_1\,L + a_2\,L^2 + a_3\,L^3 - \beta\,L^2\,(2\,a_2 + 6\,a_3\,L) = 0$$
$$b_0 - 2\,L^2\,\beta\,b_2 = 0$$
$$a_1 + 2\,a_2\,L + 3\,a_3\,L^2 = b_1$$
$$2\,a_2 + 6\,a_3\,L = 2\,b_2$$
$$b_0 + b_1\,L + b_2\,L^2 + b_3\,L^3 + \frac{qL^4}{24\,EI} - \beta\,L^2\left(2\,b_2 + 6\,b_3\,L + \frac{q\,L^2}{2\,EI}\right) = 0$$
$$b_1 + 2\,b_2\,L + 3\,b_3\,L^2 + \frac{q\,L^3}{6\,EI} = 0$$

Risolvendo e semplificando si ha:

$$a_0 = \frac{qL^4}{48\,EI}\,\frac{\beta\,(6\,\beta - 1)}{1 + 3\,\beta}$$
$$a_1 = 0$$
$$a_2 = -\frac{qL^2}{96\,EI}\,\frac{1 - 6\,\beta}{1 + 3\,\beta}$$
$$a_3 = \frac{q\,L}{96\,EI}\,\frac{1}{1 + 3\,\beta}$$
$$b_0 = \frac{q\,L^4}{24\,EI}\,\beta \qquad (32)$$
$$b_1 = \frac{qL^3}{96\,EI}\,\frac{1 + 12\,\beta}{1 + 3\,\beta}$$
$$b_2 = \frac{q\,L^2}{48\,EI}$$
$$b_3 = -\frac{q\,L}{96\,EI}\,\frac{7 + 24\,\beta}{1 + 3\,\beta}$$

e quindi le due funzioni ausiliarie si scrivono:

$$\eta_1(x_3) = \frac{q\,L^4}{48\,EI}\,\frac{\beta\,(6\,\beta - 1)}{(1 + 3\,\beta)} - \frac{q\,L^2\,x_3^2}{96\,EI}\,\frac{(1 - 6\,\beta)}{1 + 3\,\beta} + \frac{q\,L x_3^3}{96\,EI}\,\frac{1}{(1 + 3\,\beta)}$$
$$\eta_2(x_3) = \qquad (33)$$
$$\frac{q\,L^4}{24\,EI}\,\beta + \frac{q\,L^3\,x_3}{96\,EI}\,\frac{1 + 12\,\beta}{1 + 3\,\beta} + \frac{q\,L^2\,x_3^2}{48\,EI} - \frac{q\,L\,x_3^3}{96\,EI}\,\frac{7 + 24\,\beta}{1 + 3\,\beta} + \frac{q\,x_3^4}{24\,EI}$$

Lo spostamento e' quindi fornito da:

$$\eta_1(x_3) = \frac{q\,L}{96\,EI}\,\frac{x_3\,(x_3 - L)\,(x_3 + 6\,L\,\beta)}{1 + 3\,\beta}$$
$$\eta_2(x_3) = \frac{q}{96\,EI}\,\frac{1}{1 + 3\,\beta}\,x_3\,(L - x_3) \qquad (34)$$
$$\left(-4\,x_3^2\,(1 + 3\,\beta) + 3\,L\,x_3\,(1 + 4\,\beta) + L^2\,(1 + 18\,\beta\,(3 + 8\,\beta))\right)$$

mentre rotazioni, momenti e tagli si ottengono derivando opportunamente le due funzioni ausiliarie:

$$\phi^{(1)}(x_3) = \frac{q\,L}{16\,EI}\left(\frac{L\,(1-6\,\beta)}{3\,(1+3\,\beta)}\,x_3 - \frac{x_3^2}{2\,(1+3\,\beta)}\right)$$

$$\phi^{(2)}(x_3) = -\frac{q\,L^3}{96\,EI}\,\frac{1+12\,\beta}{1+3\,\beta} - \frac{q\,L^2}{24\,EI}\,x_3 + \frac{q\,L}{32\,EI}\,\frac{7+24\,\beta}{1+3\,\beta}\,x_3^2 - \frac{q}{6\,EI}\,x_3^3$$

$$M^{(1)}(x_3) = -\frac{q\,L}{16}\left(\frac{x_3}{1+3\,\beta} - \frac{L\,(1-6\,\beta)}{3\,(1+3\,\beta)}\right)$$

$$M^{(2)}(x_3) = -\frac{q\,L^2}{24} + \frac{q\,L}{16}\,\frac{7+24\,\beta}{1+3\,\beta}\,x_3 - \frac{q\,x_3^2}{2}$$

$$T^{(1)}(x_3) = -\frac{q\,L}{16\,(1+3\,\beta)}$$

$$T^{(2)}(x_3) = -q\,x_3 + \frac{q\,L}{16}\,\frac{7+24\,\beta}{1+3\,\beta}$$

Si noti che in questo caso l' influenza delle deformazioni taglianti si risente anche sulle caratteristiche.

In Figura 4 e 5 e' riportato l'andamento dell'abbassamento e del momento per quattro diversi valori del parametro β, compreso il valore nullo, che corrisponde alla teoria di Eulero-Bernoulli.

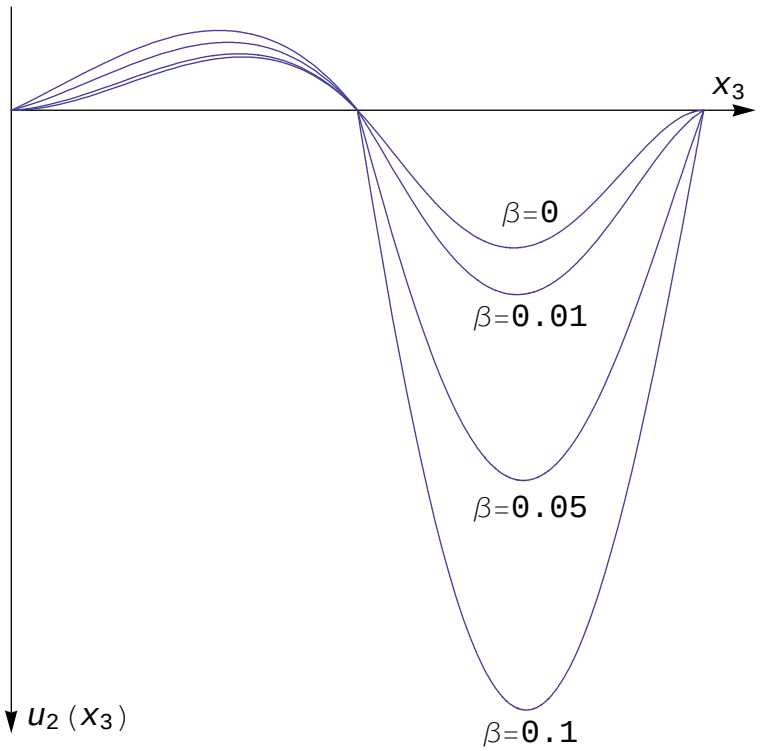

Figura 4 - L'influenza delle deformazioni da taglio sul diagramma degli abbassamenti

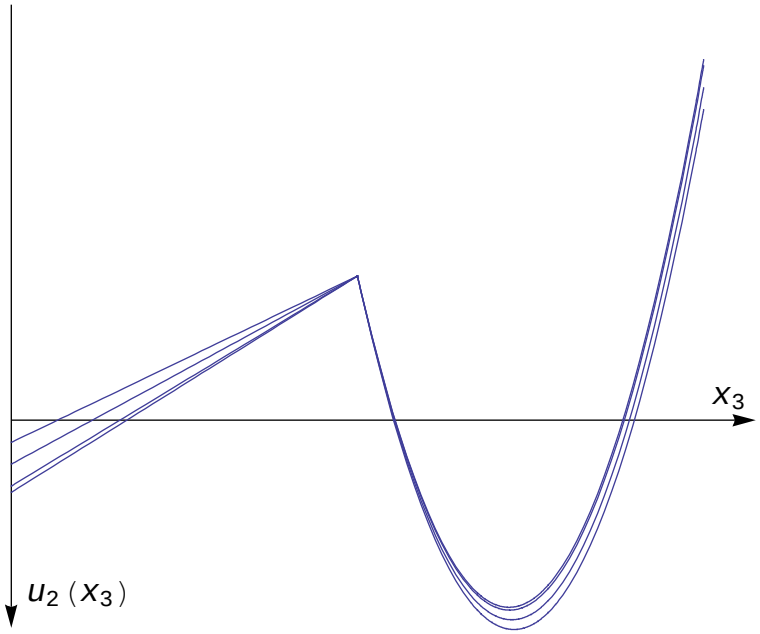

Figura 5 - L'influenza delle deformazioni da taglio sul diagramma dei momenti

Esempio n. 4 - La matrice di rigidezza

Si vuole ora dedurre la *matrice di rigidezza* di un elemento strutturale secondo la teoria di Timoshenko. A somiglianza di quanto fatto nell'esercitazione 18, si definiscono il vettore **d** dei possibili spostamenti degli estremi della trave:

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} u_{2\,A} \\ \phi_A \\ u_{2\,B} \\ \phi_B \end{pmatrix} \tag{36}$$

ed il vettore **F** delle forze agenti agli estremi:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_A \\ \mathcal{M}_A \\ F_B \\ \mathcal{M}_B \end{pmatrix} \tag{37}$$

Potra' scriversi la relazione lineare

$$\begin{pmatrix} F_A \\ \mathcal{M}_A \\ F_B \\ \mathcal{M}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2\,A} \\ \phi_A \\ u_{2\,B} \\ \phi_B \end{pmatrix} \tag{38}$$

che lega ciascuna forza ai quattro possibili spostamenti. Si calcola la funzione ausiliaria $\eta(x_3)$ per una trave soggetta ai cedimenti anelastici agli estremi:

$$\begin{aligned} &u_2\,(x_3 = 0) = u_{2\,A} \\ &\phi\,(x_3 = 0) = \phi_A \\ &u_2\,(x_3 = L) = u_{2\,B} \\ &\phi\,(x_3 = L) = \phi_B \end{aligned} \tag{39}$$

si deduce la distribuzione di momenti e tagli:

$$\begin{aligned} &M\,(x_3) = -EI\,\eta''\,(x_3) \\ &T\,(x_3) = -\,EI\,\eta'''\,(x_3) \end{aligned} \tag{40}$$

ed infine si deducono le forze nodali :

$$\begin{aligned} &F_A = -T\,(0) \\ &\mathcal{M}_A = -M\,(0) \\ &F_B = T\,(L) \\ &\mathcal{M}_B = M\,(L) \end{aligned} \tag{41}$$

da cui e' immediato riempire la matrice di rigidezza

■ Passo 1 e 2 - Deduzione di momenti e tagli

In assenza di forze distribuite, la funzione ausiliaria $\eta(x_3)$ della trave sara' esprimibile come una equazione cubica:

$$\eta\,(x_3) = c_0 + c_1\,x_3 + c_2\,x_3^2 + c_3\,x_3^3 \tag{42}$$

e le quattro costanti di integrazione si determinano soddisfacendo le condizioni:

$$\begin{aligned} &\eta\,(0) - \beta\,L^2\,\eta''\,(0) = u_{2\,A} \\ &\eta'\,(0) = -\phi_A \\ &\eta\,(L) - \beta\,L^2\,\eta''\,(L) = u_{2\,B} \\ &\eta'\,(L) = -\phi_B \end{aligned} \tag{43}$$

Si ha quindi :

$$\begin{aligned} c_0 = {} & \frac{1 + 6\,\beta}{1 + 12\,\beta}\,u_{2\,A} + \frac{4\,\alpha\,L + 12\,\beta^2\,L}{1 + 12\,\beta}\,\phi_A + \\ & \frac{6\,\beta}{1 + 12\,\beta}\,u_{2\,B} + \frac{2\,\beta\,L - 12\,\beta^2\,L}{1 + 12\,\beta}\,\phi_B \\ c_1 = {} & -\phi_A \\ c_2 = {} & -\frac{3}{L^2\,(1 + 12\,\beta)}\,u_{2\,A} + \\ & \frac{2 + 6\,\beta}{L\,(1 + 12\,\beta)}\,\phi_A + \frac{3}{L^2\,(1 + 12\,\beta)}\,u_{2\,B} + \frac{1 - 6\,\beta}{L\,(1 + 12\,\beta)}\,\phi_B \\ c_3 = {} & \frac{2}{L^3\,(1 + 12\,\beta)}\,u_{2\,A} - \frac{1}{L^2\,(1 + 12\,\beta)}\,\phi_A - \\ & \frac{2}{L^3\,(1 + 12\,\beta)}\,u_{2\,B} - \frac{1}{L^2\,(1 + 12\,\beta)}\,\phi_B \end{aligned} \tag{44}$$

e quindi i momenti e i tagli sono esprimibili come :

$$M(x_3) = -EI\left(\frac{6\,x_3\,(2\,u_{2A} - 2\,u_{2B} - L\,(\phi_A + \phi_B))}{L^3\,(1+12\,\beta)} + \frac{2\,(-3\,u_{2A} + 3\,u_{2B} + L\,(2\,\phi_A + 6\,\beta\,\phi_A + \phi_B - 6\,\beta\,\phi_B))}{L^2\,(1+12\,\beta)}\right)$$

$$T(x_3) = -\frac{6\,EI\,(2\,u_{2A} - 2\,u_{2B} - L\,(\phi_A + \phi_B))}{L^3\,(1+12\,\beta)} \qquad (46)$$

■ Passo 3 - Deduzione delle forze nodali e della matrice di rigidezza

In base alle (41) si ottiene :

$$\begin{aligned} F_A &= \frac{6\,EI\,(2\,u_{2A} - 2\,u_{2B} - L\,(\phi_A + \phi_B))}{L^3\,(1+12\,\beta)} \\ \mathcal{M}_A &= EI\left(\frac{2\,(-3\,u_{2A} + 3\,u_{2B} + L\,(2\,\phi_A + 6\,\beta\,\phi_A + \phi_B - 6\,\beta\,\phi_B))}{L^2\,(1+12\,\beta)}\right) \\ F_B &= -\frac{6\,EI\,(2\,u_{2A} - 2\,u_{2B} - L\,(\phi_A + \phi_B))}{L^3\,(1+12\,\beta)} \\ \mathcal{M}_B &= -\frac{2\,EI\,(3\,u_{2A} - 3\,u_{2B} - L\,((1-6\,\beta)\,\phi_A + 2\,(1+3\,\beta)\,\phi_B))}{L^2\,(1+12\,\beta)}\Bigg) \end{aligned} \qquad (47)$$

e quindi la matrice di rigidezza si scrivera':

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{1+12\,\beta}\begin{pmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4\,(1+3\,\beta)}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2\,(1-6\,\beta)}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2\,(1-6\,\beta)}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4\,(1+3\,\beta)}{L} \end{pmatrix} \qquad (48)$$

Figure