
26 - La linea elastica e le strutture a telaio

■ [A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 7 maggio 2013]

In questa Esercitazione si estende il metodo della linea elastica alle strutture a telaio, in cui ogni elemento e' soggetto a momento flettente, taglio e sforzo normale. La procedura evolve secondo i seguenti passi:

1. si esamina la struttura, e si identificano tutti i punti (d'ora in poi *nodi*) in cui si abbia una discontinuita' nello spostamento (assiale o trasversale), nella rotazione o nelle caratteristiche della sollecitazione interna.
2. Per ciascun tratto compreso tra due nodi (d'ora in poi *elemento*) si fissa un sistema di riferimento con origine in uno dei due nodi, l'asse x_3 diretto secondo l'asse dell'elemento, l'asse x_2 tale che la rotazione che porta x_2 in x_3 sia antioraria e di $\pi/2$.
3. Per il generico elemento i -mo, si scrive l'equazione differenziale del quarto ordine nello spostamento trasversale v_i e l'equazione differenziale del second'ordine nello spostamento assiale w_i
4. si scrivono le opportune condizioni ai limiti. In particolare, in ciascun estremo si dovranno scrivere tre condizioni, in ciascun nodo interno che connette due elementi (nodo *semplice*) si scrivono sei condizioni, in ciascun nodo che connette k elementi (nodo di grado k) si scrivono $3(k+1)$ condizioni
5. risolvendo le condizioni ai limiti, si ottengono gli spostamenti assiali e trasversali di ciascun tratto, e quindi per derivazione si ottengono le caratteristiche
6. e' spesso opportuno esaminare l'influenza delle deformazioni da sforzo assiale, ed a cio' fare si puo' facilmente ottenere il caso limite di strutture assialmente rigide, portando la rigidezza assiale ad infinito. Cio' permette di semplificare le formule, e di stimare numericamente l'influenza degli sforzi assiali

Si avverte esplicitamente che i sistemi di equazioni algebriche cui si giunge negli esercizi di questa sezione hanno dimensioni tali da escludere una agevole risoluzione manule. D'altro canto, la capillare diffusione di software di algebra simbolica ha ampliato enormemente le possibilita' operative, ed e' quindi sembrato opportuno inserire anche alcuni esempi piu' complessi.

Il lettore interessato agli aspetti piu' computazionali puo' leggere la seconda parte delle Esercitazioni, che sara' interamente dedicato all'utilizzo di *Mathematica* in Scienza delle Costruzioni.

Esempio n .1

Si consideri il semplice telaio di Figura 1, costituito da un traverso di luce L soggetto ad un carico q uniformemente distribuito, ed un ritto di altezza H . A sinistra il telaio e' vincolato con un incastro, al piede si ha una cerniera.

Si identificano subito tre nodi, e due elementi, sicche' si definiscono le linee elastiche $v_1(x_3)$ e $w_1(x_3)$, relativamente al traverso, e $v_2(x_3)$ e $w_2(x_3)$ relativamente al ritto, scegliendo le origini in A ed in B, rispettivamente, e col sistema di assi locali definito in Figura 2.

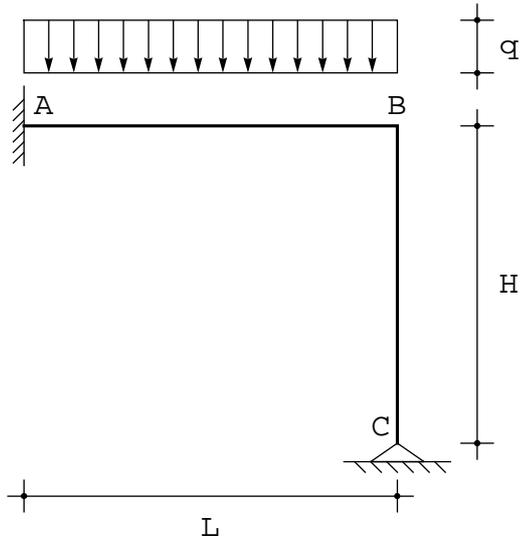


Figura 1 - Un semplice telaio zoppo

Si potrà scrivere, ipotizzando che le sezioni del ritto e del traverso siano costanti:

$$\begin{aligned}
 EI v_1'''' (x_3) &= q \\
 EA w_1'' (x_3) &= 0 \\
 EI v_2'''' (x_3) &= 0 \\
 EA w_2'' (x_3) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

e quindi si ha :

$$\begin{aligned}
 v_1 (x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 + \frac{qx_3^4}{24 EI} \\
 w_1 (x_3) &= b_0 + b_1 x_3 \\
 v_2 (x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\
 w_2 (x_3) &= d_0 + d_1 x_3
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

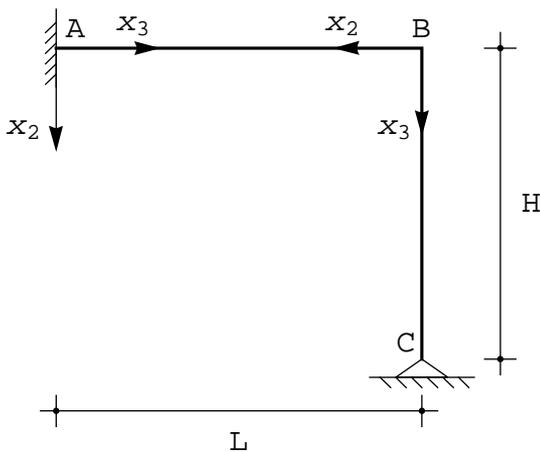


Figura 2 - I due sistemi di riferimento locale per il traverso ed il ritto

Si sono quindi introdotte 12 costanti di integrazione, che dovranno essere definite attraverso l'imposizione di opportune condizioni ai limiti. Nella fattispecie, si avrà':

- in A l'incastro detta annullarsi di spostamento assiale, spostamento trasversale, e rotazione, ossia le tre

equazioni di congruenza:

$$\begin{aligned} w_1(0) &= 0 \\ v_1(0) &= 0 \\ v_1'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

- in B si deve imporre la congruenza degli spostamenti, e l'equilibrio del nodo. Per la congruenza, si potranno imporre le tre condizioni:

$$\begin{aligned} w_1(L) &= -v_2(0) \\ v_1(L) &= w_2(0) \\ v_1'(L) &= v_2'(0) \end{aligned} \quad (4)$$

La prima impone che lo spostamento assiale del traverso sia pari allo spostamento trasversale del ritto, mentre la seconda impone che lo spostamento trasversale del traverso sia pari allo spostamento assiale del ritto. L'ultima condizione impone l'uguaglianza delle rotazioni

Le condizioni di equilibrio possono leggersi dal diagramma delle forze di Figura 3:

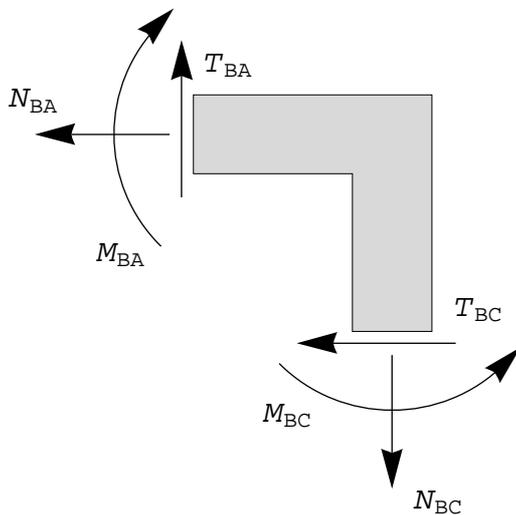


Figura 3 - Il concio in B e le forze su di esso agenti

$$\begin{aligned} -N_{BA} - T_{BC} &= 0 \\ -T_{BA} + N_{BC} &= 0 \\ -M_{BA} + M_{BC} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ossia, in termini di spostamenti e successive derivate :

$$\begin{aligned} -EA w_1'(L) + EI v_2''''(0) &= 0 \\ EI v_1''''(L) + EA w_2'(0) &= 0 \\ EI v_1''(L) - EI v_2''(0) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

- in C la cerniera detta l'annullarsi di spostamento assiale e spostamento trasversale, mentre la rotazione e' libera, e quindi si annulla il momento:

$$\begin{aligned} w_2(H) &= 0 \\ v_2(H) &= 0 \\ -EI v_2''(H) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

■ La soluzione del sistema di equazioni

Le dodici equazioni (3), (4), (6) e (7) si scrivono, utilizzando le soluzioni (2):

$$\begin{aligned}
 b_0 &= 0 \\
 a_0 &= 0 \\
 a_1 &= 0 \\
 b_0 + b_1 L &= -c_0 \\
 a_0 + a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3 + \frac{qL^4}{24 EI} &= d_0 \\
 a_1 + 2 a_2 L + 3 a_3 L^2 + \frac{qL^3}{6 EI} &= c_1 \\
 -EA b_1 + 6 EI c_3 &= 0 \\
 6 EI a_3 + qL + EA d_1 &= 0 \\
 a_2 + 3 a_3 L + \frac{qL^2}{4 EI} - c_2 &= 0 \\
 d_0 + d_1 H &= 0 \\
 c_0 + c_1 H + c_2 H^2 + c_3 H^3 &= 0 \\
 2 c_2 + 6 c_3 H &= 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

ossia, matricialmente :

$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\
 L^2 & L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 2L & 3L^2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6EI & -EA & 0 & 0 \\
 0 & 6EI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EA \\
 1 & 3L & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & H \\
 0 & 0 & 1 & H & H^2 & H^3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6H & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 a_2 \\
 a_3 \\
 c_0 \\
 c_1 \\
 c_2 \\
 c_3 \\
 b_1 \\
 d_0 \\
 d_1
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 -\frac{qL^4}{24EI} \\
 -\frac{qL^3}{6EI} \\
 0 \\
 -qL \\
 -\frac{qL^2}{4EI} \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix} \tag{9}$$

con soluzione :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 0 \\
 a_1 &= 0 \\
 a_2 &= \frac{qL^2}{8EI} \frac{72EI^2HL + EA^2H^2L^3(2H+L) + 6EA EI(4H^4 + 8H^3L + L^4)}{36EI^2HL + EA^2H^2L^3(4H+3L) + 12EA EI(H^4 + 3H^3L + L^4)} \\
 a_3 &= \frac{qL}{12EI} \left(\frac{3EAL^3(3EIL + EAH^2(H+L))}{36EI^2HL + EA^2H^2L^3(4H+3L) + 12EA EI(H^4 + 3H^3L + L^4)} - 2 \right) \\
 c_0 &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{qL^4}{4} \\
& \frac{H \left(-24 EI H + EA L^3 \right)}{36 EI^2 HL + EA^2 H^2 L^3 (4H + 3L) + 12 EA EI (H^4 + 3H^3 L + L^4)} \\
c_1 = & \frac{-qL^3}{12 EI} \\
& \frac{(EA H^3 + 3 EI L) \left(-24 EI H + EA L^3 \right)}{36 EI^2 HL + EA^2 H^2 L^3 (4H + 3L) + 12 EA EI (H^4 + 3H^3 L + L^4)} \\
c_2 = & \frac{qL^3}{8 EI} \\
& \frac{EA H^2 \left(-24 EI H + EA L^3 \right)}{36 EI^2 HL + EA^2 H^2 L^3 (4H + 3L) + 12 EA EI (H^4 + 3H^3 L + L^4)} \\
c_3 = & \frac{-qL^3}{24 EI} \\
& \frac{EA H \left(-24 EI H + EA L^3 \right)}{36 EI^2 HL + EA^2 H^2 L^3 (4H + 3L) + 12 EA EI (H^4 + 3H^3 L + L^4)} \\
b_0 = & 0 \\
b_1 = & \frac{qL^3}{4} \\
& \frac{H \left(24 EI H - EA L^3 \right)}{\left(36 EI^2 HL + EA^2 H^2 L^3 (4H + 3L) + 12 EA EI (H^4 + 3H^3 L + L^4) \right)} \\
d_0 = & \frac{qL^4}{3 H \left(3 EI L + EA H^2 (H + L) \right)} \\
& \frac{72 EI^2 HL + 2 EA^2 H^2 L^3 (4H + 3L) + 24 EA EI (H^4 + 3H^3 L + L^4)}{72 EI^2 HL + 2 EA^2 H^2 L^3 (4H + 3L) + 24 EA EI (H^4 + 3H^3 L + L^4)} \\
d_1 = & \frac{-qL^4}{3 \left(3 EI L + EA H^2 (H + L) \right)} \\
& \frac{72 EI^2 HL + 2 EA^2 H^2 L^3 (4H + 3L) + 24 EA EI (H^4 + 3H^3 L + L^4)}{72 EI^2 HL + 2 EA^2 H^2 L^3 (4H + 3L) + 24 EA EI (H^4 + 3H^3 L + L^4)}
\end{aligned}$$

Ne segue l'espressione degli spostamenti trasversali sul traverso:

$$\begin{aligned}
v_1(x_3) = & \frac{qx_3^4}{24 EI} \left(12 EA EI H^4 + 36 EI^2 HL + 36 EA EI H^3 L + 4 EA^2 H^3 L^3 + \right. \\
& \left. 12 EA EI L^4 + 3 EA^2 H^2 L^4 \right) / \left(12 EA EI H^4 + \right. \\
& \left. 36 EI H (EI + EA H^2) L + 4 EA^2 H^3 L^3 + 3 EA (4 EI + EA H^2) L^4 \right) + \\
& \frac{qx_3^3}{24 EI} \left(-48 EA EI H^4 L - 144 EI^2 HL^2 - 144 EA EI H^3 L^2 - \right. \\
& \left. 10 EA^2 H^3 L^4 - 30 EA EI L^5 - 6 EA^2 H^2 L^5 \right) / \left(12 EA EI H^4 + \right.
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
& 36 EI H (EI + EA H^2) L + 4 EA^2 H^3 L^3 + 3 EA (4 EI + EA H^2) L^4 + \\
& \frac{qx_3^2}{24 EI} (72 EA EI H^4 L^2 + 72 EI H (3 EI + 2 EA H^2) L^3 + \\
& 6 EA^2 H^3 L^5 + 3 EA (6 EI + EA H^2) L^6) / (12 EA EI H^4 + \\
& 36 EI H (EI + EA H^2) L + 4 EA^2 H^3 L^3 + 3 EA (4 EI + EA H^2) L^4)
\end{aligned}$$

e sul ritto :

$$\begin{aligned}
v_2(x_3) = & - \frac{qL^3}{24 EI} \\
& ((H - x_3) (EA H (2H - x_3) x_3 - 6 EI L) (-24 EI H + EA L^3)) / \\
& (12 EA EI H^4 + 36 EI H (EI + EA H^2) L + \\
& 4 EA^2 H^3 L^3 + 3 EA (4 EI + EA H^2) L^4) \quad (12)
\end{aligned}$$

Gli spostamenti assiali sono invece forniti da :

$$\begin{aligned}
w_1(x_3) = & \frac{qL^3}{4} \\
& (H x_3 (24 EI H - EA L^3)) / (12 EA EI H^4 + 36 EI H (EI + EA H^2) L + \\
& 4 EA^2 H^3 L^3 + 3 EA (4 EI + EA H^2) L^4) \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2(x_3) = & qL^4 (3 (H - x_3) (EA H^3 + (3 EI + EA H^2) L)) / (24 EA EI H^4 + \\
& 72 EI H (EI + EA H^2) L + 8 EA^2 H^3 L^3 + 6 EA (4 EI + EA H^2) L^4) \quad (14)
\end{aligned}$$

Le caratteristiche della sollecitazione interna si ottengono invece tramite derivazione successiva :

$$\begin{aligned}
N_1(x_3) = & \frac{qL^3}{4} \\
& (EA H (24 EI H - EA L^3)) / (12 EA EI H^4 + 36 EI H (EI + EA H^2) L + \\
& 4 EA^2 H^3 L^3 + 3 EA (4 EI + EA H^2) L^4) \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_2(x_3) = & -qL^4 (3 EA (EA H^3 + (3 EI + EA H^2) L)) / (24 EA EI H^4 + \\
& 72 EI H (EI + EA H^2) L + 8 EA^2 H^3 L^3 + 6 EA (4 EI + EA H^2) L^4) \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_1(x_3) = & \\
& - \frac{qx_3^2}{4} (24 EA EI H^4 + 72 EI^2 H L + 72 EA EI H^3 L + 8 EA^2 H^3 L^3 + \\
& 24 EA EI L^4 + 6 EA^2 H^2 L^4) / (12 EA EI H^4 + \\
& 36 EI H (EI + EA H^2) L + 4 EA^2 H^3 L^3 + 3 EA (4 EI + EA H^2) L^4) - \\
& \frac{qx_3}{4} (-48 EA EI H^4 L - 144 EI^2 H L^2 - 144 EA EI H^3 L^2 - \\
& 10 EA^2 H^3 L^4 - 30 EA EI L^5 - 6 EA^2 H^2 L^5) / (12 EA EI H^4 + \\
& 36 EI H (EI + EA H^2) L + 4 EA^2 H^3 L^3 + 3 EA (4 EI + EA H^2) L^4) - \\
& \frac{q}{4} (24 EA EI H^4 L^2 + 72 EI^2 H L^3 + 48 EA EI H^3 L^3 + \\
& 2 EA^2 H^3 L^5 + EA (6 EI + EA H^2) L^6) / (12 EA EI H^4 + \\
& 36 EI H (EI + EA H^2) L + 4 EA^2 H^3 L^3 + 3 EA (4 EI + EA H^2) L^4) \quad (17)
\end{aligned}$$

$$M_2(x_3) = -\frac{qL^3}{4} \left(EA H (H - x_3) (-24 EI H + EA L^3) \right) / \left(12 EA EI H^4 + 36 EI H (EI + EA H^2) L + 4 EA^2 H^3 L^3 + 3 EA (4 EI + EA H^2) L^4 \right)$$

$$T_1(x_3) = q x_3 \left(-24 EA EI H^4 - 72 EI^2 H L - 72 EA EI H^3 L - 8 EA^2 H^3 L^3 - 24 EA EI L^4 - 6 EA^2 H^2 L^4 \right) / \left(24 EA EI H^4 + 72 EI H (EI + EA H^2) L + 8 EA^2 H^3 L^3 + 6 EA (4 EI + EA H^2) L^4 \right) + \quad (19)$$

$$q \left(24 EA EI H^4 L + 72 EI H (EI + EA H^2) L^2 + 5 EA^2 H^3 L^4 + 3 EA (5 EI + EA H^2) L^5 \right) / \left(24 EA EI H^4 + 72 EI H (EI + EA H^2) L + 8 EA^2 H^3 L^3 + 6 EA (4 EI + EA H^2) L^4 \right)$$

$$T_2(x_3) = q \left(EA H L^3 (-24 EI H + EA L^3) \right) / \left(4 \left(12 EA EI H^4 + 36 EI H (EI + EA H^2) L + 4 EA^2 H^3 L^3 + 3 EA (4 EI + EA H^2) L^4 \right) \right) \quad (20)$$

Se si vogliono trascurare le deformazioni assiali, occorre far tendere la rigidezza assiale EA ad infinito, ottenendo:

$$v_1(x_3) = \frac{q(L - x_3) x_3^2 (3L(2H + L) - (4H + 3L)x_3)}{24 EI (4H + 3L)} \quad (21)$$

$$v_2(x_3) = -\frac{qL^3(H - x_3)(2H - x_3)x_3}{24 EI H (4H + 3L)} \quad (22)$$

$$M_1(x_3) = -\frac{q(L^2(2H + L) - 2L(5H + 3L)x_3 + (8H + 6L)x_3^2)}{4(4H + 3L)} \quad (23)$$

$$M_2(x_3) = -\frac{qL^3(H - x_3)}{4H(4H + 3L)} \quad (24)$$

$$T_1(x_3) = \frac{q(L(5H + 3L) - 2(4H + 3L)x_3)}{8H + 6L} \quad (25)$$

$$T_2(x_3) = \frac{qL^3}{16H^2 + 12HL} \quad (26)$$

In Figura 4 e' riportato il diagramma degli spostamenti trasversali, mentre il diagramma dei momenti e' consegnato in Figura 5.

■ I valori notevoli

Il massimo valore assoluto del momento si raggiunge in corrispondenza dell' incastro, e vale:

$$M_A = \frac{qL^2}{4} \frac{72 EI^2 H L + EA^2 H^2 L^3 (2H + L) + 6 EA EI (4H^4 + 8H^3 L + L^4)}{36 EI^2 H L + EA^2 H^2 L^3 (4H + 3L) + 12 EA EI (H^4 + 3H^3 L + L^4)} \quad (27)$$

o, al limite per EA che va ad infinito :

$$M_A = - \frac{qL^2}{4} \frac{(2H + L)}{(4H + 3L)} \quad (28)$$

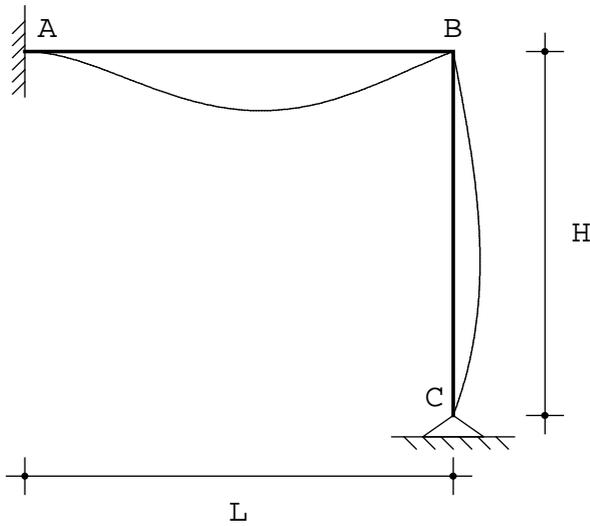


Figura 4 - Gli spostamenti per il telaio di Figura 1

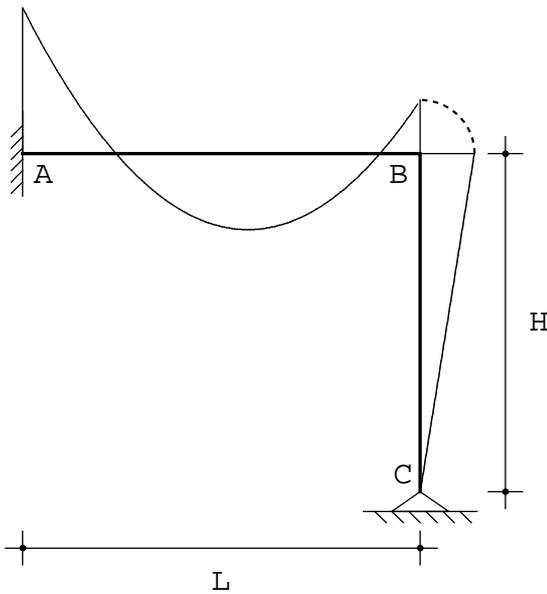


Figura 5 - I momenti flettenti per il telaio di Figura 1

E' anche interessante il valore del momento nel nodo B :

$$M_B = \frac{EA H^2 (-24 EI H + EA L^3) qL^3}{4 (36 EI^2 H L + EA^2 H^2 L^3 (4 H + 3 L) + 12 EA EI (H^4 + 3 H^3 L + L^4))} \quad (29)$$

che trascurando le deformazioni assiali diviene:

$$M_B = - \frac{q L^3}{4 (4 H + 3 L)} \quad (30)$$

Esempio n .2

Si considera ora un telaio costituito da una traverso di luce $2L$, supportato in mezzeria da un ritto di altezza H . L'estremo sinistro del ritto e' vincolato con una cerniera, mentre l'estremo di destra e' libero, e caricato da una forza F . Infine, si suppone che il ritto sia incastrato al piede.

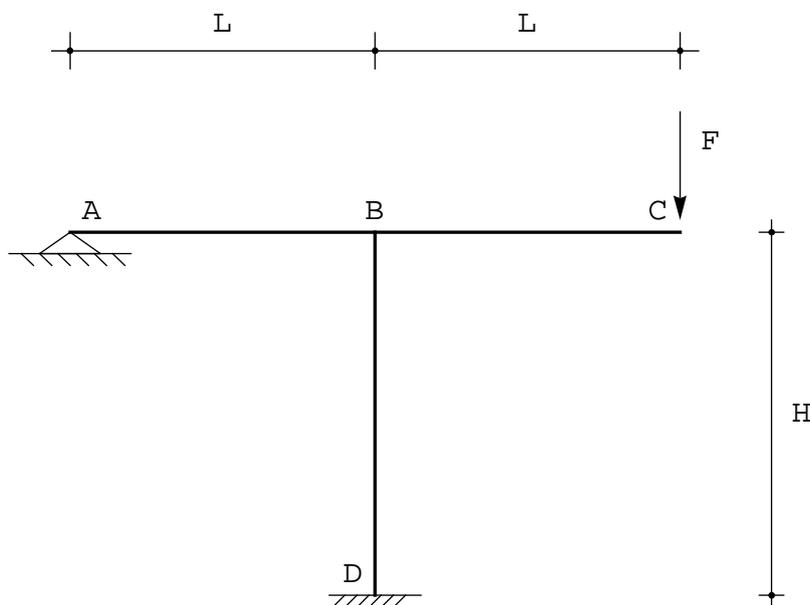


Figura 6 - Un telaio costituito da tre elementi

Si possono identificare tre elementi, e quindi si scrivera':

$$\begin{aligned}
 v_1(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\
 w_1(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 \\
 v_2(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 \\
 w_2(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 \\
 v_3(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\
 w_3(x_3) &= f_0 + f_1 x_3
 \end{aligned} \tag{31}$$

Il pedice 1 si riferisce al tratto AB, con origine in A, il pedice 2 si riferisce al tratto BC, con origine in B, il pedice 3 descrive il tratto BD, con origine in B. Occorre imporre 18 condizioni ai limiti, 9 in corrispondenza dei tre estremi, ed altre 9 in corrispondenza del nodo triplo. Negli estremi si ha, banalmente:

in A :

$$\begin{aligned}
 v_1(0) &= 0 \\
 w_1(0) &= 0 \\
 v_1'(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{32}$$

in C :

$$\begin{aligned}
 w_2'(L) &= 0 \\
 v_2'(L) &= 0 \\
 -EIv_2''''(L) &= F
 \end{aligned} \tag{33}$$

in D :

$$\begin{aligned}v_3(H) &= 0 \\w_3(H) &= 0 \\v_3'(H) &= 0\end{aligned}$$

Nel nodo triplo la congruenza degli spostamenti detta le sei condizioni:

$$\begin{aligned}v_1(L) &= v_2(0) = w_3(0) \\w_1(L) &= w_2(0) = -v_3(0) \\v_1'(L) &= v_2'(0) = v_3'(0)\end{aligned}\quad (35)$$

mentre l'equilibrio del nodo triplo in B permette di scrivere le restanti tre equazioni di equilibrio. Dalla Figura 7 si trae:

$$\begin{aligned}-N_{BA} + N_{BC} - T_{BD} &= 0 \\-T_{BA} + T_{BC} + N_{BD} &= 0 \\-M_{BA} + M_{BC} + M_{BD} &= 0\end{aligned}\quad (36)$$

ossia, in termini di spostamenti e derivate successive :

$$\begin{aligned}-EA w_1'(L) + EA w_2'(0) + EI v_3''''(0) &= 0 \\EI v_1''''(L) - EI v_2''''(0) + EA w_3'(0) &= 0 \\EI v_1''(L) - EI v_2''(0) - EI v_3''(0) &= 0\end{aligned}\quad (37)$$

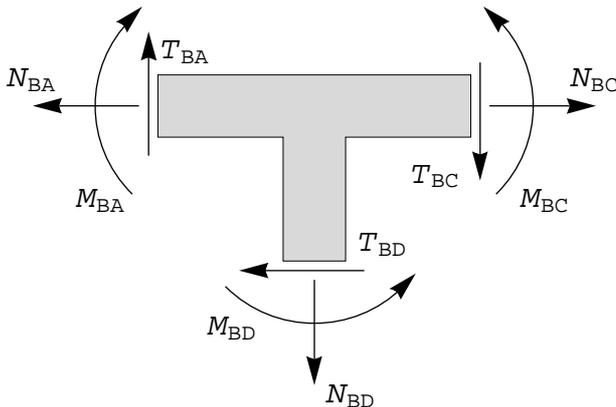


Figura 7 - Il nodo triplo ed il suo equilibrio

La soluzione puo' essere ottenuta come:

$$\begin{aligned}a_0 &= 0 \\a_1 &= \frac{FHL(-EA^2H^3L^3 + 36EI^2L(4H+L) + 12EA EI(H^4 + H^3L - L^4))}{2EI(36EI^2HL + EA^2H^3L^2(3H+4L) + 12EA EI(H^4 + 3HL^3 + L^4))} \\a_2 &= 0 \\a_3 &= \frac{FH(-12EI^2L + EA^2H^3L^2 - 4EA EI(H^3 - 3L^3))}{2EI(36EI^2HL + EA^2H^3L^2(3H+4L) + 12EA EI(H^4 + 3HL^3 + L^4))} \\b_0 &= \frac{2FHL^2(6EIL(6H+L) + EA H^3(3H+2L))}{36EI^2HL + EA^2H^3L^2(3H+4L) + 12EA EI(H^4 + 3HL^3 + L^4)} \\b_1 &= \end{aligned}\quad (38)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{F H L (E A H^3 + 12 E I L) (6 E I H + E A L^3)}{E I (36 E I^2 H L + E A^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 E A E I (H^4 + 3 H L^3 + L^4))} \\
b_2 &= \frac{F L}{2 E I} \\
b_3 &= -\frac{F}{6 E I} \\
c_0 &= -\frac{6 F H^2 L^2 (6 E I H + E A L^3)}{36 E I^2 H L + E A^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 E A E I (H^4 + 3 H L^3 + L^4)} \\
c_1 &= \\
& \frac{F H L (E A H^3 + 12 E I L) (6 E I H + E A L^3)}{E I (36 E I^2 H L + E A^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 E A E I (H^4 + 3 H L^3 + L^4))} \\
c_2 &= \tag{40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2 F L (E A H^3 + 3 E I L) (6 E I H + E A L^3)}{E I (36 E I^2 H L + E A^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 E A E I (H^4 + 3 H L^3 + L^4))} \\
c_3 &= \\
& \frac{E A F H^2 L (6 E I H + E A L^3)}{E I (36 E I^2 H L + E A^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 E A E I (H^4 + 3 H L^3 + L^4))} \\
d_0 &= \frac{6 F H^2 L^2 (6 E I H + E A L^3)}{36 E I^2 H L + E A^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 E A E I (H^4 + 3 H L^3 + L^4)} \\
& \tag{41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{6 F H^2 L (6 E I H + E A L^3)}{36 E I^2 H L + E A^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 E A E I (H^4 + 3 H L^3 + L^4)} \\
d_1 &= \\
& \frac{6 F H^2 L^2 (6 E I H + E A L^3)}{36 E I^2 H L + E A^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 E A E I (H^4 + 3 H L^3 + L^4)} \\
e_0 &= \tag{42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_1 &= 0 \\
f_0 &= \frac{2 F H L^2 (6 E I L (6 H + L) + E A H^3 (3 H + 2 L))}{36 E I^2 H L + E A^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 E A E I (H^4 + 3 H L^3 + L^4)} \\
& \tag{43} \\
f_1 &= -\frac{2 F L^2 (6 E I L (6 H + L) + E A H^3 (3 H + 2 L))}{36 E I^2 H L + E A^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 E A E I (H^4 + 3 H L^3 + L^4)}
\end{aligned}$$

Gli spostamenti trasversali lungo i tre tratti sono allora forniti da :

$$\begin{aligned}
v_1(x_3) &= \\
& \frac{F H x_3 (12 E I^2 L (12 H L + 3 L^2 - x_3^2) + E A^2 H^3 L^2 (-L^2 + x_3^2) + 4 E A E I (3 H^4 L - 3 L^5 + 3 L^3 x_3^2 + H^3 (3 L^2 - x_3^2)))}{(36 E I^2 H L + E A^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 E A E I (H^4 + 3 H L^3 + L^4))} \\
& \tag{44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2(x_3) &= \\
& \frac{1}{6} F \left(\frac{12 H L^2 (6 E I L (6 H + L) + E A H^3 (3 H + 2 L))}{36 E I^2 H L + E A^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 E A E I (H^4 + 3 H L^3 + L^4)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(6 H L (EA H^3 + 12 EI L) (6 EI H + EA L^3) x_3 \right) / \\
& \left(EI (36 EI^2 H L + EA^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + \right. \\
& \quad \left. 12 EA EI (H^4 + 3 H L^3 + L^4)) \right) + \frac{3 L x_3^2}{EI} - \frac{x_3^3}{EI} \Big) \\
v_3 (x_3) = & \\
& - \frac{F L (6 EI H + EA L^3) (H - x_3)^2 (6 EI L - EA H^2 x_3)}{EI (36 EI^2 H L + EA^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 EA EI (H^4 + 3 H L^3 + L^4))} \quad (46)
\end{aligned}$$

mentre gli spostamenti assiali sono pari a :

$$\begin{aligned}
w_1 (x_3) = & \\
& F \frac{6 H^2 L (6 EI H + EA L^3) x_3}{36 EI^2 H L + EA^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 EA EI (H^4 + 3 H L^3 + L^4)} \quad (47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2 (x_3) = & \\
& F \frac{6 H^2 L^2 (6 EI H + EA L^3)}{36 EI^2 H L + EA^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 EA EI (H^4 + 3 H L^3 + L^4)} \quad (48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_3 (x_3) = & \\
& F \frac{2 L^2 (6 EI L (6 H + L) + EA H^3 (3 H + 2 L)) (H - x_3)}{36 EI^2 H L + EA^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 EA EI (H^4 + 3 H L^3 + L^4)} \quad (49)
\end{aligned}$$

Ne segue che gli sforzi assiali sono pari a :

$$\begin{aligned}
N_1 (x_3) = & \\
& F \frac{6 EA H^2 L (6 EI H + EA L^3)}{36 EI^2 H L + EA^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 EA EI (H^4 + 3 H L^3 + L^4)} \quad (50)
\end{aligned}$$

$$N_2 (x_3) = 0 \quad (51)$$

$$\begin{aligned}
N_3 (x_3) = & \\
& -F \frac{2 EA L^2 (6 EI L (6 H + L) + EA H^3 (3 H + 2 L))}{36 EI^2 H L + EA^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 EA EI (H^4 + 3 H L^3 + L^4)} \quad (52)
\end{aligned}$$

mentre momenti e tagli possono scriversi come :

$$\begin{aligned}
M_1 (x_3) = & \\
& -F \frac{3 H (-12 EI^2 L + EA^2 H^3 L^2 - 4 EA EI (H^3 - 3 L^3)) x_3}{36 EI^2 H L + EA^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 EA EI (H^4 + 3 H L^3 + L^4)} \quad (53)
\end{aligned}$$

$$M_2 (x_3) = F (-L + x_3) \quad (54)$$

$$\begin{aligned}
M_3 (x_3) = & \\
& F \frac{2 L (6 EI H + EA L^3) (6 EI L + EA H^2 (2 H - 3 x_3))}{36 EI^2 H L + EA^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 EA EI (H^4 + 3 H L^3 + L^4)} \quad (55)
\end{aligned}$$

$$T_1(x_3) = -F \frac{3 H (-12 EI^2 L + EA^2 H^3 L^2 - 4 EA EI (H^3 - 3 L^3))}{36 EI^2 H L + EA^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 EA EI (H^4 + 3 H L^3 + L^4)} \quad (56)$$

$$T_2(x_3) = F \quad (57)$$

$$T_3(x_3) = -F \frac{6 EA H^2 L (6 EI H + EA L^3)}{36 EI^2 H L + EA^2 H^3 L^2 (3 H + 4 L) + 12 EA EI (H^4 + 3 H L^3 + L^4)} \quad (58)$$

Trascurando le deformazioni da sforzo assiale si ha invece ($EA \rightarrow \infty$):

$$v_1(x_3) = \frac{F H x_3 (-L^2 + x_3^2)}{EI (6 H + 8 L)} \quad (59)$$

$$v_2(x_3) = \frac{F x_3 (6 H L^2 + 3 L (3 H + 4 L) x_3 - (3 H + 4 L) x_3^2)}{6 EI (3 H + 4 L)} \quad (60)$$

$$v_3(x_3) = \frac{F L^2 (H - x_3)^2 x_3}{EI H (3 H + 4 L)} \quad (61)$$

$$M_1(x_3) = -\frac{3 F H x_3}{3 H + 4 L} \quad (62)$$

$$M_3(x_3) = \frac{2 F L^2 (2 H - 3 x_3)}{H (3 H + 4 L)} \quad (63)$$

$$T_1(x_3) = -\frac{3 F H}{3 H + 4 L} \quad (64)$$

$$T_3(x_3) = -\frac{6 F L^2}{3 H^2 + 4 H L} \quad (65)$$

Il diagramma degli spostamenti e' riportato in Figura 8, notevolmente esagerato, mentre il diagramma del momento e' consegnato in Figura 9

■ I valori notevoli

L' abbassamento in corrispondenza della forza puo' ottenersi valutando la funzione $v_2(x_3)$ per x_3 pari ad L . Trascurando l'effetto dello sforzo assiale si ha:

$$v_{2 \max} = \frac{FL^3}{3 EI} \frac{6 H + 4 L}{3 H + 4 L} \quad (66)$$

Nel nodo triplo si hanno invece i tre momenti :

$$M_{BA} = -FL \frac{3 H}{3 H + 4 L} \quad (67)$$

$$M_{BC} = -FL \quad (68)$$

$$M_{BD} = FL \frac{4L}{3H + 4L} \quad (69)$$

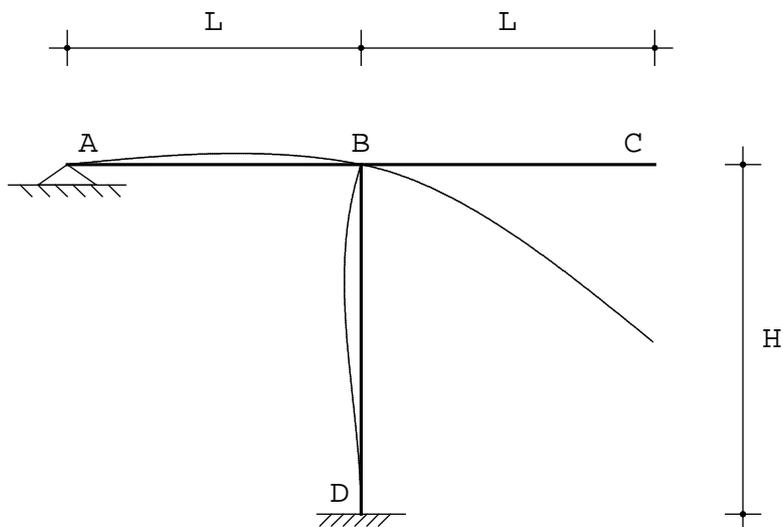


Figura 8 - Gli spostamenti per il telaio di Figura 6

Si noti che nel nodo triplo e' rispettato l'equilibrio dei momenti

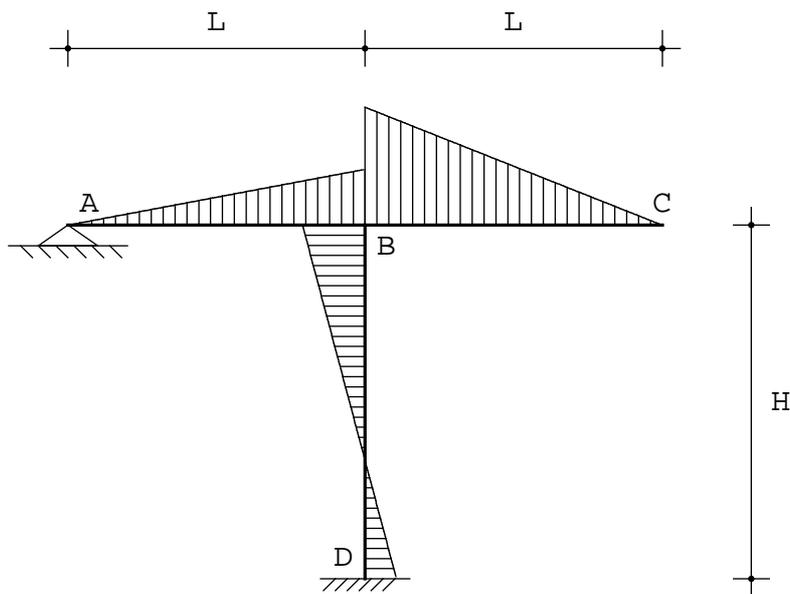


Figura 9 - I momenti flettenti per il telaio di Figura 6

Esempio n . 3

Si riporta un esempio già risolto col metodo del rilassamento in V.Francisosi "Problemi di Scienza delle Costruzioni", Vol.II, pagg.172-175. Si tratta di un telaio formato da quattro aste ortogonali tra di loro, concorrenti in un punto, e vincolate come in Figura 10 Il carico agisce sulle due aste orizzontali, costante e di valore q.

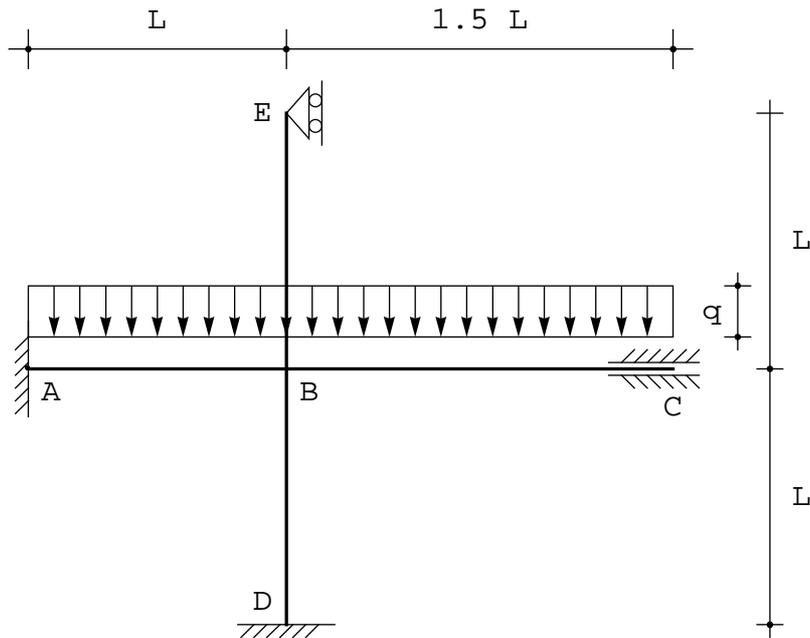


Figura 10 - Un telaio con un nodo quadruplo

Si possono identificare quattro elementi, e quindi si scriverà:

$$\begin{aligned}
 v_1(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 + \frac{q x_3^4}{24 EI} \\
 w_1(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 \\
 v_2(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 + \frac{q x_3^4}{24 EI} \\
 w_2(x_3) &= f_0 + f_1 x_3 \\
 v_3(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\
 w_3(x_3) &= g_0 + g_1 x_3 \\
 v_4(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 + d_2 x_3^2 + d_3 x_3^3 \\
 w_5(x_3) &= h_0 + h_1 x_3
 \end{aligned} \tag{70}$$

Il pedice 1 si riferisce al tratto AB, con origine in A, il pedice 2 si riferisce al tratto BC, con origine in B, il pedice 3 descrive il tratto EB, con origine in E, il pedice 4 infine è relativo al tratto BD, con origine in B. Occorre imporre 24 condizioni ai limiti, 12 in corrispondenza dei tre estremi, ed altre 12 in corrispondenza del nodo quadruplo. Negli estremi si ha, banalmente:

in A si ha un incastro:

$$\begin{aligned}
 v_1(0) &= 0 \\
 w_1(0) &= 0 \\
 v_1'(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{71}$$

in C si ha un incastro assialmente scorrevole:

$$\begin{aligned}
 w_2' \left(\frac{3}{2} L \right) &= 0 \\
 v_2 \left(\frac{3}{2} L \right) &= 0 \\
 v_2' \left(\frac{3}{2} L \right) &= 0
 \end{aligned} \tag{72}$$

in D si ha un incastro:

$$\begin{aligned}
 v_4 (L) &= 0 \\
 w_4 (L) &= 0 \\
 v_4' (L) &= 0
 \end{aligned} \tag{73}$$

in E si ha un carrello:

$$\begin{aligned}
 v_4 (L) &= 0 \\
 w_4' (L) &= 0 \\
 v_4'' (L) &= 0
 \end{aligned} \tag{74}$$

Nel nodo quadruplo la congruenza degli spostamenti detta le nove condizioni:

$$\begin{aligned}
 v_1 (L) &= v_2 (0) = w_3 (L) = w_4 (0) \\
 w_1 (L) &= w_2 (0) = -v_3 (L) = -v_4 (0) \\
 v_1' (L) &= v_2' (0) = v_3' (L) = v_4' (0) = 0
 \end{aligned} \tag{75}$$

mentre l'equilibrio del nodo quadruplo in B permette di scrivere le restanti tre equazioni di equilibrio. Come puo' leggersi dalla Figura 11 si ha:

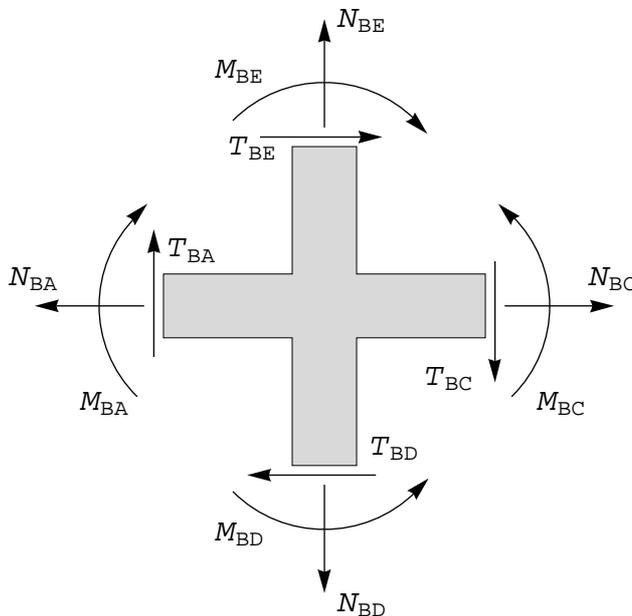


Figura 11 - Il nodo quadruplo ed il suo equilibrio

$$\begin{aligned}
 -N_{BA} + N_{BC} - T_{BD} + T_{BE} &= 0 \\
 -T_{BA} + T_{BC} + N_{BD} - N_{BE} &= 0 \\
 -M_{BA} + M_{BC} + M_{BD} - M_{BE} &= 0
 \end{aligned} \tag{76}$$

ossia, in termini di spostamenti e derivate successive :

$$-EA w_1'(L) + EA w_2'(0) + EI v_4''''(0) - EI v_3''''(L) = 0$$

$$EI v_1''''(L) - EI v_2''''(0) + EA w_4'(0) - EA w_3'(L) = 0$$

$$EI v_1''(L) - EI v_2''(0) - EI v_4''(0) + EI v_3''(L) = 0$$

La soluzione del risultante sistema di equazioni fornisce le costanti di integrazione:

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{71\,150\,EI\,L^2\,q + 603\,EA\,L^4\,q}{261\,120\,EI^2 + 17\,712\,EA\,EI\,L^2} \quad (78)$$

$$a_3 = -\frac{L(59\,440\,EI + 1341\,EA\,L^2)\,q}{48\,EI(5440\,EI + 369\,EA\,L^2)}$$

$$b_0 = \frac{3765\,L^4\,q}{8(5440\,EI + 369\,EA\,L^2)}$$

$$b_1 = \frac{2500\,EI\,L^3\,q + 45\,EA\,L^5\,q}{87\,040\,EI^2 + 5904\,EA\,EI\,L^2} \quad (79)$$

$$b_2 = \frac{-31\,280\,EI\,L^2\,q + 2961\,EA\,L^4\,q}{96\,EI(5440\,EI + 369\,EA\,L^2)}$$

$$b_3 = -\frac{7960\,EI\,L\,q + 1077\,EA\,L^3\,q}{130\,560\,EI^2 + 8856\,EA\,EI\,L^2}$$

$$c_0 = 0$$

$$c_1 = -\frac{5\,L^3(500\,EI + 9\,EA\,L^2)\,q}{32\,EI(5440\,EI + 369\,EA\,L^2)} \quad (80)$$

$$c_2 = 0$$

$$c_3 = \frac{5\,L(500\,EI + 9\,EA\,L^2)\,q}{32\,EI(5440\,EI + 369\,EA\,L^2)}$$

$$d_0 = 0$$

$$d_1 = \frac{2500\,EI\,L^3\,q + 45\,EA\,L^5\,q}{87\,040\,EI^2 + 5904\,EA\,EI\,L^2} \quad (81)$$

$$d_2 = -\frac{5\,L^2(500\,EI + 9\,EA\,L^2)\,q}{8\,EI(5440\,EI + 369\,EA\,L^2)}$$

$$d_3 = \frac{2500\,EI\,L\,q + 45\,EA\,L^3\,q}{87\,040\,EI^2 + 5904\,EA\,EI\,L^2}$$

$$e_0 = -\frac{15\,L^2(500\,EI + 9\,EA\,L^2)\,q}{16\,EA(5440\,EI + 369\,EA\,L^2)} \quad (82)$$

$$e_1 = \frac{7500\,EI\,L\,q + 135\,EA\,L^3\,q}{87\,040\,EA\,EI + 5904\,EA^2\,L^2}$$

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = 0 \quad (83)$$

$$\begin{aligned}
 g_0 &= \frac{3765 L^4 q}{8 (5440 EI + 369 EA L^2)} \\
 g_1 &= 0 \\
 h_0 &= \frac{3765 L^4 q}{8 (5440 EI + 369 EA L^2)} \\
 h_1 &= - \frac{3765 L^3 q}{8 (5440 EI + 369 EA L^2)}
 \end{aligned} \tag{85}$$

Gli spostamenti trasversali sono allora forniti da :

$$v_1 (x_3) = \frac{q}{48 EI} x_3^2 (9 EA L^2 (67 L^2 - 149 L x_3 + 82 x_3^2) + 10 EI (7115 L^2 - 5944 L x_3 + 1088 x_3^2)) / (5440 EI + 369 EA L^2) \tag{86}$$

$$v_2 (x_3) = \frac{q}{96 EI} ((3 L - 2 x_3)^2 (3 EA L^2 x_3 (10 L + 123 x_3) + 20 EI (251 L^2 + 418 L x_3 + 272 x_3^2))) / (5440 EI + 369 EA L^2) \tag{87}$$

$$v_3 (x_3) = \frac{-q}{32 EI} \frac{5 L (500 EI + 9 EA L^2) x_3 (L^2 - x_3^2)}{(5440 EI + 369 EA L^2)} \tag{88}$$

$$v_4 (x_3) = \frac{q}{16 EI} \frac{5 L (500 EI + 9 EA L^2) (L - x_3)^2 x_3}{(5440 EI + 369 EA L^2)} \tag{89}$$

mentre gli spostamenti assiali sono ricavabili come :

$$w_1 (x_3) = - \frac{q}{16 EA} \frac{15 L (500 EI + 9 EA L^2) (L - x_3)}{(5440 EI + 369 EA L^2)} \tag{90}$$

$$w_2 (x_3) = 0 \tag{91}$$

$$w_3 (x_3) = \frac{qL^4}{8} \frac{3765}{(5440 EI + 369 EA L^2)} \tag{92}$$

$$w_4 (x_3) = \frac{qL^3}{8} \frac{3765 (L - x_3)}{(5440 EI + 369 EA L^2)} \tag{93}$$

Ne seguono le caratteristiche della sollecitazione interna :

$$N_1 (x_3) = q \frac{15 L (500 EI + 9 EA L^2)}{87040 EI + 5904 EA L^2} \tag{94}$$

$$N_2 (x_3) = 0 \tag{95}$$

$$N_3 (x_3) = 0 \tag{96}$$

$$N_4 (x_3) = -q \frac{3765 EA L^3}{8 (5440 EI + 369 EA L^2)} \tag{97}$$

$$M_1(x_3) = - \left(q \left(9 EA L^2 \left(67 L^2 - 447 L x_3 + 492 x_3^2 \right) + 10 EI \left(7115 L^2 - 17832 L x_3 + 6528 x_3^2 \right) \right) \right) / \left(24 \left(5440 EI + 369 EA L^2 \right) \right)$$

$$M_2(x_3) = \left(q \left(80 EI \left(391 L^2 + 1194 L x_3 - 1632 x_3^2 \right) - 9 EA L^2 \left(329 L^2 - 1436 L x_3 + 984 x_3^2 \right) \right) \right) / \left(48 \left(5440 EI + 369 EA L^2 \right) \right) \quad (99)$$

$$M_3(x_3) = - \frac{15 L \left(500 EI + 9 EA L^2 \right) q x_3}{87040 EI + 5904 EA L^2} \quad (100)$$

$$M_4(x_3) = \frac{5 L \left(500 EI + 9 EA L^2 \right) q \left(2 L - 3 x_3 \right)}{8 \left(5440 EI + 369 EA L^2 \right)} \quad (101)$$

$$T_1(x_3) = \frac{q \left(80 EI \left(743 L - 544 x_3 \right) + 9 EA L^2 \left(149 L - 328 x_3 \right) \right)}{8 \left(5440 EI + 369 EA L^2 \right)} \quad (102)$$

$$T_2(x_3) = \frac{q \left(40 EI \left(199 L - 544 x_3 \right) + 3 EA L^2 \left(359 L - 492 x_3 \right) \right)}{4 \left(5440 EI + 369 EA L^2 \right)} \quad (103)$$

$$T_3(x_3) = - \frac{15 L \left(500 EI + 9 EA L^2 \right) q}{87040 EI + 5904 EA L^2} \quad (104)$$

$$T_4(x_3) = - \frac{15 L \left(500 EI + 9 EA L^2 \right) q}{8 \left(5440 EI + 369 EA L^2 \right)} \quad (105)$$

■ La soluzione in assenza di deformazioni assiali

Come usuale, la soluzione si semplifica molto se si ipotizza che la rigidezza assiale EA sia tale da trascurare le deformazioni assiali. In tal caso si ha subito:

$$v_1(x_3) = \frac{q x_3^2 \left(67 L^2 - 149 L x_3 + 82 x_3^2 \right)}{1968 EI} \quad (106)$$

$$v_2(x_3) = \frac{q \left(3 L - 2 x_3 \right)^2 x_3 \left(10 L + 123 x_3 \right)}{11808 EI} \quad (107)$$

$$v_3(x_3) = - \frac{5 L q x_3 \left(L^2 - x_3^2 \right)}{1312 EI} \quad (108)$$

$$v_4(x_3) = \frac{5 L q \left(L - x_3 \right)^2 x_3}{656 EI} \quad (109)$$

mentre si annullano le quattro linee elastiche assiali. Analogamente si ha :

$$M_1(x_3) = - \frac{1}{984} q \left(67 L^2 - 447 L x_3 + 492 x_3^2 \right) \quad (110)$$

$$M_2(x_3) = - \frac{q (329 L^2 - 1436 L x_3 + 984 x_3^2)}{1968} \quad (111)$$

$$M_3(x_3) = - \frac{15}{656} q L x_3 \quad (112)$$

$$M_4(x_3) = \frac{5}{328} q L (2 L - 3 x_3) \quad (113)$$

$$T_1(x_3) = \frac{149 q L}{328} - q x_3 \quad (114)$$

$$T_2(x_3) = \frac{359 q L}{492} - q x_3 \quad (115)$$

$$T_3(x_3) = - \frac{15 q L}{656} \quad (116)$$

$$T_4(x_3) = - \frac{15 q L}{328} \quad (117)$$

Gli spostamenti sono riportati in Figura 12. Si noti che il nodo centrale ruota, ma non si sposta, permettendo l'implementazione dei metodi caratteristici dei cosiddetti *telai a nodi fissi*.

Il diagramma dei momenti e' invece riportato in Figura 13. Si noti la corrispondenza tra i punti di flesso del diagramma degli spostamenti ed i punti di nullo del diagramma dei momenti.

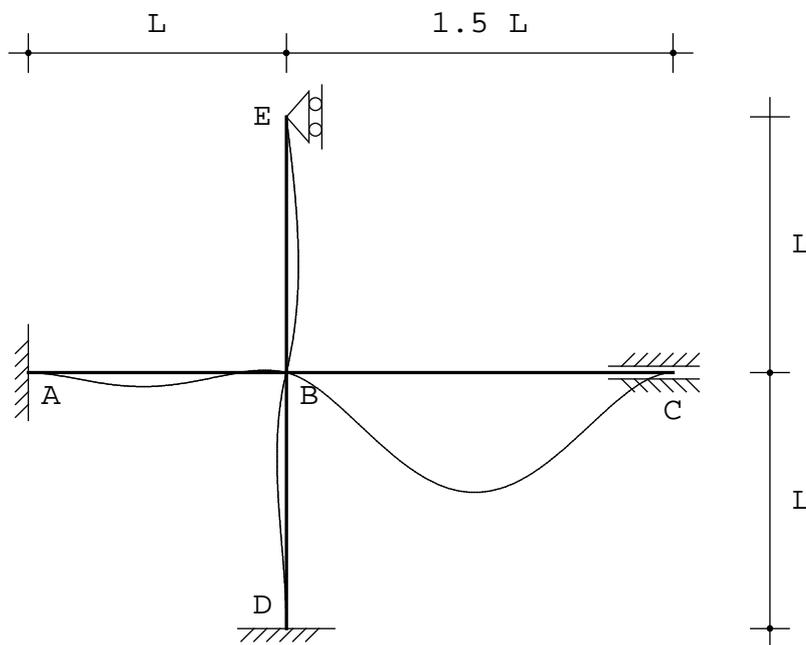


Figura 12 - Gli spostamenti per il telaio con nodo quadruplo

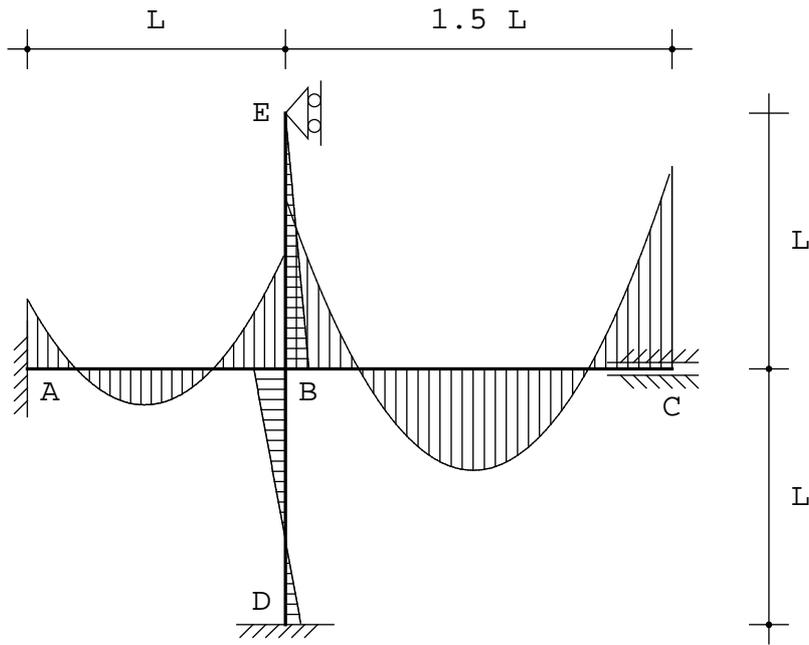


Figura 13 - I momenti flettenti per il telaio con nodo quadruplo

■ I valori notevoli

Limitandosi al caso di rigidità assiale infinita si ha:

$$M_A = -\frac{67}{984} q L^2 \quad (118)$$

$$M_{BA} = -\frac{14}{123} q L^2 \quad (119)$$

$$M_{BC} = -\frac{329}{1968} q L^2 \quad (120)$$

$$M_{BE} = \frac{5}{164} q L^2 \quad (121)$$

$$M_{BE} = -\frac{15}{656} q L^2 \quad (122)$$

$$M_D = -\frac{5}{328} q L^2 \quad (123)$$

$$M_C = -\frac{389}{1968} q L^2 \quad (124)$$

confermando i risultati ottenuti nel libro citato in precedenza.

Esempio n. 4

Si consideri ora il telaio a due piani di Figura 14, incastrato al piede in corrispondenza dei tre ritri inferiori, e soggetto ai carichi di figura. I momenti di inerzia dei due ritri superiori GE ed HF sono pari ad I , i momenti d'inerzia dei tre ritri inferiori DA, EB ed FC e' pari a $2I$, mentre per i traversi DE, EF e GH si e' assunto un momento di inerzia pari a $5I$. L'area di ciascun elemento e' invece genericamente indicata con A , in quanto si vogliono evidenziare i risultati per rigidzze assiali infinite.

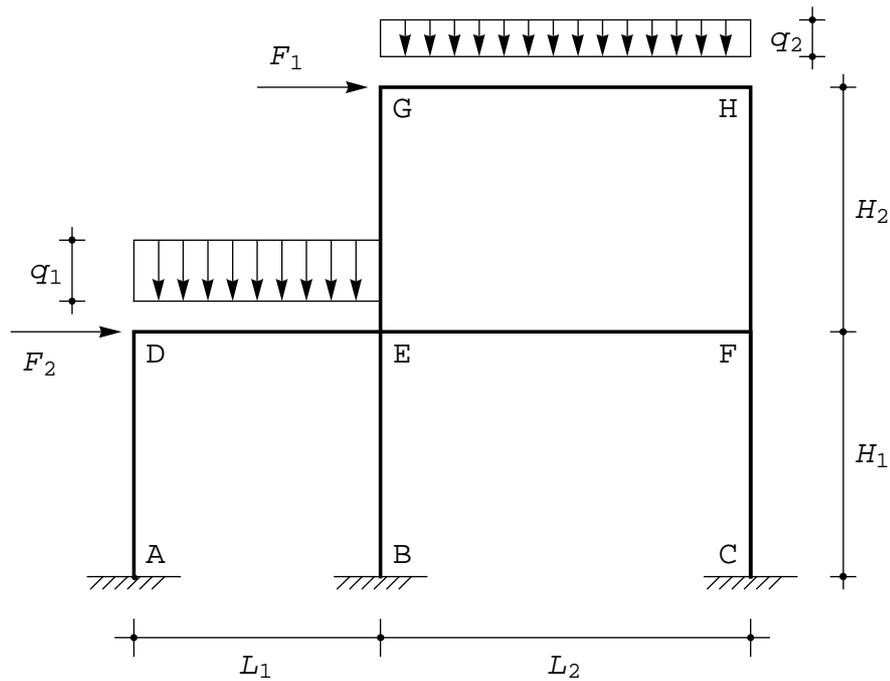


Figura 14 - Un telaio a due piani

Si hanno quindi otto elementi, e si adottano otto sistemi di riferimento con origine nell'estremo di sinistra - per ciascun traverso - e nell'estremo superiore - per ciascun ritro. Sara' allora, per le deformate flessionali:

$$v_{DA}(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \quad (125)$$

$$v_{EB}(x_3) = b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 \quad (126)$$

$$v_{FC}(x_3) = c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \quad (127)$$

$$v_{DE}(x_3) = d_0 + d_1 x_3 + d_2 x_3^2 + d_3 x_3^3 + q_1 \frac{x_3^4}{120 EI} \quad (128)$$

$$v_{EF}(x_3) = e_0 + e_1 x_3 + e_2 x_3^2 + e_3 x_3^3 \quad (129)$$

$$v_{GE}(x_3) = f_0 + f_1 x_3 + f_2 x_3^2 + f_3 x_3^3 \quad (130)$$

$$v_{HF}(x_3) = g_0 + g_1 x_3 + g_2 x_3^2 + g_3 x_3^3 \quad (131)$$

$$v_{GH}(x_3) = h_0 + h_1 x_3 + h_2 x_3^2 + h_3 x_3^3 + q_2 \frac{x_3^4}{120 EI} \quad (132)$$

mentre per la deformate assiali :

$$w_{DA} (x_3) = m_0 + m_1 x_3 \quad (133)$$

$$w_{EB} (x_3) = n_0 + n_1 x_3 \quad (134)$$

$$w_{FC} (x_3) = o_0 + o_1 x_3 \quad (135)$$

$$w_{DE} (x_3) = p_0 + p_1 x_3 \quad (136)$$

$$w_{EF} (x_3) = q_0 + q_1 x_3 \quad (137)$$

$$w_{GE} (x_3) = r_0 + r_1 x_3 \quad (138)$$

$$w_{HF} (x_3) = s_0 + s_1 x_3 \quad (139)$$

$$w_{GH} (x_3) = t_0 + t_1 x_3 \quad (140)$$

Le 48 costanti di integrazione si ottengono scrivendo 48 condizioni ai limiti, tre per ogni incastro, sei in ciascuno dei nodi D, G ed H, nove nel nodo triplo in F, e 12 nel nodo quadruplo in E. Piu' in dettaglio, sara' quindi:

- in A:

$$\begin{aligned} v_{DA} (H_1) &= 0 \\ v'_{DA} (H_1) &= 0 \\ w_{DA} (H_1) &= 0 \end{aligned} \quad (141)$$

- in B:

$$\begin{aligned} v_{EB} (H_1) &= 0 \\ v'_{EB} (H_1) &= 0 \\ w_{EB} (H_1) &= 0 \end{aligned} \quad (142)$$

- in C:

$$\begin{aligned} v_{FC} (H_1) &= 0 \\ v'_{FC} (H_1) &= 0 \\ w_{FC} (H_1) &= 0 \end{aligned} \quad (143)$$

- in D:

$$\begin{aligned} v_{DA} (0) &= -w_{DE} (0) \\ w_{DA} (0) &= v_{DE} (0) \\ \phi_{DA} (0) &= \phi_{DE} (0) \end{aligned} \quad (144)$$

$$\begin{aligned} -T_{DA} (0) + N_{DE} (0) + F_1 &= 0 \\ N_{DA} (0) + T_{DE} (0) &= 0 \\ M_{DA} (0) + M_{DE} (0) &= 0 \end{aligned} \quad (145)$$

- in G:

$$\begin{aligned} v_{GE} (0) &= -w_{GH} (0) \\ w_{GE} (0) &= v_{GH} (0) \\ \phi_{GE} (0) &= \phi_{GH} (0) \end{aligned} \quad (146)$$

$$\begin{aligned} -T_{GE} (0) + N_{GH} (0) + F_2 &= 0 \\ N_{GE} (0) + T_{GH} (0) &= 0 \\ M_{GE} (0) + M_{GH} (0) &= 0 \end{aligned} \quad (147)$$

- in H:

$$\begin{aligned} v_{HF}(0) &= w_{GH}(L_2) \\ w_{HF}(0) &= v_{GH}(L_2) \\ \phi_{HF}(0) &= \phi_{GH}(L_2) \end{aligned} \quad (148)$$

$$\begin{aligned} -N_{GH}(L_2) - T_{HF}(0) &= 0 \\ -T_{GH}(L_2) + N_{HF}(0) &= 0 \\ -M_{GH}(L_2) + M_{HF}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (149)$$

- in F:

$$\begin{aligned} v_{EF}(L_2) &= w_{HF}(H_2) \\ v_{EF}(L_2) &= w_{FC}(0) \\ w_{EF}(L_2) &= -v_{HF}(H_2) \\ w_{EF}(L_2) &= -v_{FC}(0) \\ \phi_{EF}(L_2) &= \phi_{HF}(H_2) \\ \phi_{EF}(L_2) &= \phi_{FC}(0) \end{aligned} \quad (150)$$

$$\begin{aligned} -N_{EF}(L_2) - T_{FC}(0) + T_{HF}(H_2) &= 0 \\ -T_{EF}(L_2) - N_{HF}(H_2) + N_{FC}(0) &= 0 \\ -M_{EF}(L_2) - M_{HF}(H_2) + M_{FC}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (151)$$

- in E:

$$\begin{aligned} v_{DE}(L_1) &= w_{GE}(H_1) \\ v_{DE}(L_1) &= w_{EB}(0) \\ v_{DE}(L_1) &= v_{EF}(0) \\ w_{DE}(L_1) &= -v_{GE}(H_1) \\ w_{DE}(L_1) &= -v_{EB}(0) \\ w_{DE}(L_1) &= w_{EF}(0) \\ \phi_{DE}(L_1) &= \phi_{GE}(H_1) \\ \phi_{DE}(L_1) &= \phi_{EB}(0) \\ \phi_{DE}(L_1) &= \phi_{EF}(0) \end{aligned} \quad (152)$$

$$\begin{aligned} -N_{DE}(L_1) - T_{EB}(0) + T_{GE}(H_1) + N_{EF}(0) &= 0 \\ -T_{DE}(L_1) - N_{HF}(H_2) + T_{EF}(0) + N_{FC}(0) &= 0 \\ -M_{DE}(L_1) - M_{GE}(H_2) + M_{EF}(0) + M_{FC}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (153)$$

Tenendo conto che momenti saranno forniti da:

$$\begin{aligned} M_{GE}(x_3) &= -EI v_{GE}(x_3) \\ M_{HF}(x_3) &= -EI v_{HF}(x_3) \end{aligned} \quad (154)$$

$$\begin{aligned} M_{DA}(x_3) &= -2EI v_{DA}(x_3) \\ M_{EB}(x_3) &= -2EI v_{EB}(x_3) \\ M_{FC}(x_3) &= -2EI v_{FC}(x_3) \end{aligned} \quad (155)$$

$$\begin{aligned} M_{DE}(x_3) &= -5EI v_{DA}(x_3) \\ M_{EF}(x_3) &= -5EI v_{EB}(x_3) \\ M_{GH}(x_3) &= -5EI v_{FC}(x_3) \end{aligned} \quad (156)$$

si giunge ad un sistema di 48 equazioni in altrettante incognite, che puo' essere risolto con un qualsiasi programma di calcolo simbolico. Tuttavia, piuttosto che riportare le relative formule, molto lunghe e poco significative, si preferisce illustrare il comportamento del telaio in ipotesi di rigidità assiale infinita.

La deformata e' riportata in Figura 15, nelle ipotesi $H_1 = H_2 = H$, $L_1 = L_2 = 1.5 H$, $q_2 = q$, $q_1 = 2 q$, $F_1 = F_2 = q H$. L'infinita rigidità assiale delle aste impedisce ai nodi di subire spostamenti verticali, ed

impone che gli spostamenti orizzontali dei nodi del primo livello, D,E,F, dovranno essere uguali, così' come gli spostamenti orizzontali dei nodi G ed H del secondo livello.

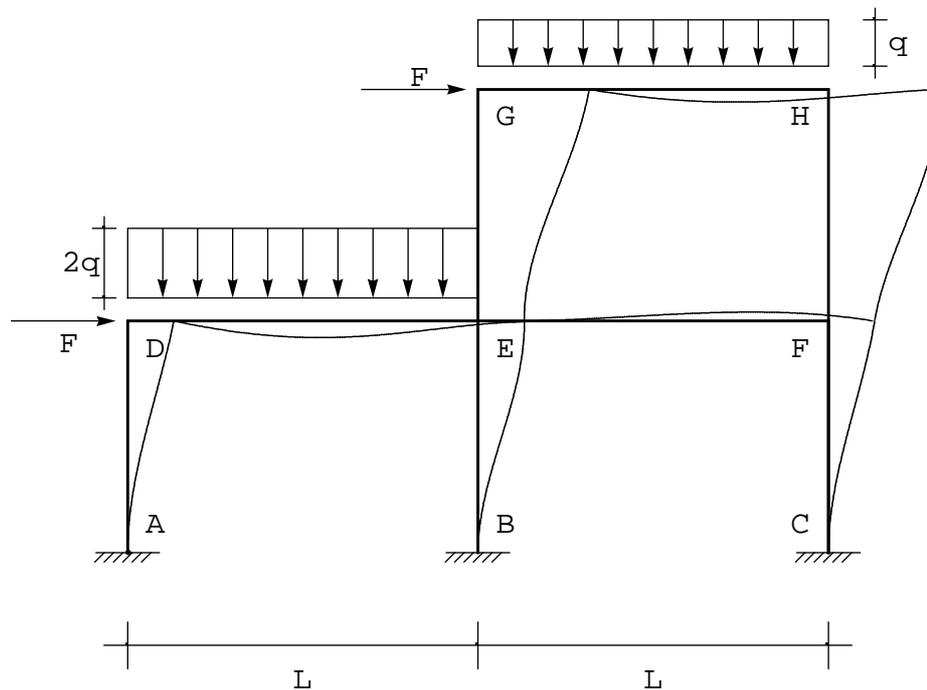


Figura 15 - Gli spostamenti per il telaio a due piani di Figura 14

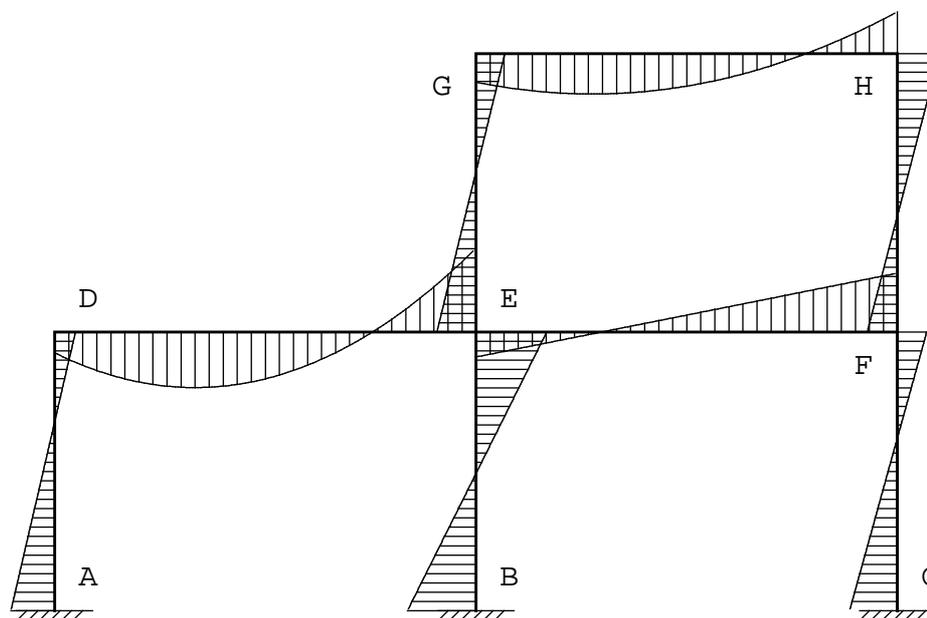


Figura 16 - I momenti flettenti per il telaio a due piani di Figura 14

Per la particolare geometria, e per i particolari carichi, di Figura, si ha uno spostamento orizzontale pari a:

$$\Delta w_1 = \frac{59\,187\,553}{1\,494\,152\,064} \frac{qH^4}{EI} \approx 0.0396 \frac{qH^4}{EI} \quad (157)$$

per i nodi del primo piano, e :

$$\Delta w_2 = \frac{35\,529\,301}{373\,538\,016} \frac{qH^4}{EI} \approx 0.0951 \frac{qH^4}{EI} \quad (158)$$

per quelli del secondo piano.

Il diagramma dei momenti e' riportato in Figura 16

Esempio n . 5

Si consideri il semplice telaio di Figura 17, gia' studiato in precedenza attraverso la scrittura diretta delle equazioni di congruenza.

Si definiscono le linee elastiche $v_1(x_3)$ e $w_1(x_3)$, relativamente al ritto AB, $v_2(x_3)$ e $w_2(x_3)$ relativamente al tratto BC, e $v_3(x_3)$ e $w_3(x_3)$ relativamente al tratto CD scegliendo le origini in A, B e C, rispettivamente, e col solito sistema di assi locali

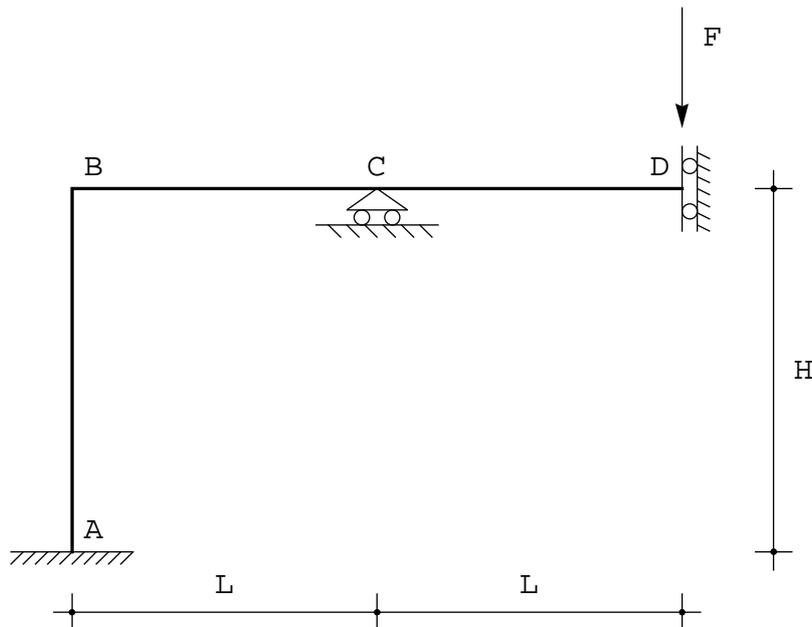


Figura 17 - Un semplice telaio zoppo

Si potra' scrivere, ipotizzando che le sezioni del ritto e del traverso siano costanti:

$$\begin{aligned} EI v_1''''(x_3) &= 0 \\ EA w_1''(x_3) &= 0 \\ EI v_2''''(x_3) &= 0 \\ EA w_2''(x_3) &= 0 \\ EI v_3''''(x_3) &= 0 \\ EA w_3''(x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (159)$$

e quindi si ha :

$$\begin{aligned} v_1(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\ w_1(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 \end{aligned}$$

$$v_2(x_3) = c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3$$

$$w_2(x_3) = d_0 + d_1 x_3$$

$$v_3(x_3) = e_0 + e_1 x_3 + e_2 x_3^2 + e_3 x_3^3$$

$$w_3(x_3) = f_0 + f_1 x_3$$

Si sono quindi introdotte 18 costanti di integrazione, che dovranno essere definite attraverso l'imposizione di opportune condizioni ai limiti. Nella fattispecie, si avra':

- in A l'incastro detta l'annullarsi di spostamento assiale, spostamento trasversale, e rotazione, ossia le tre equazioni di congruenza:

$$\begin{aligned} w_1(H) &= 0 \\ v_1(H) &= 0 \\ v_1'(H) &= 0 \end{aligned} \quad (161)$$

- in B si deve imporre la congruenza degli spostamenti, e l'equilibrio del nodo. Per la congruenza, si potranno imporre le tre condizioni:

$$\begin{aligned} w_1(0) &= v_2(0) \\ v_1(0) &= -w_2(0) \\ v_1'(0) &= v_2'(0) \end{aligned} \quad (162)$$

La prima impone che lo spostamento assiale del traverso sia pari allo spostamento trasversale del ritto, mentre la seconda impone che lo spostamento trasversale del traverso sia pari allo spostamento assiale del ritto. L'ultima condizione impone l'uguaglianza delle rotazioni

Le condizioni di equilibrio del nodo in B dettano:

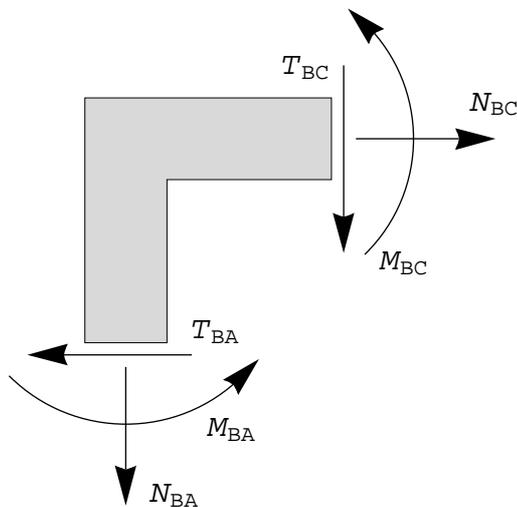


Figura 18 - Il concio in B e le forze su di esso agenti

$$\begin{aligned} N_{BA} + T_{BC} &= 0 \\ -T_{BA} + N_{BC} &= 0 \\ M_{BA} + M_{BC} &= 0 \end{aligned} \quad (163)$$

ossia, in termini di spostamenti e successive derivate :

$$\begin{aligned} EA w_1'(L) - EI v_2'''(0) &= 0 \\ EI v_1'''(L) + EA w_2'(0) &= 0 \\ -EI v_1'(L) - EI v_2'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (164)$$

- in C la presenza dell'appoggio introduce una discontinuita' nel diagramma del taglio, mentre gli spostamenti

trasversali si annullano:

$$\begin{aligned}
 v_2(L) &= 0 \\
 v_3(0) &= 0 \\
 w_2(L) &= w_3(0) \\
 v_2'(L) &= v_3'(0) \\
 -EIv_2'''(L) &= -EIv_3'''(0) \\
 EAw_2'(L) &= EAw_3'(0)
 \end{aligned} \tag{165}$$

- in D, infine, il bipendolo impone che siano nulle le rotazioni e gli spostamenti orizzontali, mentre lo spostamento trasversale e' libero. L'equilibrio del concio impone infine l'uguaglianza tra il taglio e la forza applicata:

$$\begin{aligned}
 w_3(L) &= 0 \\
 v_3'(L) &= 0 \\
 -EIv_3''''(L) &= F
 \end{aligned} \tag{166}$$

■ La soluzione del sistema di equazioni

Le diciotto equazioni ai limiti si scrivono, utilizzando le (160):

$$\begin{aligned}
 a_0 + H a_1 + H^2 a_2 + H^3 a_3 &= 0 \\
 a_1 + 2 H a_2 + 3 H^2 a_3 &= 0 \\
 b_0 + H b_1 &= 0 \\
 b_0 &= c_0 \\
 a_0 &= -d_0 \\
 a_1 &= c_1 \\
 EA b_1 - 6 EI c_3 &= 0 \\
 6 EI a_3 + EA d_1 &= 0 \\
 -EI (2 a_2) - 2 EI c_2 &= 0 \\
 c_0 + c_1 L + c_2 L^2 + c_3 L^3 &= 0 \\
 e_0 &= 0 \\
 d_0 + d_1 L &= f_0 \\
 c_1 + 2 c_2 L + 3 c_3 L^2 &= e_1 \\
 2 c_2 + 6 c_3 L &= 2 e_2 \\
 d_1 &= f_1 \\
 f_0 + f_1 L &= 0 \\
 e_1 + 2 e_2 L + 3 e_3 L^2 &= 0 \\
 -6 EI e_3 &= F
 \end{aligned} \tag{167}$$

con soluzione :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{-6 EI F L^3 + EA F L^5}{72 EI^2 + 51 EA EI L^2 + 3 EA^2 L^4} \\
 a_1 &= -\frac{F L^2 (-144 EI^2 + 18 EA EI L^2 + EA^2 L^4)}{36 EI (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} \\
 a_2 &= \frac{-36 EI^2 F L + EA^2 F L^5}{18 EI (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_3 &= - \frac{EA L^2 (-6 EI F + EA F L^2)}{36 EI (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} \\
 c_0 &= - \frac{F L^3 (12 EI + EA L^2)}{48 EI^2 + 34 EA EI L^2 + 2 EA^2 L^4} \\
 c_1 &= - \frac{F L^2 (-144 EI^2 + 18 EA EI L^2 + EA^2 L^4)}{36 EI (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} \\
 c_2 &= \frac{36 EI^2 F L - EA^2 F L^5}{432 EI^3 + 306 EA EI^2 L^2 + 18 EA^2 EI L^4} \\
 c_3 &= \frac{EA F L^2 (12 EI + EA L^2)}{12 EI (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} \\
 e_0 &= 0 \\
 e_1 &= \frac{F L^2 (144 EI^2 + 45 EA EI L^2 + 2 EA^2 L^4)}{18 EI (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} \\
 e_2 &= \frac{F L (72 EI^2 + 108 EA EI L^2 + 7 EA^2 L^4)}{36 EI (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} \\
 e_3 &= - \frac{F}{6 EI} \\
 b_0 &= - \frac{F L^3 (12 EI + EA L^2)}{48 EI^2 + 34 EA EI L^2 + 2 EA^2 L^4} \\
 b_1 &= \frac{F L^2 (12 EI + EA L^2)}{48 EI^2 + 34 EA EI L^2 + 2 EA^2 L^4} \\
 d_0 &= \frac{F L^3 (6 EI - EA L^2)}{72 EI^2 + 51 EA EI L^2 + 3 EA^2 L^4} \\
 d_1 &= \frac{L^2 (-6 EI F + EA F L^2)}{6 (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} \\
 f_0 &= - \frac{F L^3 (-6 EI + EA L^2)}{6 (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} \\
 f_1 &= \frac{L^2 (-6 EI F + EA F L^2)}{6 (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)}
 \end{aligned}$$

Ne segue l'espressione degli spostamenti trasversali sul ritto:

$$\begin{aligned}
v_1(x_3) = & \frac{-6 EI FL^3 + EA FL^5}{72 EI^2 + 51 EA EI L^2 + 3 EA^2 L^4} - \\
& \frac{FL^2 (-144 EI^2 + 18 EA EI L^2 + EA^2 L^4)}{36 EI (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} x_3 + \\
& \frac{-36 EI^2 FL + EA^2 FL^5}{18 EI (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} x_3^2 - \\
& \frac{EA L^2 (-6 EI F + EA FL^2)}{36 EI (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} x_3^3
\end{aligned} \tag{169}$$

e sul trasverso :

$$\begin{aligned}
v_2(x_3) = & - \frac{FL^3 (12 EI + EA L^2)}{48 EI^2 + 34 EA EI L^2 + 2 EA^2 L^4} - \\
& \frac{FL^2 (-144 EI^2 + 18 EA EI L^2 + EA^2 L^4)}{36 EI (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} x_3 + \\
& \frac{36 EI^2 FL - EA^2 FL^5}{432 EI^3 + 306 EA EI^2 L^2 + 18 EA^2 EI L^4} x_3^2 + \\
& \frac{EA FL^2 (12 EI + EA L^2)}{12 EI (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} x_3^3
\end{aligned} \tag{170}$$

$$\begin{aligned}
v_3(x_3) = & \frac{FL^2 (144 EI^2 + 45 EA EI L^2 + 2 EA^2 L^4)}{18 EI (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} x_3 + \\
& \frac{FL (72 EI^2 + 108 EA EI L^2 + 7 EA^2 L^4)}{36 EI (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} x_3^2 - \frac{F}{6 EI} x_3^3
\end{aligned} \tag{171}$$

Gli spostamenti assiali sono invece forniti da :

$$\begin{aligned}
w_1(x_3) = & \\
& - \frac{FL^3 (12 EI + EA L^2)}{48 EI^2 + 34 EA EI L^2 + 2 EA^2 L^4} + \frac{FL^2 (12 EI + EA L^2)}{48 EI^2 + 34 EA EI L^2 + 2 EA^2 L^4} x_3
\end{aligned} \tag{172}$$

$$\begin{aligned}
w_2(x_3) = & \frac{FL^3 (6 EI - EA L^2)}{72 EI^2 + 51 EA EI L^2 + 3 EA^2 L^4} + \\
& \frac{L^2 (-6 EI F + EA FL^2)}{6 (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} x_3
\end{aligned} \tag{173}$$

$$\begin{aligned}
w_3(x_3) = & - \frac{FL^3 (-6 EI + EA L^2)}{6 (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} + \\
& \frac{L^2 (-6 EI F + EA FL^2)}{6 (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} x_3
\end{aligned} \tag{174}$$

Le caratteristiche della sollecitazione interna si ottengono invece tramite derivazione successiva :

$$N_1(x_3) = \frac{EA F L^2 (12 EI + EA L^2)}{48 EI^2 + 34 EA EI L^2 + 2 EA^2 L^4} \quad (175)$$

$$N_2(x_3) = \frac{EA L^2 (-6 EI F + EA F L^2)}{6 (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} \quad (176)$$

$$N_3(x_3) = \frac{EA L^2 (-6 EI F + EA F L^2)}{6 (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)}$$

$$M_1(x_3) = -\frac{FL (-6 EI + EA L^2) (12 EI + 2 EA L^2 - 3 EA L x_3)}{18 (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} \quad (177)$$

$$M_2(x_3) = \frac{FL (-72 EI^2 + 2 EA^2 L^4 - 9 EA L (12 EI + EA L^2) x_3)}{18 (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} \quad (178)$$

$$M_3(x_3) = -\frac{1}{18} F \left(\frac{72 EI^2 L + 108 EA EI L^3 + 7 EA^2 L^5}{24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4} - 18 x_3 \right)$$

$$T_1(x_3) = \frac{EA L^2 (-6 EI F + EA F L^2)}{6 (24 EI^2 + 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4)} \quad (179)$$

$$T_2(x_3) = -\frac{EA F L^2 (12 EI + EA L^2)}{48 EI^2 + 34 EA EI L^2 + 2 EA^2 L^4} \quad (180)$$

$$T_3(x_3) = F$$

Se si vogliono trascurare le deformazioni assiali, occorre far tendere la rigidità assiale EA ad infinito, ottenendo:

$$v_1(x_3) = -\frac{F (L - x_3)^2 x_3}{36 EI} \quad (181)$$

$$v_2(x_3) = \frac{F x_3 (-L^2 - 2 L x_3 + 3 x_3^2)}{36 EI}$$

$$v_3(x_3) = \frac{F x_3 (4 L^2 + 7 L x_3 - 6 x_3^2)}{36 EI}$$

$$N_1(x_3) = \frac{F}{2} \quad (182)$$

$$N_2(x_3) = \frac{F}{6}$$

$$N_3(x_3) = \frac{F}{6}$$

$$M_1(x_3) = -\frac{FL}{9} + \frac{F x_3}{6} \quad (183)$$

$$M_2(x_3) = \frac{1}{18} F (2 L - 9 x_3) \quad (184)$$

$$M_3(x_3) = -\frac{7 FL}{18} + F x_3$$

$$T_1(x_3) = \frac{F}{6} \quad (185)$$

$$T_2(x_3) = -\frac{F}{2} \quad (186)$$

$$T_3(x_3) = F$$

In Figura 19 e' riportato il diagramma degli spostamenti trasversali, mentre il diagramma dei momenti e' identico a quello ottenuto in precedenza.

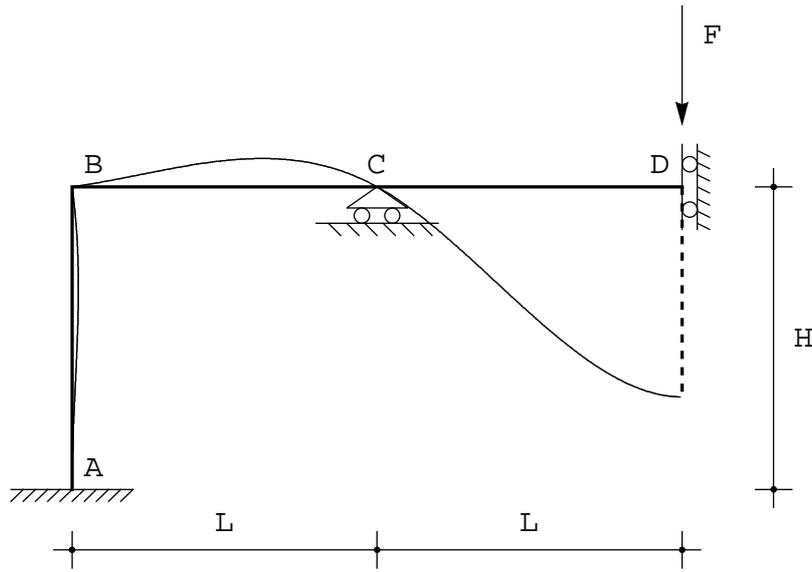


Figura 19 - Gli spostamenti per il telaio di Figura 17

■ I valori notevoli

L'abbassamento al di sotto della forza vale:

$$v_D = \frac{F L^3}{36 EI} \frac{216 EI^2 - 96 EA EI L^2 + 5 EA^2 L^4}{24 EI^2 - 17 EA EI L^2 + EA^2 L^4} \quad (187)$$

o, al limite per EA che va ad infinito :

$$v_D = \frac{5 F L^3}{36 EI} \quad (188)$$

Esempio n . 6

Si consideri il semplice telaio di Figura 20, già studiato in precedenza attraverso la scrittura diretta delle equazioni di congruenza con il metodo midto

Si definiscono le linee elastiche $v_1(x_3)$ e $w_1(x_3)$, relativamente al ritto AB, e $v_2(x_3)$ e $w_2(x_3)$ relativamente al tratto BC, rispettivamente, e col solito sistema di assi locali

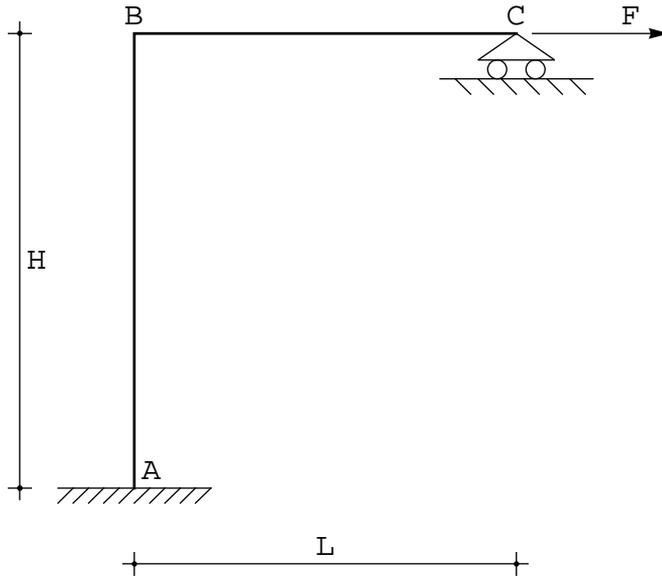


Figura 20 - Un semplice telaio zoppo

Si potrà scrivere, ipotizzando che le sezioni del ritto e del traverso siano costanti:

$$\begin{aligned}
 EI v_1'''' (x_3) &= 0 \\
 EA w_1'' (x_3) &= 0 \\
 EI v_2'''' (x_3) &= 0 \\
 EA w_2'' (x_3) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{189}$$

e quindi si ha :

$$\begin{aligned}
 v_1 (x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\
 w_1 (x_3) &= b_0 + b_1 x_3 \\
 v_2 (x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\
 w_2 (x_3) &= d_0 + d_1 x_3
 \end{aligned}
 \tag{190}$$

Si sono quindi introdotte 12 costanti di integrazione, che dovranno essere definite attraverso l'imposizione di opportune condizioni ai limiti. Nella fattispecie, si avrà:

- in A l'incastro detta l'annullarsi di spostamento assiale, spostamento trasversale, e rotazione, ossia le tre equazioni di congruenza:

$$\begin{aligned}
 w_1 (H) &= 0 \\
 v_1 (H) &= 0 \\
 v_1' (H) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{191}$$

- in B si deve imporre la congruenza degli spostamenti, e l'equilibrio del nodo. Per la congruenza, si potranno imporre le tre condizioni:

$$\begin{aligned}
 w_1 (0) &= v_2 (0) \\
 v_1 (0) &= -w_2 (0) \\
 v_1' (0) &= v_2' (0)
 \end{aligned}
 \tag{192}$$

La prima impone che lo spostamento assiale del traverso sia pari allo spostamento trasversale del ritto, mentre la seconda impone che lo spostamento trasversale del traverso sia pari allo spostamento assiale del ritto. L'ultima condizione impone l'uguaglianza delle rotazioni

Le condizioni di equilibrio del nodo in B dettano:

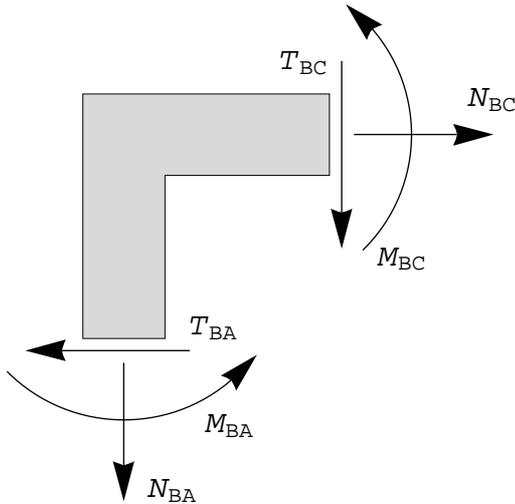


Figura 21 - Il concio in B e le forze su di esso agenti

$$\begin{aligned} N_{BA} + T_{BC} &= 0 \\ -T_{BA} + N_{BC} &= 0 \\ M_{BA} + M_{BC} &= 0 \end{aligned} \quad (193)$$

ossia, in termini di spostamenti e successive derivate :

$$\begin{aligned} EA w_1'(L) - EI v_2''''(0) &= 0 \\ EI v_1''''(L) + EA w_2'(0) &= 0 \\ -EI v_1''(L) - EI v_2''(0) &= 0 \end{aligned} \quad (194)$$

- in C la presenza dell'appoggio impone che lo spostamento trasversale sia nullo, di conseguenza sarà nullo il momento flettente, mentre lo sforzo normale dovrà essere pari alla forza applicata F:

$$\begin{aligned} v_2(L) &= 0 \\ EA w_2'(L) &= F \\ -EI v_2''(L) &= 0 \end{aligned} \quad (195)$$

■ La soluzione del sistema di equazioni

Le dodici equazioni ai limiti si scrivono, utilizzando le (190):

$$\begin{aligned} a_0 + H a_1 + H^2 a_2 + H^3 a_3 &= 0 \\ a_1 + 2 H a_2 + 3 H^2 a_3 &= 0 \\ b_0 + H b_1 &= 0 \\ b_0 &= c_0 \\ a_0 &= -d_0 \\ a_1 &= c_1 \\ EA b_1 - 6 EI c_3 &= 0 \\ 6 EI a_3 + EA d_1 &= 0 \\ -EI (2 a_2) - 2 EI c_2 &= 0 \\ c_0 + c_1 L + c_2 L^2 + c_3 L^3 &= 0 \\ EA d_1 &= F \\ 2 c_2 + 6 c_3 L &= 0 \end{aligned} \quad (196)$$

con soluzione :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= - \frac{F H^3 (12 EI H + EA L^2 (3 H + 4 L))}{12 EI (3 EI H + EA L^2 (3 H + L))} \\
 a_1 &= \frac{F H^2 (3 EI H + EA L^3)}{2 EI (3 EI H + EA L^2 (3 H + L))} \\
 a_2 &= \frac{3 EA F H^2 L^2}{4 EI (3 EI H + EA L^2 (3 H + L))} \\
 a_3 &= - \frac{F}{6 EI} \\
 c_0 &= - \frac{3 F H^3 L}{6 EI H + 2 EA L^2 (3 H + L)} \\
 c_1 &= \frac{F H^2 (3 EI H + EA L^3)}{2 EI (3 EI H + EA L^2 (3 H + L))} \\
 c_2 &= - \frac{3 EA F H^2 L^2}{4 EI (3 EI H + EA L^2 (3 H + L))} \\
 c_3 &= \frac{EA F H^2 L}{4 EI (3 EI H + EA L^2 (3 H + L))} \\
 b_0 &= - \frac{3 F H^3 L}{6 EI H + 2 EA L^2 (3 H + L)} \\
 b_1 &= \frac{3 F H^2 L}{6 EI H + 2 EA L^2 (3 H + L)} \\
 d_0 &= \frac{F H^3 (12 EI H + EA L^2 (3 H + 4 L))}{12 EI (3 EI H + EA L^2 (3 H + L))} \\
 d_1 &= \frac{F}{EA}
 \end{aligned} \tag{197}$$

Ne segue l'espressione degli spostamenti trasversali sul ritto:

$$\begin{aligned}
 v_1(x_3) &= - \frac{F H^3 (12 EI H + EA L^2 (3 H + 4 L))}{12 EI (3 EI H + EA L^2 (3 H + L))} + \\
 &\quad \frac{F H^2 (3 EI H + EA L^3)}{2 EI (3 EI H + EA L^2 (3 H + L))} x_3 + \\
 &\quad \frac{3 EA F H^2 L^2}{4 EI (3 EI H + EA L^2 (3 H + L))} x_3^2 - \frac{F}{6 EI} x_3^3
 \end{aligned} \tag{198}$$

e sul trasverso :

$$v_2(x_3) =$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{3 F H^3 L}{6 E I H + 2 E A L^2 (3 H + L)} + \frac{F H^2 (3 E I H + E A L^3)}{2 E I (3 E I H + E A L^2 (3 H + L))} x_3 - \\
& \frac{3 E A F H^2 L^2}{4 E I (3 E I H + E A L^2 (3 H + L))} x_3^2 + \\
& \frac{E A F H^2 L}{4 E I (3 E I H + E A L^2 (3 H + L))} x_3^3
\end{aligned}$$

Gli spostamenti assiali sono invece forniti da :

$$w_1(x_3) = - \frac{3 F H^3 L}{6 E I H + 2 E A L^2 (3 H + L)} + \frac{3 F H^2 L}{6 E I H + 2 E A L^2 (3 H + L)} x_3 \quad (200)$$

$$w_2(x_3) = \frac{F H^3 (12 E I H + E A L^2 (3 H + 4 L))}{12 E I (3 E I H + E A L^2 (3 H + L))} + \frac{F}{E A} x_3 \quad (201)$$

Le caratteristiche della sollecitazione interna si ottengono invece tramite derivazione successiva :

$$N_1(x_3) = \frac{3 E A F H^2 L}{6 E I H + 2 E A L^2 (3 H + L)} \quad (202)$$

$$N_2(x_3) = F \quad (203)$$

$$M_1(x_3) = F \left(- \frac{3 E A H^2 L^2}{6 E I H + 2 E A L^2 (3 H + L)} + x_3 \right) \quad (204)$$

$$M_2(x_3) = \frac{3 E A F H^2 L (L - x_3)}{6 E I H + 2 E A L^2 (3 H + L)} \quad (205)$$

$$T_1(x_3) = F \quad (206)$$

$$T_2(x_3) = - \frac{3 E A F H^2 L}{6 E I H + 2 E A L^2 (3 H + L)} \quad (207)$$

Se si vogliono trascurare le deformazioni assiali, occorre far tendere la rigidezza assiale EA ad infinito, ottenendo:

$$v_1(x_3) = - \frac{F (H - x_3)^2 (H (3 H + 4 L) + 2 (3 H + L) x_3)}{12 E I (3 H + L)} \quad (208)$$

$$v_2(x_3) = \frac{F H^2 (L - x_3) (2 L - x_3) x_3}{4 E I L (3 H + L)} \quad (209)$$

$$N_1(x_3) = \frac{3 F H^2}{6 H L + 2 L^2} \quad (210)$$

$$N_2(x_3) = F$$

$$M_1(x_3) = \frac{F (-3 H^2 + 2 (3 H + L) x_3)}{2 (3 H + L)} \quad (210)$$

$$M_2(x_3) = \frac{3 F H^2 (L - x_3)}{2 L (3 H + L)} \quad (211)$$

$$T_1(x_3) = F \quad (212)$$

$$T_2(x_3) = -\frac{3 F H^2}{6 H L + 2 L^2} \quad (213)$$

In Figura 22 e' riportato il diagramma degli spostamenti trasversali, mentre il diagramma dei momenti e' identico a quello ottenuto in precedenza, nella Esercitazione 18.

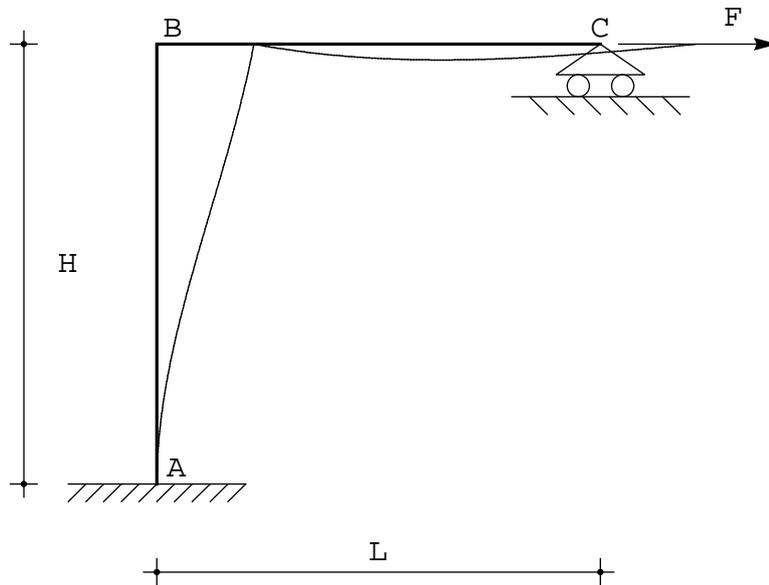


Figura 22 - Gli spostamenti per il telaio di Figura 20

■ I valori notevoli

Lo spostamento orizzontale del carrello e' pari a:

$$w_C = \frac{F L}{EA} + \frac{F H^3 (12 EI H + EA L^2 (3 H + 4 L))}{12 EI (3 EI H + EA L^2 (3 H + L))} \quad (214)$$

o, al limite per EA che va ad infinito :

$$w_C = \frac{F H^3 (3 H + 4 L)}{12 EI (3 H + L)} \quad (215)$$

e per $H = L$:

$$w_C = \frac{7}{48} \frac{F L^3}{EI} \quad (216)$$

Esempio n .7

Si vuole ora studiare il telaio di Figura 23, costituito da due travi collegate da un pendolo.

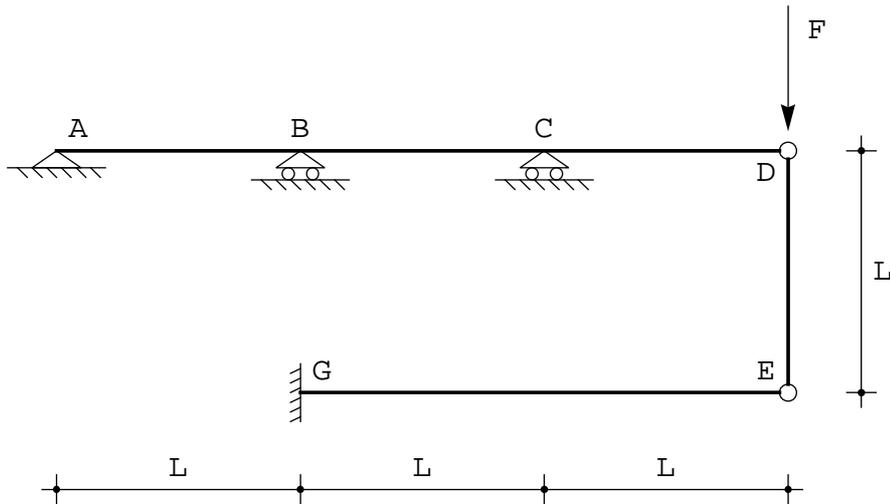


Figura 23 - Trave doppia

Si potrà scrivere, ipotizzando che le sezioni del ritto e del trasverso siano costanti:

$$\begin{aligned}
 EI v_1''''''(x_3) &= 0 \\
 EA w_1''''(x_3) &= 0 \\
 EI v_2''''''(x_3) &= 0 \\
 EA w_2''''(x_3) &= 0 \\
 EI v_3''''''(x_3) &= 0 \\
 EA w_3''''(x_3) &= 0 \\
 EI v_4''''''(x_3) &= 0 \\
 EA w_4''''(x_3) &= 0 \\
 EI v_5''''''(x_3) &= 0 \\
 EA w_5''''(x_3) &= 0
 \end{aligned} \tag{217}$$

e quindi si ha :

$$\begin{aligned}
 v_1(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\
 w_1(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 \\
 v_2(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\
 w_2(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 \\
 v_3(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 + e_2 x_3^2 + e_3 x_3^3 \\
 w_3(x_3) &= f_0 + f_1 x_3 \\
 v_4(x_3) &= g_0 + g_1 x_3 + g_2 x_3^2 + g_3 x_3^3 \\
 w_4(x_3) &= h_0 + h_1 x_3 \\
 v_5(x_3) &= m_0 + m_1 x_3 + m_2 x_3^2 + m_3 x_3^3 \\
 w_5(x_3) &= n_0 + n_1 x_3
 \end{aligned} \tag{218}$$

Si sono quindi introdotte 30 costanti di integrazione, che dovranno essere definite attraverso l'imposizione di opportune condizioni ai limiti. Nella fattispecie, si avrà:

- in A l'appoggio detta l'annullarsi di spostamento assiale e spostamento trasversale, mentre il momento sarà nullo:

$$\begin{aligned}
 w_1(0) &= 0 \\
 v_1(0) &= 0 \\
 v_1'(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{219}$$

- in B il carrello impedisce lo spostamento verticale, mentre si avra' continuita' di rotazioni e spostamenti assiali. Inoltre i tagli subiranno una variazione discontinua, mentre momenti e sforzi assiali dovranno essere continui:

$$\begin{aligned}
 w_1(L) &= w_2(0) \\
 v_1(L) &= 0 \\
 v_2(0) &= 0 \\
 v_1'(L) &= v_2'(0) \\
 v_1''(L) &= v_2''(0) \\
 w_1'(L) &= w_2'(0)
 \end{aligned}
 \tag{220}$$

- in C del tutto analogamente si ha:

$$\begin{aligned}
 w_2(L) &= w_3(0) \\
 v_2(L) &= 0 \\
 v_3(0) &= 0 \\
 v_2'(L) &= v_3'(0) \\
 v_2''(L) &= v_3''(0) \\
 w_2'(L) &= w_3'(0)
 \end{aligned}
 \tag{221}$$

- in D la congruenza impone che sia:

$$\begin{aligned}
 w_3(L) &= -v_4(0) \\
 v_3(L) &= w_4(0)
 \end{aligned}
 \tag{222}$$

mentre la presenza della cerniera impone:

$$\begin{aligned}
 M_{DC} &= 0 \rightarrow v_3''(L) = 0 \\
 M_{DE} &= 0 \rightarrow v_4''(0) = 0
 \end{aligned}
 \tag{223}$$

Infine, le condizioni di equilibrio alla traslazione del nodo impongono:

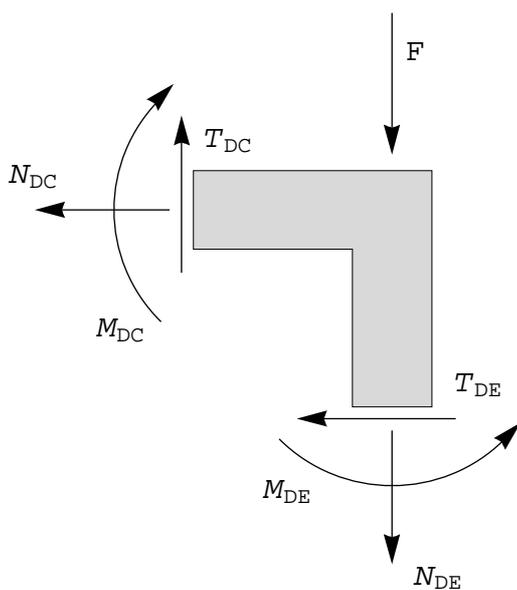


Figura 24 - Il concio in D e le forze su di esso agenti

$$\begin{aligned} -N_{DC} - T_{DE} &= 0 \\ -T_{DC} + N_{DE} + F &= 0 \end{aligned}$$

ossia, in termini di spostamenti e successive derivate :

$$\begin{aligned} -EA w_3'(L) + EI v_4''''(0) &= 0 \\ EI v_3''''(L) + EA w_4'(0) + F &= 0 \end{aligned} \quad (225)$$

- in E, analogamente:

$$\begin{aligned} w_4(L) &= v_5(2L) \\ v_4(L) &= -w_5(2L) \\ v_4''(L) &= 0 \\ v_5''(2L) &= 0 \\ -EA w_5'(2L) - EI v_4''''(L) &= 0 \\ EI v_5''''(2L) - EA w_4'(L) &= 0 \end{aligned} \quad (226)$$

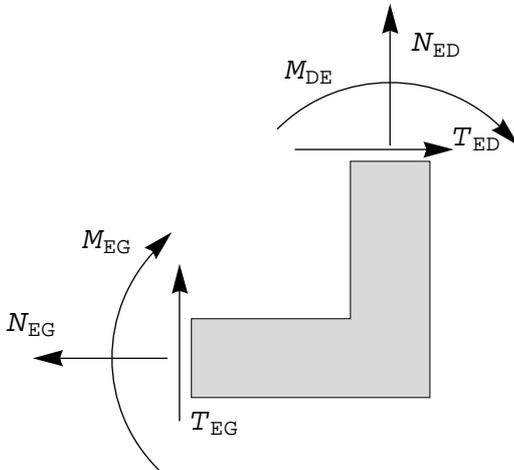


Figura 25 - Il concio in E e le forze su di esso agenti: l'equilibrio impone che sia $-N_{EG} + T_{ED} = 0$ e $-T_{EG} - N_{ED} = 0$

Infine, nell'incastro G :

$$\begin{aligned} w_5(0) &= 0 \\ v_5(0) &= 0 \\ v_5'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (227)$$

Le trenta equazioni si risolvono a fornire:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= \frac{3 EI F L^2 + 8 EA F L^4}{72 EI^2 + 237 EA EI L^2} \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= -\frac{3 EI F + 8 EA F L^2}{72 EI^2 + 237 EA EI L^2} \\ b_0 = b_1 &= 0 \\ c_0 &= 0 \\ c_1 &= -\frac{6 EI F L^2 + 16 EA F L^4}{72 EI^2 + 237 EA EI L^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{3 EI FL + 8 EA FL^3}{24 EI^2 + 79 EA EI L^2} \\
c_3 &= \frac{15 EI F + 40 EA FL^2}{72 EI^2 + 237 EA EI L^2} \\
d_0 &= d_1 = 0 \\
e_0 &= 0 \\
e_1 &= \frac{21 EI FL^2 + 56 EA FL^4}{72 EI^2 + 237 EA EI L^2} \\
e_2 &= \frac{4 FL (3 EI + 8 EA L^2)}{EI (24 EI + 79 EA L^2)} \\
e_3 &= -\frac{4 F (3 EI + 8 EA L^2)}{3 EI (24 EI + 79 EA L^2)} \\
f_0 &= f_1 = 0 \\
g_0 &= g_1 = g_2 = g_3 = 0 \\
h_0 &= \frac{5 FL^3 (3 EI + 8 EA L^2)}{EI (24 EI + 79 EA L^2)} \\
h_1 &= -\frac{15 FL^2}{24 EI + 79 EA L^2} \\
m_0 &= 0 \\
m_1 &= 0 \\
m_2 &= \frac{15 EA FL^3}{24 EI^2 + 79 EA EI L^2} \\
m_3 &= -\frac{5 EA FL^2}{48 EI^2 + 158 EA EI L^2} \\
n_0 &= n_1 = 0
\end{aligned}$$

Ne segue che gli spostamenti assiali sono diversi da zero solo sul pendolo, laddove sono nulli gli spostamenti trasversali. Le linee elastiche sono fornite da:

$$\begin{aligned}
v_1(x_3) &= \frac{F (3 EI + 8 EA L^2) x_3 (L^2 - x_3^2)}{3 EI (24 EI + 79 EA L^2)} \\
v_2(x_3) &= -\frac{F (3 EI + 8 EA L^2) x_3 (2 L^2 + 3 L x_3 - 5 x_3^2)}{3 EI (24 EI + 79 EA L^2)} \\
v_3(x_3) &= \frac{F (3 EI + 8 EA L^2) x_3 (7 L^2 + 12 L x_3 - 4 x_3^2)}{3 EI (24 EI + 79 EA L^2)} \\
v_5(x_3) &= \frac{5 EA FL^2 (6 L - x_3) x_3^2}{2 EI (24 EI + 79 EA L^2)} \\
w_4(x_3) &= \frac{5 FL^2 (3 EI L + 8 EA L^3 - 3 EI x_3)}{EI (24 EI + 79 EA L^2)}
\end{aligned} \tag{229}$$

e le caratteristiche della sollecitazione interna, per successive derivazioni, sono :

$$\begin{aligned}
 N_4(x_3) &= -\frac{15 EA F L^2}{24 EI + 79 EA L^2} \\
 M_1(x_3) &= \frac{2 F (3 EI + 8 EA L^2) x_3}{24 EI + 79 EA L^2} \\
 T_1(x_3) &= \frac{2 F (3 EI + 8 EA L^2)}{24 EI + 79 EA L^2} \\
 M_2(x_3) &= \frac{2 F (3 EI + 8 EA L^2) (L - 5 x_3)}{24 EI + 79 EA L^2} \\
 T_2(x_3) &= -\frac{10 F (3 EI + 8 EA L^2)}{24 EI + 79 EA L^2} \\
 M_3(x_3) &= -\frac{8 F (3 EI + 8 EA L^2) (L - x_3)}{24 EI + 79 EA L^2} \\
 T_3(x_3) &= \frac{8 F (3 EI + 8 EA L^2)}{24 EI + 79 EA L^2} \\
 M_5(x_3) &= \frac{15 EA F L^2 (-2 L + x_3)}{24 EI + 79 EA L^2} \\
 T_5(x_3) &= \frac{15 EA F L^2}{24 EI + 79 EA L^2}
 \end{aligned}$$

Se si vuol trascurare la deformabilita' assiale, non resta che far tendere EA all' infinito, ottenendo:

$$\begin{aligned}
 v_1(x_3) &= \frac{8 F x_3 (L^2 - x_3^2)}{237 EI} \\
 v_2(x_3) &= \frac{8 F x_3 (-2 L^2 - 3 L x_3 + 5 x_3^2)}{237 EI} \\
 v_3(x_3) &= \frac{8 F x_3 (7 L^2 + 12 L x_3 - 4 x_3^2)}{237 EI} \\
 v_5(x_3) &= \frac{5 F (6 L - x_3) x_3^2}{158 EI} \\
 w_4(x_3) &= \frac{40 F L^3}{79 EI}
 \end{aligned} \tag{231}$$

per quanto riguarda le linee elastiche, e :

$$\begin{aligned}
 N_4(x_3) &= -\frac{15 F}{79} \\
 M_1(x_3) &= \frac{16 F x_3}{79} \\
 T_1(x_3) &= \frac{16 F}{79} \\
 M_2(x_3) &= \frac{16}{79} F (L - 5 x_3)
 \end{aligned}$$

$$T_2(x_3) = -\frac{80 F}{79}$$

$$M_3(x_3) = -\frac{64}{79} F (L - x_3)$$

$$T_3(x_3) = \frac{64}{79} F$$

$$M_5(x_3) = -\frac{15}{79} F (2L - x_3)$$

$$T_5(x_3) = \frac{15 F}{79}$$

Il diagramma degli spostamenti e' riportato in Figura 26 :

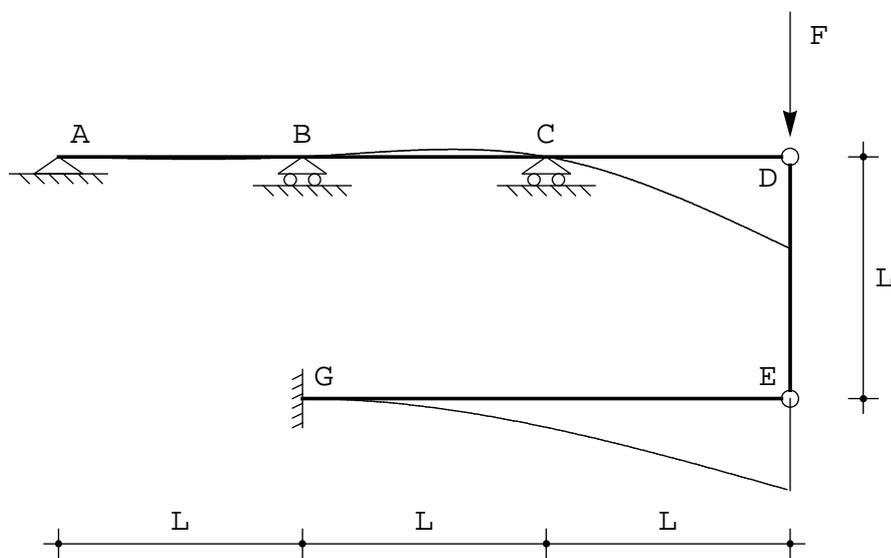


Figura 26 - Gli spostamenti per il telaio di Figura 23

■ Programma

Figure