

25 - La linea elastica e le strutture a telaio isostatiche

■ [A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 4 maggio 2013]

Esempio n .1

Si consideri il semplice telaio di Figura 1, costituito da un traverso di luce $2L$, interrotto da una cerniera in mezzeria, ed un ritto di altezza H . A sinistra il telaio e' vincolato con un bipendolo, al piede si ha una cerniera, sicche' la struttura risulta manifestamente isostatica. Il carico e' definito da una coppia di valore \mathcal{M} agente nel nodo di destra C, e da una variazione termica assiale di valore ΔT agente sul ritto.

Si vuole affrontare la soluzione in due fasi successive: in un primo momento si determinano le caratteristiche della sollecitazione interna, ossia momenti, tagli e sforzi normali, applicando le equazioni differenziali di equilibrio. In un secondo momento si deducono gli spostamenti assiali e trasversali, attraverso la soluzione delle equazioni di congruenza e costitutive. Si ricorda che la possibilita' di suddividere in tal modo il calcolo e' dovuta all'isostaticita' della struttura.

■ Prima fase : il calcolo delle c.s.i.

Si identificano tre sistemi di riferimento, con origine in A,B e C, e col sistema di assi locali definito in Figura 2. In assenza di carichi distribuiti sara':

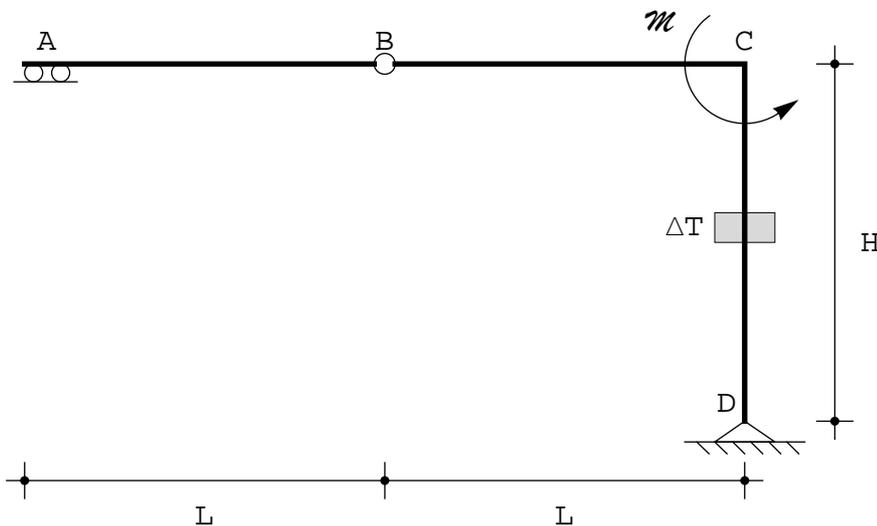


Figura 1 - Un semplice telaio zoppo

$$\begin{aligned} M^{(AB)}(x_3) &= a x_3 + b \\ M^{(BC)}(x_3) &= c x_3 + d \\ M^{(CD)}(x_3) &= e x_3 + f \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 N^{(AB)}(x_3) &= n_1 \\
 N^{(BC)}(x_3) &= n_2 \\
 N^{(CD)}(x_3) &= n_3
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Le condizioni (di equilibrio) che permettono il calcolo delle costanti di integrazione sono:

$$\begin{aligned}
 M^{(AB)}(x_3 = L) &= 0 \\
 T^{(AB)}(x_3 = L) &= T^{(BC)}(x_3 = 0) \\
 M^{(BC)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 -M^{(BC)}(x_3 = L) + M^{(CD)}(x_3 = 0) + \mathcal{M} & \\
 M^{(CD)}(x_3 = L) &= 0 \\
 N^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 N^{(AB)}(x_3 = L) &= N^{(BC)}(x_3 = 0) \\
 N^{(BC)}(x_3 = L) + T^{(CD)}(x_3 = 0) & \\
 -T^{(BC)}(x_3 = L) + N^{(CD)}(x_3 = 0) &
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

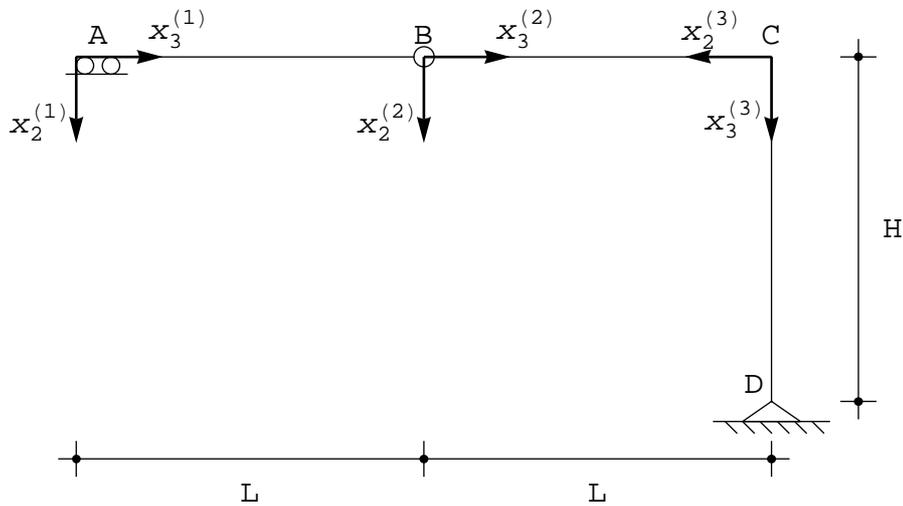


Figura 2 - I tre sistemi di riferimento per i tre tratti AB, BC e CD

Il sistema di nove equazioni:

$$\begin{aligned}
 aL + b &= 0 \\
 a &= c \\
 d &= 0 \\
 -(cL + d) + f + \mathcal{M} &= 0 \\
 eH + f &= 0 \\
 n_1 &= 0 \\
 n_1 &= n_2 \\
 n_2 + e &= 0 \\
 -c + n_3 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

si puo' risolvere come :

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\mathcal{M}}{L} \\
 b &= -\mathcal{M} \\
 c &= \frac{\mathcal{M}}{L}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}d &= e = f = 0 \\n_1 &= n_2 = 0 \\n_3 &= \frac{\mathcal{M}}{L}\end{aligned}$$

e quindi le c.s.i. sono fornite da :

$$\begin{aligned}M^{(AB)}(x_3) &= -\mathcal{M} \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \\M^{(BC)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{L} x_3 \\M^{(CD)}(x_3) &= 0\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}T^{(AB)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{L} \\T^{(BC)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{L} \\T^{(CD)}(x_3) &= 0\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}N^{(AB)}(x_3) &= 0 \\N^{(BC)}(x_3) &= 0 \\N^{(CD)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{L}\end{aligned}\tag{8}$$

■ Seconda fase : il calcolo degli spostamenti

Le equazioni da utilizzare sono ora quelle che legano gli spostamenti alle caratteristiche, o più precisamente, le curvature ai momenti e gli allungamenti percentuali agli sforzi normali:

$$\begin{aligned}v''(x_3) &= -\frac{M}{EI} \\w'(x_3) &= \frac{N}{EA} - \lambda = \frac{N}{EA} + \alpha\Delta T\end{aligned}\tag{9}$$

Sarà quindi, nei tre tratti AB, BC e CD:

$$\begin{aligned}v''^{(AB)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{EI} \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \\v''^{(BC)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{x_3}{L} \\v''^{(CD)}(x_3) &= 0\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}w'^{(AB)}(x_3) &= 0 \\w'^{(BC)}(x_3) &= 0 \\w'^{(CD)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{EAL} + \alpha\Delta T\end{aligned}\tag{11}$$

ed integrando opportunamente

$$v^{(AB)}(x_3) = \frac{\mathcal{M}}{EI} \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{x_3^3}{6L} \right) + a x_3 + b$$

$$v^{(BC)}(x_3) = -\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{x_3^3}{6L} + c x_3 + d$$

$$v^{(CD)}(x_3) = e x_3 + f$$

$$w^{(AB)}(x_3) = s_1$$

$$w^{(BC)}(x_3) = s_2$$

$$w^{(CD)}(x_3) = \frac{\mathcal{M}}{EAL} x_3 + \alpha \Delta T x_3 + s_3$$

Questa volta le condizioni ai limiti dovranno imporre la congruenza degli spostamenti, e sarà :

$$\begin{aligned} v^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0 \\ \phi^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0 \\ v^{(AB)}(x_3 = L) &= v^{(BC)}(x_3 = 0) \\ w^{(AB)}(x_3 = L) &= w^{(BC)}(x_3 = 0) \\ v^{(BC)}(x_3 = L) &= w^{(CD)}(x_3 = 0) \\ w^{(BC)}(x_3 = L) &= -v^{(CD)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(BC)}(x_3 = L) &= \phi^{(CD)}(x_3 = 0) \\ v^{(CD)}(x_3 = L) &= 0 \\ w^{(CD)}(x_3 = L) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

ossia :

$$\begin{aligned} b &= 0 \\ a &= 0 \\ \frac{\mathcal{M}}{3EI} L^2 + aL + b &= d \\ s_1 &= s_2 \\ -\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{L^3}{6L} + cL + d &= s_3 \\ s_2 &= -f \\ \frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{L}{2} - c &= -e \\ eL + f &= 0 \\ \frac{\mathcal{M}}{EA} + \alpha \Delta T L + s_3 &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

con soluzione :

$$\begin{aligned} b &= 0 \\ a &= 0 \\ d &= \frac{\mathcal{M}}{3EI} L^2 \\ c &= -\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{L}{6} - \frac{\mathcal{M}}{EAL} - \alpha \Delta T \\ e &= -\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{2L}{3} - \frac{\mathcal{M}}{EAL} - \alpha \Delta T \end{aligned}$$

$$f = \frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{2L^2}{3} + \frac{\mathcal{M}}{EA} + \alpha \Delta T L$$

$$s_1 = -\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{2L^2}{3} - \frac{\mathcal{M}}{EA} - \alpha \Delta T L$$

$$s_2 = -\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{2L^2}{3} - \frac{\mathcal{M}}{EA} - \alpha \Delta T L$$

$$s_3 = -\frac{\mathcal{M}}{EA} - \alpha \Delta T L$$

Le linee elastiche sono quindi :

$$\begin{aligned} v^{(AB)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{EI} \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{x_3^3}{6L} \right) \\ v^{(BC)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{x_3^3}{6L} - \frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{L}{6} x_3 + \frac{\mathcal{M}}{3EI} L^2 - \frac{\mathcal{M}}{EAL} x_3 - \alpha \Delta T x_3 \\ v^{(CD)}(x_3) &= \left(-\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{2L}{3} - \frac{\mathcal{M}}{EAL} - \alpha \Delta T \right) (x_3 - L) \\ w^{(AB)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{2L^2}{3} - \frac{\mathcal{M}}{EA} - \alpha \Delta T L \\ w^{(BC)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{2L^2}{3} - \frac{\mathcal{M}}{EA} - \alpha \Delta T L \\ w^{(CD)}(x_3) &= \alpha \Delta T (x_3 - L) - \frac{\mathcal{M}}{EA} \left(1 - \frac{x_3}{L} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Appare in evidenza l'influenza dei vari termini flessionali ed assiali. Se ad esempio si vuol trascurare, come usuale, la deformabilita' assiale delle aste, basta far crescere la rigidezza EA all'infinito, ottenendo le formule semplificate:

$$\begin{aligned} v^{(AB)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{EI} \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{x_3^3}{6L} \right) \\ v^{(BC)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{x_3^3}{6L} - \frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{L}{6} x_3 + \frac{\mathcal{M}}{3EI} L^2 - \alpha \Delta T x_3 \\ v^{(CD)}(x_3) &= \left(-\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{2L}{3} - \alpha \Delta T \right) (x_3 - L) \\ w^{(AB)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{2L^2}{3} - \alpha \Delta T L \\ w^{(BC)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{2L^2}{3} - \alpha \Delta T L \\ w^{(CD)}(x_3) &= \alpha \Delta T (x_3 - L) \end{aligned} \quad (17)$$

ed in assenza di variazioni termiche :

$$v^{(AB)}(x_3) = \frac{\mathcal{M}}{EI} \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{x_3^3}{6L} \right)$$

$$v^{(BC)}(x_3) = -\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{x_3^3}{6L} - \frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{L}{6} x_3 + \frac{\mathcal{M}}{3EI} L^2$$

$$v^{(CD)}(x_3) = -\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{2L}{3} (x_3 - L)$$

$$w^{(AB)}(x_3) = -\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{2L^2}{3}$$

$$w^{(BC)}(x_3) = -\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{2L^2}{3}$$

$$w^{(CD)}(x_3) = 0$$

Una possibile deformata e' riportata di seguito:

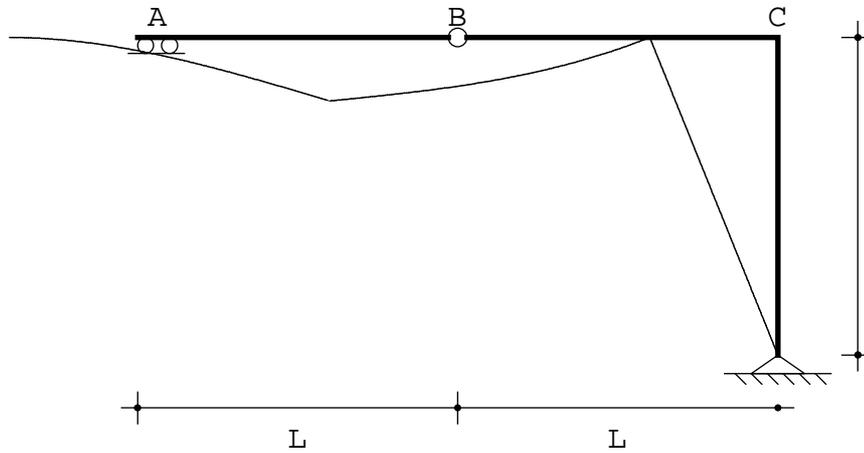


Figura 3 - La deformata per il telaio zoppo di Figura 1

Esempio n .2

Si consideri ora il telaio di Figura 4, costituito da una maglia triangolare chiusa a tre cerniere, vincolata con un appoggio a sinistra ed un carrello a destra, sollecitata da una forza P sul tratto inferiore. La struttura e' quindi palesemente isostatica, come puo' essere confermato da un veloce computo dei tratti di cui e' composta ($t = 3$) e del numero di incognite statiche presenti ($s = 9$).

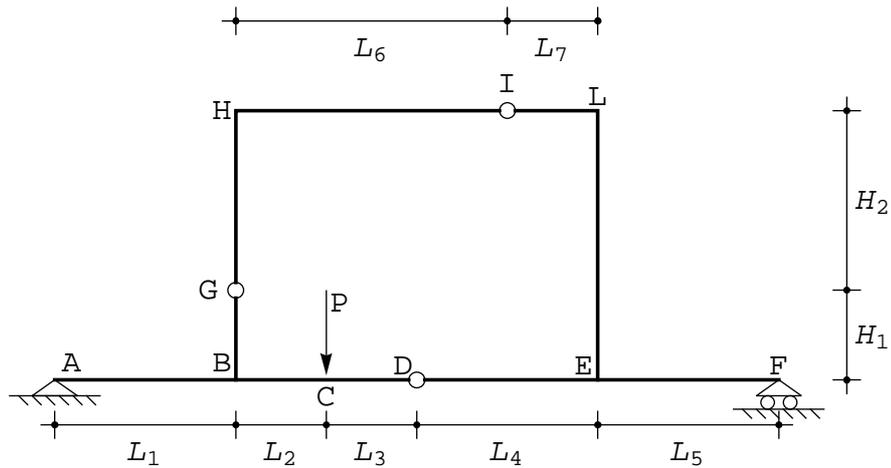


Figura 4 - Una maglia chiusa a tre cerniere

■ Prima fase : il calcolo delle c.s.i.

Si identificano i dieci sistemi di riferimento di Figura 5, che permettono di scrivere, in assenza di carichi distribuiti:

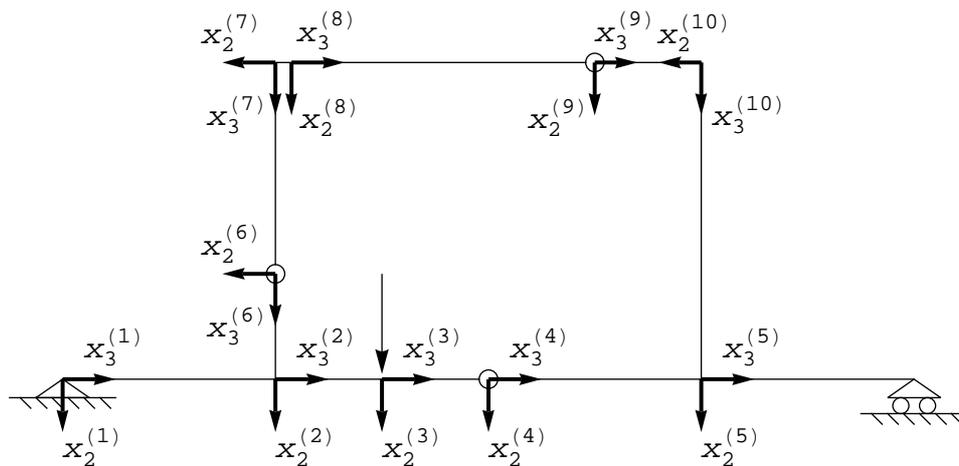


Figura 5 - La scelta dei sistemi di riferimento per la maglia chiusa di Figura 4

$$\begin{aligned}
 M^{(AB)}(x_3) &= t_1 x_3 + m_1 ; \\
 M^{(BC)}(x_3) &= t_2 x_3 + m_2 ; \quad M^{(CD)}(x_3) = t_3 x_3 + m_3 \\
 M^{(DE)}(x_3) &= t_4 x_3 + m_4 ; \\
 M^{(EF)}(x_3) &= t_5 x_3 + m_5 ; \quad M^{(GB)}(x_3) = t_6 x_3 + m_6 \\
 M^{(HG)}(x_3) &= t_7 x_3 + m_7 ; \\
 M^{(HI)}(x_3) &= t_8 x_3 + m_8 ; \quad M^{(IL)}(x_3) = t_9 x_3 + m_9 \\
 M^{(LE)}(x_3) &= t_{10} x_3 + m_{10}
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 N^{(AB)}(x_3) &= n_1 ; \quad N^{(BC)}(x_3) = n_2 ; \quad N^{(CD)}(x_3) = n_3 ; \\
 N^{(DE)}(x_3) &= n_4 ; \quad N^{(EF)}(x_3) = n_5 ; \\
 N^{(GB)}(x_3) &= n_6 ; \quad N^{(HG)}(x_3) = n_7 ; \quad N^{(HI)}(x_3) = n_8 ; \\
 N^{(IL)}(x_3) &= n_9 ; \quad N^{(LE)}(x_3) = n_{10} ;
 \end{aligned} \tag{20}$$

Le condizioni (di equilibrio) che permettono il calcolo delle costanti di integrazione sono:

in corrispondenza dell'appoggio in A :

$$M^{(AB)}(x_3 = 0) = 0 \quad (21)$$

in corrispondenza del nodo triplo B:

$$\begin{aligned} -N^{(AB)}(x_3 = L_1) + T^{(GB)}(x_3 = H_1) + N^{(BC)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -T^{(AB)}(x_3 = L_1) - N^{(GB)}(x_3 = H_1) + T^{(BC)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -M^{(AB)}(x_3 = L_1) - M^{(GB)}(x_3 = H_1) + M^{(BC)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

in corrispondenza della forza P:

$$\begin{aligned} -N^{(BC)}(x_3 = L_2) + N^{(CD)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -T^{(BC)}(x_3 = L_2) + T^{(CD)}(x_3 = 0) + P &= 0 \\ -M^{(BC)}(x_3 = L_2) + M^{(CD)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

in corrispondenza della cerniera D:

$$\begin{aligned} -N^{(CD)}(x_3 = L_3) + N^{(DE)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -T^{(CD)}(x_3 = L_3) + T^{(DE)}(x_3 = 0) &= 0 \\ M^{(CD)}(x_3 = L_3) &= 0 \\ M^{(DE)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

in corrispondenza del nodo triplo E:

$$\begin{aligned} -N^{(DE)}(x_3 = L_4) + T^{(LE)}(x_3 = H_1 + H_2) + N^{(EF)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -T^{(DE)}(x_3 = L_4) - N^{(LE)}(x_3 = H_1 + H_2) + T^{(EF)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -M^{(DE)}(x_3 = L_4) - M^{(LE)}(x_3 = H_1 + H_2) + M^{(EF)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

in corrispondenza del carrello in F:

$$\begin{aligned} M^{(EF)}(x_3 = L_5) &= 0 \\ N^{(EF)}(x_3 = L_5) &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

in corrispondenza della cerniera in G:

$$\begin{aligned} -N^{(HG)}(x_3 = H_2) + N^{(GB)}(x_3 = 0) &= 0 \\ T^{(HG)}(x_3 = H_2) - T^{(GB)}(x_3 = 0) &= 0 \\ M^{(HG)}(x_3 = H_2) &= 0 \\ M^{(GB)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

in corrispondenza del nodo H:

$$\begin{aligned} -T^{(HG)}(x_3 = 0) + N^{(HI)}(x_3 = 0) &= 0 \\ N^{(HG)}(x_3 = 0) + T^{(HI)}(x_3 = 0) &= 0 \\ M^{(HG)}(x_3 = 0) + M^{(HI)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

in corrispondenza della cerniera in I:

$$\begin{aligned} -N^{(HI)}(x_3 = L_6) + N^{(IL)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -T^{(HI)}(x_3 = L_6) + T^{(IL)}(x_3 = 0) &= 0 \\ M^{(HI)}(x_3 = L_6) &= 0 \\ M^{(IL)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

in corrispondenza del nodo L:

$$\begin{aligned}
 -N^{(IL)}(x_3 = L_7) - T^{(LE)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 -T^{(IL)}(x_3 = L_7) + N^{(LE)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 -M^{(IL)}(x_3 = L_7) + M^{(LE)}(x_3 = 0) &= 0
 \end{aligned}$$

Utilizzando le (19 - 20) si giunge ad un sistema di trenta equazioni, che può essere agevolmente risolto con l'ausilio di un qualsiasi programma di calcolo simbolico. Per semplicità di scrittura, da ora in poi si ipotizzano le seguenti relazioni geometriche:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= 2 L \\
 L_2 &= L \\
 L_3 &= L \\
 L_4 &= 2 L \\
 L_5 &= 2 L \\
 L_6 &= 3 L \\
 L_7 &= L \\
 H_1 &= L \\
 H_2 &= 2 L
 \end{aligned} \tag{31}$$

in modo da poter esprimere la soluzione in funzione del solo parametro. Si hanno quindi i momenti

$$\begin{aligned}
 M^{(AB)}(x_3) &= \frac{5 P x_3}{8} ; \\
 M^{(BC)}(x_3) &= \frac{17 P L}{28} + \frac{11 P x_3}{56} ; \\
 M^{(CD)}(x_3) &= \frac{45}{56} P (L - x_3) ; \\
 M^{(DE)}(x_3) &= -\frac{45 P x_3}{56} ; \\
 M^{(EF)}(x_3) &= \frac{3 P L}{4} - \frac{3 P x_3}{8} ; \\
 M^{(GB)}(x_3) &= -\frac{9 P x_3}{14} ; \\
 M^{(HG)}(x_3) &= \frac{9 P L}{7} - \frac{9 P x_3}{14} ; \\
 M^{(HI)}(x_3) &= -\frac{9 P L}{7} + \frac{3 P x_3}{7} ; \\
 M^{(IL)}(x_3) &= \frac{3 P x_3}{7} \\
 M^{(LE)}(x_3) &= \frac{3 P L}{7} + \frac{9 P x_3}{14}
 \end{aligned} \tag{32}$$

e gli sforzi assiali :

$$\begin{aligned}
 N^{(AB)}(x_3) &= 0 ; \\
 N^{(BC)}(x_3) &= N^{(CD)}(x_3) = N^{(DE)}(x_3) = \frac{9 P}{14} ; \\
 N^{(EF)}(x_3) &= 0 ;
 \end{aligned}$$

$$N^{(GB)}(x_3) = N^{(HG)}(x_3) - \frac{3P}{7};$$

$$N^{(HI)}(x_3) = N^{(IL)}(x_3) = -\frac{9P}{14};$$

$$N^{(LE)}(x_3) = \frac{3P}{7};$$

Il diagramma dei momenti e' riportato in Figura 6

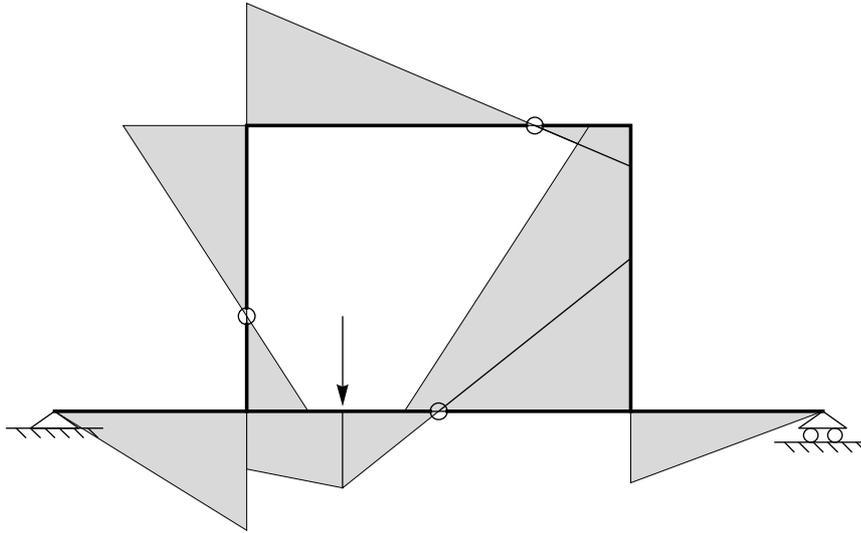


Figura 6 - Il diagramma dei momenti per la maglia chiusa di Figura 4

■ Calcoli

■ Seconda fase : il calcolo degli spostamenti

Le equazioni da utilizzare sono ora quelle che legano gli spostamenti alle caratteristiche, o piu' precisamente, le curvature ai momenti e gli allungamenti percentuali agli sforzi normali:

$$u_2''(x_3) = -\frac{M}{EI}$$

$$u_3'(x_3) = \frac{N}{EA} \quad (34)$$

Sara' quindi, per gli spostamenti trasversali

$$u_2^{(AB)}(x_3) = \frac{5P}{48EI}x_3^3 + C_0x_3 + C_1;$$

$$u_2^{(BC)}(x_3) = \frac{17PL}{56EI}x_3^2 + \frac{11P}{336EI}x_3^3 + C_2x_3 + C_3;$$

$$u_2^{(CD)}(x_3) = \frac{45P}{56EI} \left(L \frac{x_3^2}{2} - \frac{x_3^3}{6} \right) + C_4x_3 + C_5;$$

$$u_2^{(DE)}(x_3) = -\frac{15P}{112EI}x_3^3 + C_6x_3 + C_7;$$

$$\begin{aligned}
u_2^{(EF)}(x_3) &= \frac{3 P L}{8 E I} x_3^2 - \frac{3 P x_3^3}{48} + C_2 x_3 + C_9 ; \\
u_2^{(GB)}(x_3) &= -\frac{3 P x_3^3}{28 E I} + C_{10} x_3 + C_{11} ; \\
u_2^{(HG)}(x_3) &= \frac{9 P L}{14 E I} x_3^2 - \frac{3 P x_3^3}{14 E I} + C_{12} x_3 + C_{13} ; \\
u_2^{(HI)}(x_3) &= -\frac{9 P L}{14 E I} x_3^2 + \frac{P x_3^3}{14 E I} + C_{14} x_3 + C_{15} ; \\
u_2^{(IL)}(x_3) &= \frac{P x_3^3}{14 E I} + C_{16} x_3 + C_{17} \\
u_2^{(LE)}(x_3) &= \frac{3 P L}{14 E I} x_3^2 + \frac{3 P x_3^3}{28 E I} + C_{18} x_3 + C_{19}
\end{aligned}$$

e per gli spostamenti assiali:

$$\begin{aligned}
u_3^{(AB)}(x_3) &= d_0 ; \\
u_3^{(BC)}(x_3) &= \frac{9 P}{14 E A} x_3 + d_1 ; \\
u_3^{(CD)}(x_3) &= \frac{9 P}{14 E A} x_3 + d_2 ; \\
u_3^{(DE)}(x_3) &= \frac{9 P}{14 E A} x_3 + d_3 ; \\
u_3^{(EF)}(x_3) &= d_4 ; \\
u_3^{(GB)}(x_3) &= -\frac{3 P}{7 E A} x_3 + d_5 ; \\
u_3^{(HG)}(x_3) &= -\frac{3 P}{7 E A} x_3 + d_6 ; \\
u_3^{(HI)}(x_3) &= -\frac{9 P}{14 E A} x_3 + d_7 ; \\
u_3^{(IL)}(x_3) &= -\frac{9 P}{14 E A} x_3 + d_8 \\
u_3^{(LE)}(x_3) &= \frac{3 P}{7 E A} x_3 + d_9 ;
\end{aligned} \tag{36}$$

Questa volta le condizioni ai limiti dovranno imporre la congruenza degli spostamenti, e sarà :

in corrispondenza dell'appoggio in A :

$$\begin{aligned}
u_2^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0 \\
u_3^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0
\end{aligned} \tag{37}$$

in corrispondenza del nodo triplo B:

$$\begin{aligned}
u_2^{(AB)}(x_3 = L_1) &= u_2^{(BC)}(x_3 = 0) \\
u_2^{(AB)}(x_3 = L_1) &= u_3^{(GB)}(x_3 = H_1) \\
u_3^{(AB)}(x_3 = L_1) &= u_3^{(BC)}(x_3 = 0)
\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} u_3^{(AB)}(x_3 = L_1) &= -u_2^{(GB)}(x_3 = H_1) \\ \phi^{(AB)}(x_3 = L_1) &= \phi^{(BC)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(AB)}(x_3 = L_1) &= \phi^{(GB)}(x_3 = H_1) \end{aligned}$$

in corrispondenza della forza in C

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)}(x_3 = L_2) &= u_2^{(CD)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(BC)}(x_3 = L_2) &= u_3^{(CD)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(BC)}(x_3 = L_2) &= \phi^{(CD)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (39)$$

in corrispondenza della cerniera in D

$$\begin{aligned} u_2^{(CD)}(x_3 = L_3) &= u_2^{(DE)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(CD)}(x_3 = L_3) &= u_3^{(DE)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (40)$$

in corrispondenza del nodo triplo in E

$$\begin{aligned} u_2^{(DE)}(x_3 = L_4) &= u_2^{(EF)}(x_3 = 0) \\ u_2^{(DE)}(x_3 = L_4) &= u_3^{(LE)}(x_3 = H_1 + H_2) \\ u_3^{(DE)}(x_3 = L_4) &= u_3^{(EF)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(DE)}(x_3 = L_4) &= -u_2^{(LE)}(x_3 = H_1 + H_2) \\ \phi^{(DE)}(x_3 = L_4) &= \phi^{(EF)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(DE)}(x_3 = L_4) &= \phi^{(LE)}(x_3 = H_1 + H_2) \end{aligned} \quad (41)$$

in corrispondenza del carrello in F

$$u_2^{(EF)}(x_3 = L_5) = 0 \quad (42)$$

in corrispondenza della cerniera in G

$$\begin{aligned} u_2^{(HG)}(x_3 = H_2) &= u_2^{(BG)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(HG)}(x_3 = H_2) &= u_3^{(BG)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (43)$$

in corrispondenza del nodo H

$$\begin{aligned} u_2^{(HG)}(x_3 = 0) &= -u_3^{(HI)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(HG)}(x_3 = 0) &= u_2^{(HI)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(HG)}(x_3 = 0) &= \phi^{(HI)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (44)$$

in corrispondenza della cerniera in I

$$\begin{aligned} u_2^{(HI)}(x_3 = L_6) &= u_2^{(IL)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(HI)}(x_3 = L_6) &= u_3^{(IL)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (45)$$

in corrispondenza del nodo in L

$$\begin{aligned} u_2^{(IL)}(x_3 = L_7) &= u_3^{(LE)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(IL)}(x_3 = 0) &= -u_2^{(LE)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(IL)}(x_3 = 0) &= \phi^{(LE)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (46)$$

Risolviendo il sistema di trenta equazioni, e portando la rigidità assiale EA ad infinito, si ottengono le linee elastiche:

$$\begin{aligned}
u_2^{(AB)}(x_3) &= \frac{5 P x_3 (2491 L^2 - 49 x_3^2)}{2352 EI} ; \\
u_2^{(BC)}(x_3) &= \frac{P (22950 L^3 + 9515 L^2 x_3 - 714 L x_3^2 - 77 x_3^3)}{2352 EI} ; \\
u_2^{(CD)}(x_3) &= \frac{P (31674 L^3 + 7856 L^2 x_3 - 945 L x_3^2 + 315 x_3^3)}{2352 EI} ; \\
u_2^{(DE)}(x_3) &= \frac{P (38900 L^3 - 11657 L^2 x_3 + 315 x_3^3)}{2352 EI} ; \\
u_2^{(EF)}(x_3) &= \frac{P (18106 L^3 - 7877 L^2 x_3 - 882 L x_3^2 + 147 x_3^3)}{2352 EI} ; \\
u_2^{(GB)}(x_3) &= - \frac{P (9011 L^3 - 8759 L^2 x_3 - 252 x_3^3)}{2352 EI} ; \\
u_2^{(HG)}(x_3) &= \frac{P (5487 L^3 - 5233 L^2 x_3 - 1512 L x_3^2 + 252 x_3^3)}{2352 EI} ; \\
u_2^{(HI)}(x_3) &= \frac{P (22950 L^3 - 5233 L^2 x_3 + 1512 L x_3^2 - 168 x_3^3)}{2352 EI} ; \\
u_2^{(IL)}(x_3) &= \frac{P (16323 L^3 + 1951 L^2 x_3 - 168 x_3^3)}{2352 EI} ; \\
u_2^{(LE)}(x_3) &= \frac{P (5487 L^3 + 1951 L^2 x_3 - 504 L x_3^2 - 252 x_3^3)}{2352 EI}
\end{aligned}$$

per gli spostamenti trasversali, e :

$$\begin{aligned}
u_3^{(AB)}(x_3) &= u_3^{(BC)}(x_3) = u_3^{(CD)}(x_3) = u_3^{(DE)}(x_3) = u_3^{(EF)}(x_3) \equiv 0 ; \\
u_3^{(GB)}(x_3) &= u_3^{(HG)}(x_3) = \frac{3825 P L^3}{392 EI} ; \\
u_3^{(HI)}(x_3) &= u_3^{(IL)}(x_3) = - \frac{1829 P L^3}{784 EI} \\
u_3^{(LE)}(x_3) &= \frac{9053 P L^3}{1176 EI} ;
\end{aligned} \tag{48}$$

per gli spostamenti assiali. Ne segue la deformata di Figura 7.

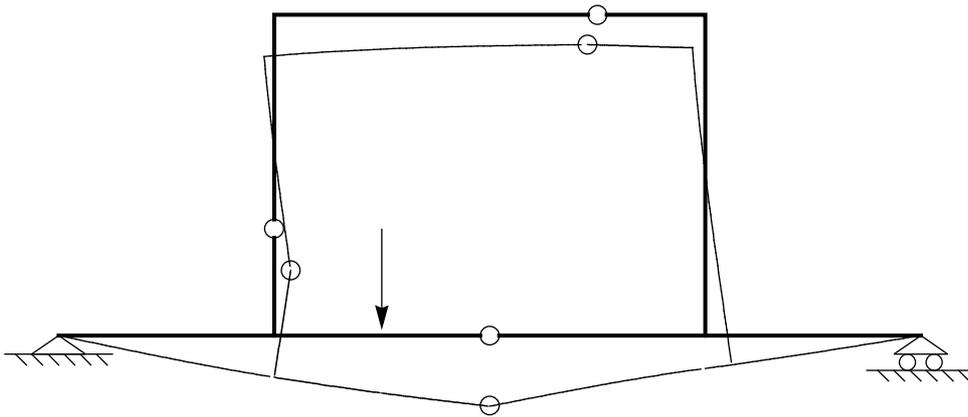


Figura 7 - Il diagramma degli spostamenti per la maglia chiusa di Figura 4, in ipotesi di $EA = \infty$

■ Calcoli

Esempio n.3

Si consideri il telaio zoppo di Figura 8, appoggiato agli estremi e con doppio bipendolo ad interrompere il traverso. Un pendolo collega i due ritti.

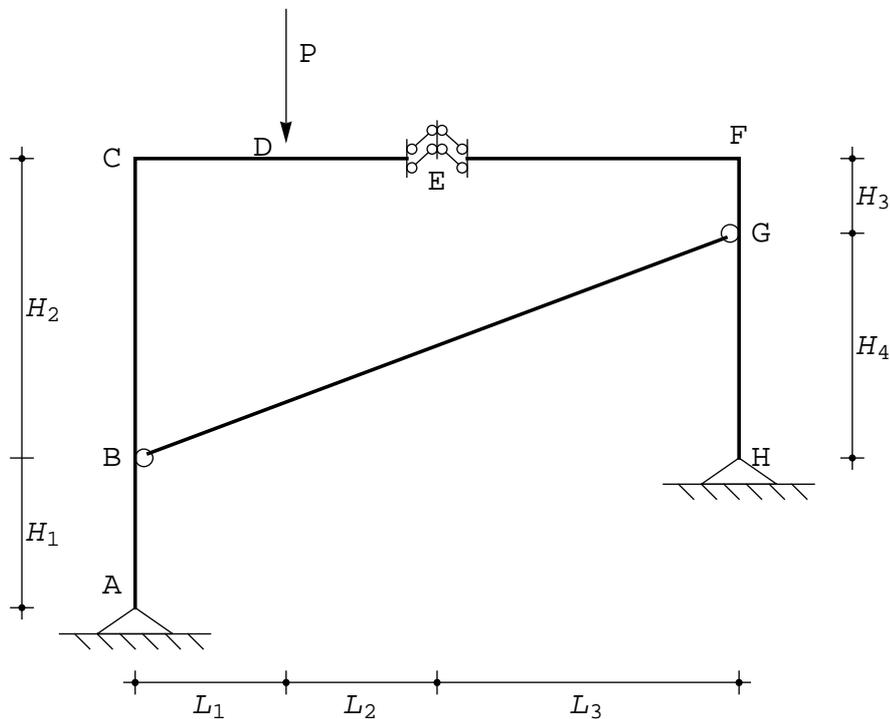


Figura 8 - Un telaio zoppo con pendolo

La struttura è isostatica, in quanto costituita da due tratti ($t = 2$) con sei incognite statiche (le due reazioni dei due appoggi, la coppia del doppio bipendolo, lo sforzo normale nel pendolo BG). Si identificano i sistemi di riferimento di Figura 9, in modo da poter scrivere:

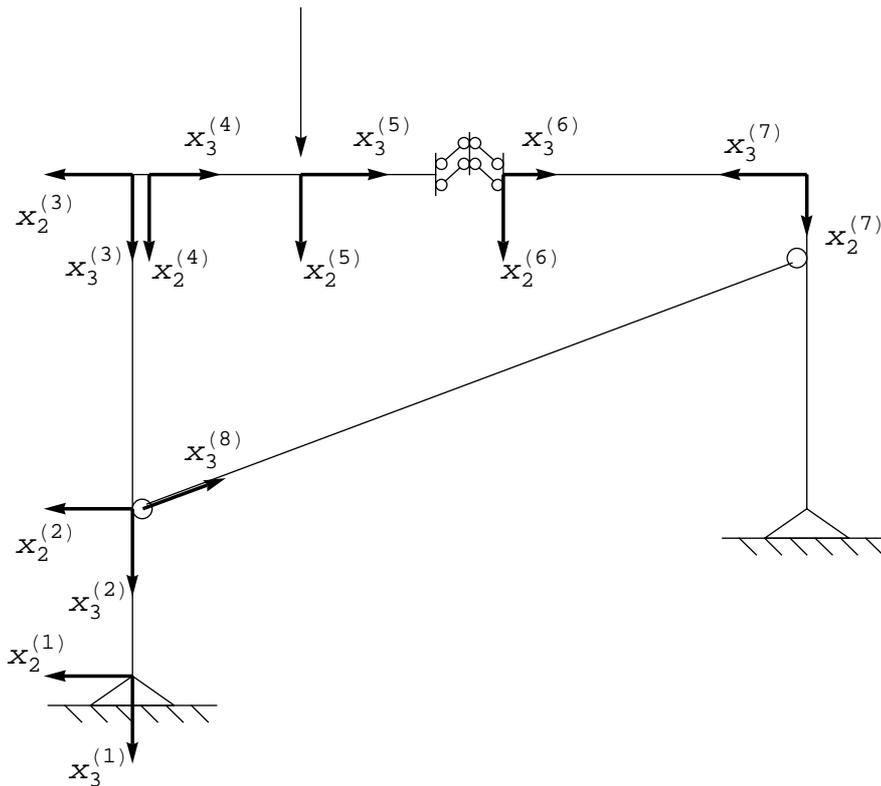


Figura 9 - I sistemi di riferimento per il telaio zoppo con pendolo

$$\begin{aligned}
 M^{(BA)}(x_3) &= t_1 x_3 + m_1 ; \\
 M^{(CB)}(x_3) &= t_2 x_3 + m_2 ; \quad M^{(CD)}(x_3) = t_3 x_3 + m_3 \\
 M^{(DE)}(x_3) &= t_4 x_3 + m_4 ; \\
 M^{(EF)}(x_3) &= t_5 x_3 + m_5 ; \quad M^{(FG)}(x_3) = t_6 x_3 + m_6 \\
 M^{(GH)}(x_3) &= t_7 x_3 + m_7 ;
 \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
 N^{(BA)}(x_3) &= n_1 ; \quad N^{(CB)}(x_3) = n_2 ; \quad N^{(CD)}(x_3) = n_3 ; \\
 N^{(DE)}(x_3) &= n_4 ; \quad N^{(EF)}(x_3) = n_5 ; \\
 N^{(FG)}(x_3) &= n_6 ; \quad N^{(GH)}(x_3) = n_7 ; \quad N^{(BG)} = n_8 ;
 \end{aligned} \tag{50}$$

Si noti che per il pendolo si è definito il solo sforzo assiale, in quanto momento e taglio sono identicamente nulli. Le condizioni di equilibrio che permettono il calcolo delle ventidue costanti di integrazione sono:

in corrispondenza dell'appoggio in A :

$$M^{(BA)}(x_3 = H_1) = 0 \tag{51}$$

in corrispondenza del nodo B:

$$\begin{aligned}
 -T^{(BA)}(x_3 = 0) + T^{(CB)}(x_3 = H_2) + N^{(BG)} \cos[\alpha] &= 0 \\
 N^{(BA)}(x_3 = 0) - N^{(CB)}(x_3 = H_1) - N^{(BG)} \sin[\alpha] &= 0 \\
 M^{(BA)}(x_3 = 0) - M^{(CB)}(x_3 = H_2) &= 0
 \end{aligned} \tag{52}$$

in corrispondenza del nodo C:

$$\begin{aligned}
 -T^{(CB)}(x_3 = 0) + N^{(CD)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 N^{(CB)}(x_3 = 0) + T^{(CD)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 M^{(CB)}(x_3 = 0) + M^{(CD)}(x_3 = 0) &= 0
 \end{aligned} \tag{53}$$

in corrispondenza della forza P:

$$\begin{aligned} -N^{(CD)}(x_3 = L_1) + N^{(DE)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -T^{(CD)}(x_3 = L_1) + T^{(DE)}(x_3 = 0) + P &= 0 \\ -M^{(CD)}(x_3 = L_1) + M^{(DE)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (54)$$

in corrispondenza del doppio bipendolo in E :

$$\begin{aligned} N^{(DE)}(x_3 = L_2) &= 0 \\ N^{(EF)}(x_3 = 0) &= 0 \\ T^{(DE)}(x_3 = L_2) &= 0 \\ T^{(EF)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (55)$$

in corrispondenza del nodo F:

$$\begin{aligned} -T^{(EF)}(x_3 = L_3) + N^{(FG)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -N^{(EF)}(x_3 = L_3) - T^{(FG)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -M^{(EF)}(x_3 = L_3) + M^{(FG)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (56)$$

in corrispondenza del nodo G:

$$\begin{aligned} T^{(FG)}(x_3 = H_3) - T^{(GH)}(x_3 = 0) - N^{(BG)} \cos[\alpha] &= 0 \\ -N^{(FG)}(x_3 = H_3) + N^{(GH)}(x_3 = 0) + N^{(BG)} \sin[\alpha] &= 0 \\ -M^{(FG)}(x_3 = H_3) + M^{(GH)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (57)$$

in corrispondenza dell'appoggio in H :

$$M^{(GH)}(x_3 = H_4) = 0 \quad (58)$$

Svolgendo i calcoli, e risolvendo il sistema di equazioni si ha il quadro flessionale:

$$\begin{aligned} M^{(BA)}(x_3) &= -\frac{P L_1}{H_1 - H_4} x_3 + \frac{P H_1 L_1}{H_1 - H_4}; \\ M^{(CB)}(x_3) &= \frac{P H_1 L_1}{H_1 - H_4}; \\ M^{(CD)}(x_3) &= P x_3 - \frac{P H_1 L_1}{H_1 - H_4}; \\ M^{(DE)}(x_3) &= -\frac{P H_4 L_1}{H_1 - H_4}; \\ M^{(EF)}(x_3) &= -\frac{P H_4 L_1}{H_1 - H_4}; \\ M^{(FG)}(x_3) &= -\frac{P H_4 L_1}{H_1 - H_4}; \\ M^{(GH)}(x_3) &= \frac{P L_1}{H_1 - H_4} x_3 - \frac{P H_4 L_1}{H_1 - H_4}; \end{aligned} \quad (59)$$

ed il quadro di sforzi assiali :

$$\begin{aligned} N^{(BA)}(x_3) &= P \left(-1 - \frac{L_1 \tan[\alpha]}{H_1 - H_4} \right); \\ N^{(CB)}(x_3) &= -P; \end{aligned}$$

$$N^{(CD)}(x_3) = N^{(DE)}(x_3) = N^{(EF)}(x_3) = N^{(FG)}(x_3) \equiv 0;$$

$$N^{(GH)}(x_3) = \frac{P L_1 \tan[\alpha]}{H_1 - H_4};$$

$$N^{(BG)} = - \frac{P \sec[\alpha] L_1}{H_1 - H_4};$$

Si assume, d'ora in poi:

$$L_1 = L; L_2 = L; L_3 = 2L; H_1 = L; H_2 = 3L; H_3 = L; H_4 = 2L \quad (61)$$

ottenendo il diagramma di Figura.

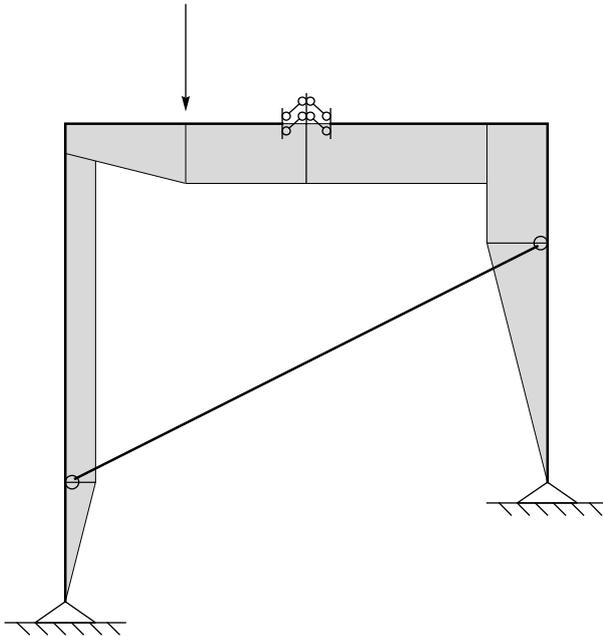


Figura 10 - Il diagramma dei momenti per il telaio di Figura 8

■ Calcoli

■ Seconda fase : il calcolo degli spostamenti

Le equazioni da utilizzare sono ora quelle che legano gli spostamenti alle caratteristiche, o più precisamente, le curvature ai momenti e gli allungamenti percentuali agli sforzi normali:

$$u_2''(x_3) = - \frac{M}{EI}$$

$$u_3'(x_3) = \frac{N}{EA} \quad (62)$$

Sarà quindi, per gli spostamenti trasversali

$$u_2^{(BA)}(x_3) = - \frac{P}{EI} \frac{x_3^3}{6} + \frac{P}{EI} L \frac{x_3^2}{2} + C_0 x_3 + C_1;$$

$$u_2^{(CB)}(x_3) = \frac{P}{EI} L \frac{x_3^2}{2} + C_2 x_3 + C_3;$$

$$\begin{aligned}
u_2^{(CD)}(x_3) &= -\frac{P}{EI} L \frac{x_3^2}{2} + c_4 x_3 + c_5 i \\
u_2^{(DE)}(x_3) &= -\frac{P}{EI} L x_3^2 + c_6 x_3 + c_7 i \\
u_2^{(EF)}(x_3) &= -\frac{P}{EI} L x_3^2 + c_8 x_3 + c_9 i \\
u_2^{(FG)}(x_3) &= -\frac{P}{EI} L x_3^2 + c_{10} x_3 + c_{11} i \\
u_2^{(GH)}(x_3) &= \frac{P}{EI} \frac{x_3^3}{6} - \frac{P}{EI} L x_3^2 + c_{12} x_3 + c_{13} i
\end{aligned}$$

e per gli spostamenti assiali:

$$\begin{aligned}
u_3^{(BA)}(x_3) &= -\frac{P}{2EA} x_3 + d_0 i \\
u_3^{(CB)}(x_3) &= \frac{-P}{EA} x_3 + d_1 i \\
u_3^{(CD)}(x_3) &= d_2 i \\
u_3^{(DE)}(x_3) &= d_3 i \\
u_3^{(EF)}(x_3) &= d_4 i \\
u_3^{(FG)}(x_3) &= -d_5 i \\
u_3^{(GH)}(x_3) &= -\frac{P}{2EA} x_3 x_3 + d_6 i \\
u_3^{(BG)}(x_3) &= \frac{\sqrt{5} P}{2EA} x_3 + d_7 i
\end{aligned} \tag{64}$$

Anche in questa fase, si e' assunta *a priori* identicamente nulla la linea elastica $u_2^{(8)}$. Questa volta le condizioni ai limiti dovranno imporre la congruenza degli spostamenti, e sara' :

in corrispondenza dell' appoggio in A :

$$\begin{aligned}
u_2^{(BA)}(x_3 = H_1) &= 0 \\
u_3^{(BA)}(x_3 = H_1) &= 0
\end{aligned} \tag{65}$$

in corrispondenza del nodo B:

$$\begin{aligned}
u_2^{(BA)}(x_3 = 0) &= u_2^{(CB)}(x_3 = H_2) \\
u_2^{(BA)}(x_3 = 0) &= -u_3^{(BG)}(x_3 = 0) \cos[\alpha] \\
u_3^{(BA)}(x_3 = 0) &= u_3^{(CB)}(x_3 = H_2) \\
u_3^{(BA)}(x_3 = 0) &= -u_3^{(BG)}(x_3 = 0) \sin[\alpha] \\
\phi^{(BA)}(x_3 = 0) &= \phi^{(CB)}(x_3 = H_2)
\end{aligned} \tag{66}$$

in corrispondenza del nodo in C:

$$\begin{aligned}
u_2^{(CB)}(x_3 = 0) &= -u_3^{(CD)}(x_3 = 0) \\
u_3^{(CB)}(x_3 = 0) &= u_2^{(CD)}(x_3 = 0) \\
\phi^{(CB)}(x_3 = 0) &= \phi^{(CD)}(x_3 = 0)
\end{aligned} \tag{67}$$

in corrispondenza della forza in D:

$$\begin{aligned} u_2^{(CD)}(x_3 = L_1) &= u_2^{(DE)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(CD)}(x_3 = L_1) &= u_3^{(DE)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(CD)}(x_3 = 0) &= \phi^{(DE)}(x_3 = 0) \end{aligned}$$

in corrispondenza del doppio bipendolo in E

$$\phi^{(DE)}(x_3 = L_2) = \phi^{(EF)}(x_3 = 0) \quad (69)$$

in corrispondenza del nodo in F

$$\begin{aligned} u_2^{(EF)}(x_3 = L_3) &= u_3^{(FG)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(EF)}(x_3 = L_3) &= -u_2^{(FG)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(EF)}(x_3 = L_3) &= \phi^{(FG)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (70)$$

in corrispondenza del nodo G:

$$\begin{aligned} u_2^{(FG)}(x_3 = H_3) &= u_2^{(GH)}(x_3 = 0) \\ u_2^{(FG)}(x_3 = H_3) &= -u_3^{(BG)}(x_3 = L_p) \cos[\alpha] \\ u_3^{(FG)}(x_3 = H_3) &= u_3^{(GH)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(FG)}(x_3 = H_3) &= -u_3^{(BG)}(x_3 = L_p) \sin[\alpha] \\ \phi^{(FG)}(x_3 = H_3) &= \phi^{(GH)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (71)$$

dove L_p e' la lunghezza del pendolo:

$$L_p = \frac{(L_1 + L_2 + L_3)}{\cos[\alpha]}, \quad (72)$$

in corrispondenza dell'appoggio in H:

$$\begin{aligned} u_2^{(GH)}(x_3 = H_4) &= 0 \\ u_3^{(GH)}(x_3 = H_4) &= 0 \end{aligned} \quad (73)$$

Si noti ora che le due equazioni

$$\begin{aligned} u_3^{(BA)}(x_3 = 0) &= -u_3^{(BG)}(x_3 = 0) \sin[\alpha] \\ u_3^{(FG)}(x_3 = H_3) &= -u_3^{(BG)}(x_3 = L_p) \sin[\alpha] \end{aligned} \quad (74)$$

sono automaticamente soddisfatte, e non vanno quindi considerate.

Risolviendo il sistema di ventidue equazioni, e portando la rigidità assiale EA ad infinito, si ottengono le linee elastiche:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)}(x_3) &= -\frac{P(L - x_3)(152L^2 + 2Lx_3 - x_3^2)}{6EI}; \\ u_2^{(CB)}(x_3) &= -\frac{PL(575L^2 - 132Lx_3 - 3x_3^2)}{6EI}; \\ u_2^{(CD)}(x_3) &= -\frac{Px_3(-132L^2 + 3Lx_3 + x_3^2)}{6EI}; \\ u_2^{(DE)}(x_3) &= \frac{PL(64L^2 + 66Lx_3 - 3x_3^2)}{3EI}; \end{aligned} \quad (75)$$

$$u_2^{(EF)}(x_3) = - \frac{P L (36 L^2 - 20 L x_3 + x_3^2)}{EI};$$

$$u_2^{(FG)}(x_3) = - \frac{P L (121 L^2 - 48 L x_3 + 3 x_3^2)}{3 EI};$$

$$u_2^{(GH)}(x_3) = - \frac{P (152 L^3 - 84 L^2 x_3 + 6 L x_3^2 - x_3^3)}{6 EI};$$

per gli spostamenti trasversali, e :

$$u_3^{(BA)}(x_3) = u_3^{(CB)}(x_3) = 0$$

$$u_3^{(CD)}(x_3) = u_3^{(DE)}(x_3) = \frac{575 P L^3}{6 EI};$$

$$u_3^{(DE)}(x_3) = \frac{121 P L^3}{3 EI} \quad (76)$$

$$u_3^{(FG)}(x_3) = u_3^{(GH)}(x_3) = 0;$$

$$u_3^{(BG)}(x_3) = \frac{38 \sqrt{5} P L^3}{3 EI}$$

per gli spostamenti assiali. Ne segue la deformata di Figura 11.

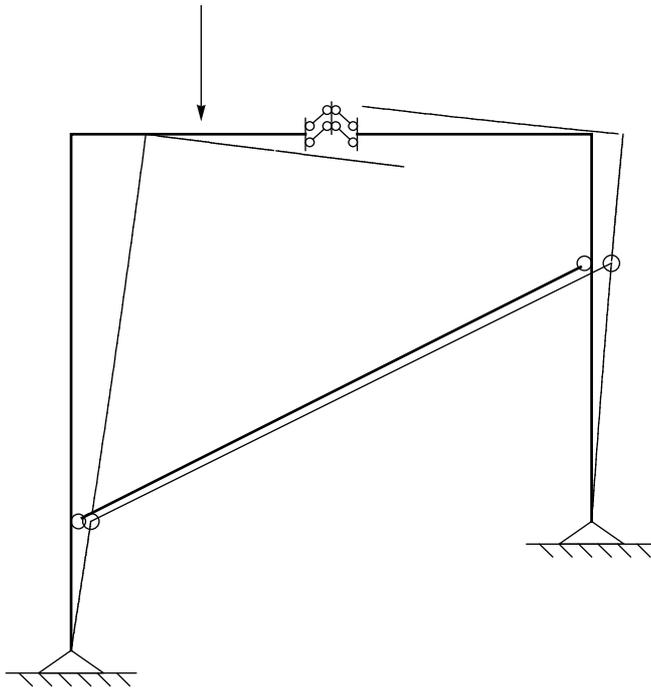


Figura 11 - Il diagramma degli spostamenti per il telaio di Figura 8, in ipotesi $EA = \infty$

Da essa, e dalle (74-75), e' immediato calcolare l'abbassamento in corrispondenza della forza, i due spostamenti relativi in corrispondenza del doppio bipendolo, l'allungamento del pendolo, etc.

■ Calcoli

Esempio n.4

Un ultimo esempio e' illustrato in Figura 12, in cui un telaio zoppo presenta uno sbalzo di luce L_1 caricato da una forza all'estremo. Trattandosi di un telaio a tre cerniere, l'isostaticita' e' ovvia.

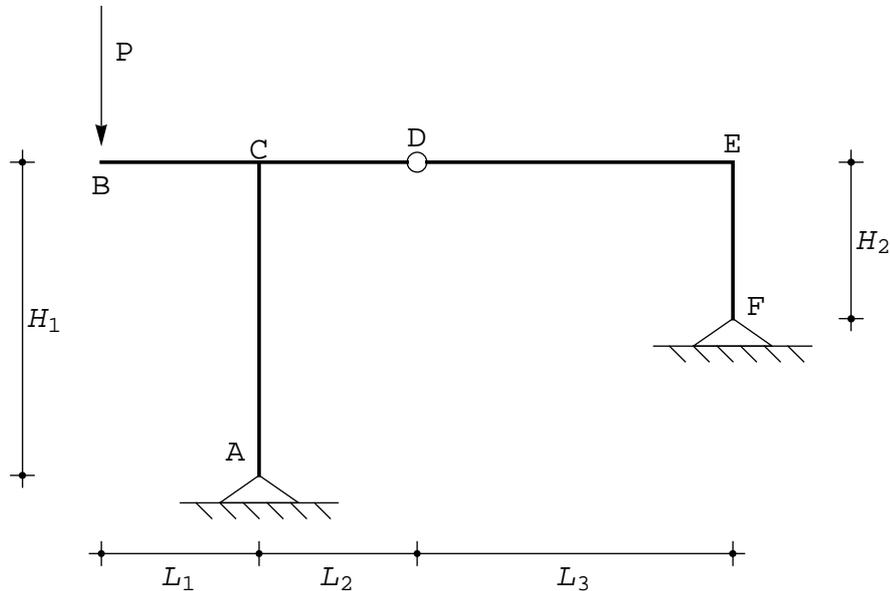


Figura 12 - Un telaio zoppo con sbalzo

La solita scelta dei sistemi di riferimento porta a scrivere:

$$\begin{aligned} M^{(BC)}(x_3) &= t_1 x_3 + m_1 ; \\ M^{(CA)}(x_3) &= t_2 x_3 + m_2 ; \quad M^{(CD)}(x_3) = t_3 x_3 + m_3 \\ M^{(DE)}(x_3) &= t_4 x_3 + m_4 ; \quad M^{(EF)}(x_3) = t_5 x_3 + m_5 ; \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} N^{(BC)}(x_3) &= n_1 ; \quad N^{(CA)}(x_3) = n_2 ; \\ N^{(CD)}(x_3) &= n_3 ; \quad N^{(DE)}(x_3) = n_4 ; \quad N^{(EF)}(x_3) = n_5 ; \end{aligned} \quad (78)$$

Le costanti di integrazione si possono determinare imponendo quindici condizioni di equilibrio, così come segue:

in corrispondenza dell'appoggio in A :

$$M^{(CA)}(x_3 = H_1) = 0 \quad (79)$$

in corrispondenza della forza in B:

$$\begin{aligned} T^{(BC)}(x_3 = 0) + P &= 0 \\ N^{(BC)}(x_3 = 0) &= 0 \\ M^{(BC)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (80)$$

in corrispondenza del nodo C:

$$\begin{aligned} -N^{(BC)}(x_3 = L_1) + N^{(CD)}(x_3 = 0) - T^{(CA)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -T^{(BC)}(x_3 = L_1) + T^{(CD)}(x_3 = 0) + N^{(CA)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -M^{(BC)}(x_3 = L_1) + M^{(CD)}(x_3 = 0) + M^{(CA)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (81)$$

in corrispondenza della cerniera in D:

$$\begin{aligned}
 -N^{(CD)}(x_3 = L_2) + N^{(DE)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 -T^{(CD)}(x_3 = L_2) + T^{(DE)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 M^{(CD)}(x_3 = L_2) &= 0 \\
 M^{(DE)}(x_3 = 0) &= 0
 \end{aligned} \tag{82}$$

in corrispondenza del nodo E:

$$\begin{aligned}
 -T^{(DE)}(x_3 = L_3) + N^{(EF)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 -N^{(DE)}(x_3 = L_3) - T^{(EF)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 -M^{(DE)}(x_3 = L_3) + M^{(EF)}(x_3 = 0) &= 0
 \end{aligned} \tag{83}$$

in corrispondenza dell'appoggio in F:

$$M^{(EF)}(x_3 = H_1 - H_2) = 0 \tag{84}$$

Si assume, d'ora in poi:

$$L_1 = 2L; L_2 = 2L; L_3 = 4L; H_1 = 4L; H_2 = 2L; \tag{85}$$

Svolgendo i calcoli, e risolvendo il sistema di equazioni si ha il quadro flessionale:

$$\begin{aligned}
 M^{(BC)}(x_3) &= -Px_3; \\
 M^{(CA)}(x_3) &= -\frac{8PL}{5} + \frac{2Px_3}{5}; \\
 M^{(CD)}(x_3) &= -\frac{2PL}{5} + \frac{Px_3}{5}; \\
 M^{(DE)}(x_3) &= \frac{Px_3}{5}; \\
 M^{(EF)}(x_3) &= \frac{4PL}{5} - \frac{2Px_3}{5};
 \end{aligned} \tag{86}$$

ed il quadro di sforzi assiali:

$$\begin{aligned}
 N^{(BC)}(x_3) &= 0; \\
 N^{(CA)}(x_3) &= -\frac{6P}{5}; \\
 N^{(CD)}(x_3) &= \frac{2P}{5}; \\
 N^{(DE)}(x_3) &= \frac{2P}{5}; \\
 N^{(EF)} &= \frac{P}{5};
 \end{aligned} \tag{87}$$

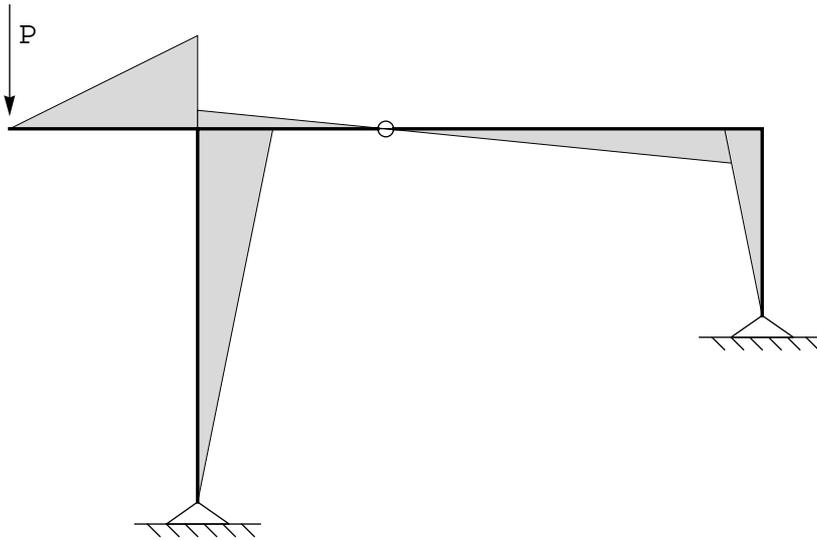


Figura 13 - Il diagramma dei momenti per il telaio di Figura 11

■ Calcoli

■ Seconda fase : il calcolo degli spostamenti

Le equazioni da utilizzare sono ora quelle che legano gli spostamenti alle caratteristiche, o più precisamente, le curvature ai momenti e gli allungamenti percentuali agli sforzi normali:

$$\begin{aligned} u_2''(x_3) &= -\frac{M}{EI} \\ u_3'(x_3) &= \frac{N}{EA} \end{aligned} \quad (91)$$

Sarà quindi, per gli spostamenti trasversali

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)}(x_3) &= \frac{P}{EI} \frac{x_3^3}{6} + C_0 x_3 + C_1 ; \\ u_2^{(CA)}(x_3) &= \frac{4PL}{5} x_3^2 - \frac{Px_3^3}{15} + C_2 x_3 + C_3 ; \\ u_2^{(CD)}(x_3) &= \frac{PL}{5} x_3^2 - \frac{Px_3^3}{30} + C_4 x_3 + C_5 ; \\ u_2^{(DE)}(x_3) &= -\frac{Px_3^3}{30} + C_6 x_3 + C_7 ; \\ u_2^{(EF)}(x_3) &= -\frac{2PL}{5} x_3^2 + \frac{Px_3^3}{15} + C_8 x_3 + C_9 ; \end{aligned} \quad (92)$$

e per gli spostamenti assiali:

$$\begin{aligned} u_3^{(BC)}(x_3) &= d_0 ; \\ u_3^{(CA)}(x_3) &= -\frac{6P}{5EA} x_3 + d_1 ; \end{aligned}$$

$$u_3^{(CD)}(x_3) = \frac{2P}{5EA} x_3 + d_2 ;$$

$$u_3^{(DE)}(x_3) = \frac{2P}{5EA} x_3 + d_3 ;$$

$$u_3^{(EF)}(x_3) = \frac{P}{5EA} x_3 + d_4 ;$$

Questa volta le condizioni ai limiti dovranno imporre la congruenza degli spostamenti, e sarà :

in corrispondenza dell'appoggio in A :

$$\begin{aligned} u_2^{(CA)}(x_3 = H_1) &= 0 \\ u_3^{(CA)}(x_3 = H_1) &= 0 \end{aligned} \quad (94)$$

in corrispondenza del nodo C:

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)}(x_3 = L_1) &= u_2^{(CD)}(x_3 = 0) \\ u_2^{(BC)}(x_3 = L_1) &= u_3^{(CA)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(BC)}(x_3 = L_1) &= u_3^{(CD)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(BC)}(x_3 = L_1) &= -u_3^{(CA)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(BC)}(x_3 = L_1) &= \phi^{(CD)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(BC)}(x_3 = L_1) &= \phi^{(CA)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (95)$$

in corrispondenza della cerniera in D:

$$\begin{aligned} u_2^{(CD)}(x_3 = L_2) &= u_2^{(DE)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(CD)}(x_3 = L_2) &= u_3^{(DE)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (96)$$

in corrispondenza del nodo in E

$$\begin{aligned} u_2^{(DE)}(x_3 = L_3) &= u_3^{(EF)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(DE)}(x_3 = L_3) &= -u_2^{(EF)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(DE)}(x_3 = L_3) &= \phi^{(EF)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (97)$$

in corrispondenza dell'appoggio in F:

$$\begin{aligned} u_2^{(EF)}(x_3 = H_1 - H_2) &= 0 \\ u_3^{(EF)}(x_3 = H_1 - H_2) &= 0 \end{aligned} \quad (98)$$

Risolviendo il sistema di quindici equazioni, e portando la rigidezza assiale EA ad infinito, si ottengono le linee elastiche:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(BC)}(x_3) &= \frac{P (224 L^3 - 132 L^2 x_3 + 5 x_3^3)}{30 EI}; \\
 u_2^{(CA)}(x_3) &= \frac{P (4 L - x_3) (4 L^2 - 8 L x_3 + x_3^2)}{15 EI}; \\
 u_2^{(CD)}(x_3) &= -\frac{P x_3 (72 L^2 - 6 L x_3 + x_3^2)}{30 EI}; \\
 u_2^{(DE)}(x_3) &= -\frac{P (-4 L + x_3)^2 (8 L + x_3)}{30 EI}; \\
 u_2^{(EF)}(x_3) &= \frac{P (16 L^3 - 6 L x_3^2 + x_3^3)}{15 EI};
 \end{aligned} \tag{99}$$

per gli spostamenti trasversali, e :

$$\begin{aligned}
 u_3^{(BC)}(x_3) &= u_3^{(CD)}(x_3) = u_3^{(DE)}(x_3) = -\frac{16 P L^3}{15 EI} \\
 u_3^{(CA)}(x_3) &= u_3^{(EF)}(x_3) = 0;
 \end{aligned} \tag{100}$$

per gli spostamenti assiali. Ne segue la deformata di Figura 14

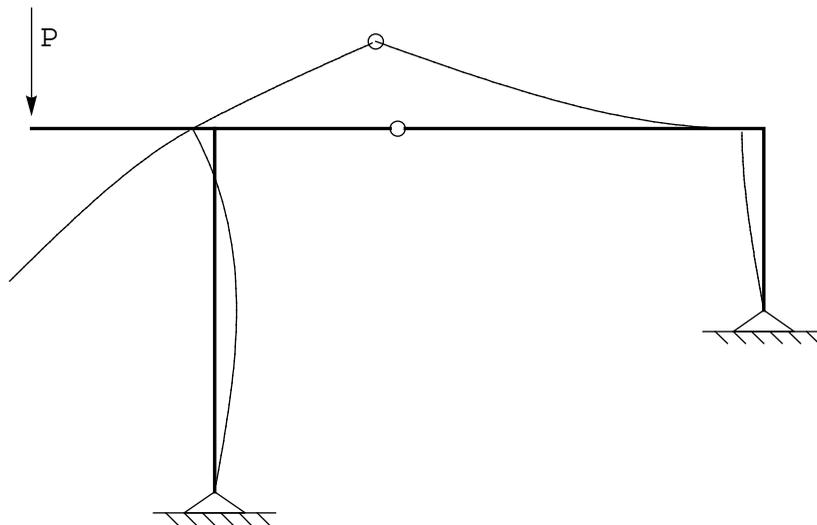


Figura 14 - Il diagramma degli spostamenti per il telaio di Figura 12, in ipotesi $EA = \infty$

Anche in questo caso, lo studio della deformata puo' essere completato determinando l'abbassamento del punto di applicazione della forza, la rotazione relativa nella cerniera, etc.

■ Calcoli

Figure