23 - La scrittura diretta delle equazioni di congruenza - Il metodo misto

- **[A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 15 aprile 2013]**

E' talvolta conveniente operare una scelta di incognite iperstatiche che rende la struttura labile, e non isostatica. Su tale struttura labile, e' poi possibile scrivere le equazioni di congruenza, insieme con una, o piu', condizioni di equilibrio. Di qui il nome del metodo, detto "metodo misto". In questa Esercitazione si forniscono alcuni esempi, rinviando a A. Carpinteri, G. Lacidogna, C. Surace "Calcolo dei telai piani" Pitagora Editrice 2002 per una trattazione piu' approfondita

Esercizio n .1

Si calcolino le reazioni e si disegni il diagramma delle c.s.i. per il telaio in Figura:

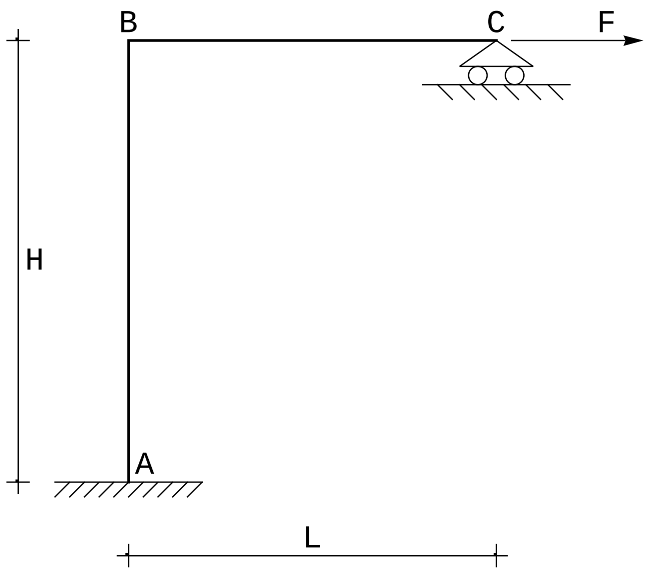

Figura 1 - Un telaio zoppo

La scelta delle incognite iperstatiche

Il telaio e' una volta iperstatico, ed una ovvia scelta della relativa incognita potrebbe essere la reazione verticale dell'appoggio. La conseguente equazione di ongruenza si risolve facilmente col metodo della composizione degli spostamenti:

$$u_{2C} = u_{2C}^{(0)} + X_1 u_{2C}^{(1)} = 0 \tag{1}$$

$$F \frac{H^2}{2\,EI} L + X_1 \left(L \frac{H}{EI} L + \frac{L^3}{3\,EI} \right) = 0 \qquad (2)$$

$$X_1 = -F \frac{3\,H^2}{2\,L\,(3\,H + L)} \qquad (3)$$

Si immagini ora di voler ricondurre la struttura ad una coppia di travi appoggiate, introducendo all'uopo due cerniere in A ed in B, insieme alle *due* incognite X_1 ed X_2. Si giunge allo schema *labile* di Figura 2, ed un possibile cinematismo e' indicato in Figura 3.

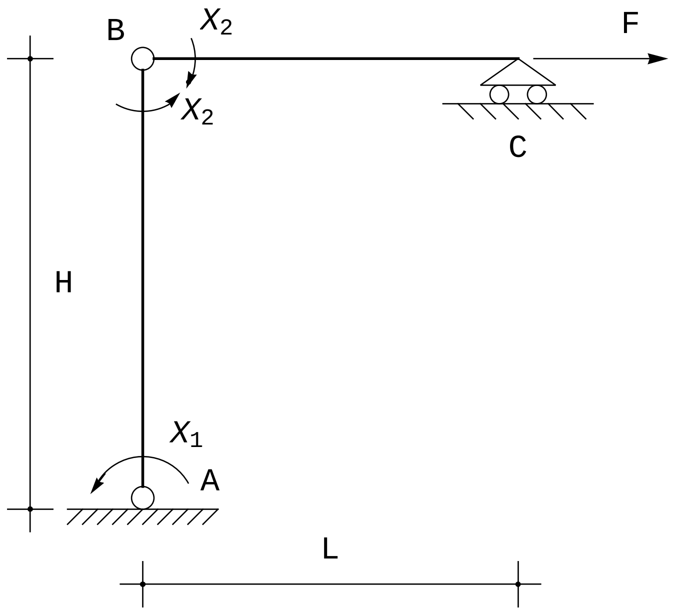

Figura 2 - Un possibile sistema labile equivalente

Si noti quindi che si e' introdotta una terza incognita, la coordinata lagrangiana ϕ, e che quindi accanto alle due equazioni di congruenza, intese ad annullare la rotazione in A, ed a ripristinare la continuita' delle rotazioni in B, occorre scrivere una condizione di equilibrio (principio di Lagrange):

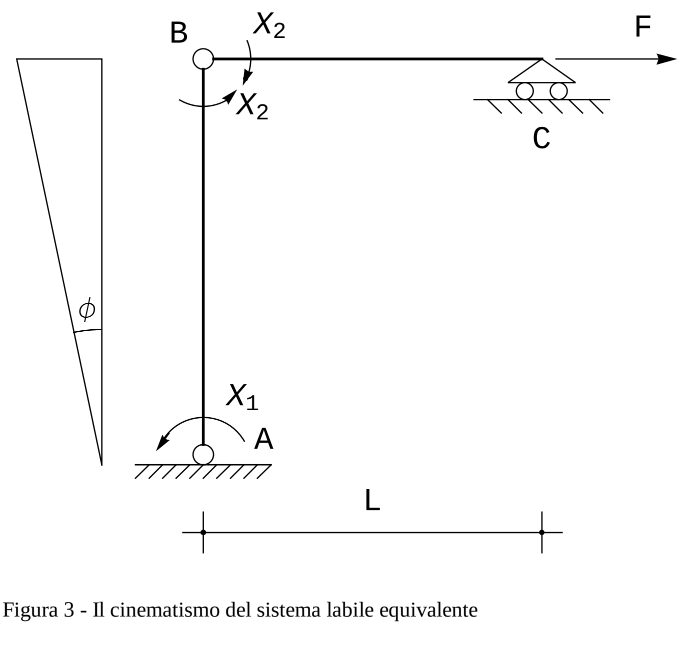

Figura 3 - Il cinematismo del sistema labile equivalente

$$\phi_A = 0 \longrightarrow X_1 \frac{H}{3\,EI} - X_2 \frac{H}{6\,EI} + \phi = 0$$
$$\phi_{BA} = \phi_{BC} \longrightarrow -X_1 \frac{H}{6\,EI} + X_2 \frac{H}{3\,EI} + \phi = -X_2 \frac{L}{3\,EI}$$
$$X_1\,\phi + X_2\,\phi - F\,H\,\phi = 0$$

con soluzione:

$$X_1 = \frac{F\,H\,(3\,H + 2\,L)}{2\,(3\,H + L)}$$
$$X_2 = \frac{3\,F\,H^2}{2\,(3\,H + L)} \tag{5}$$
$$\phi = -\frac{F\,H^2\,(3\,H + 4\,L)}{12\,EI\,(3\,H + L)}$$

■ Le caratteristiche della sollecitazione interna

Il diagramma del momento e' costituito da tratti lineari con valori noti agli estremi:

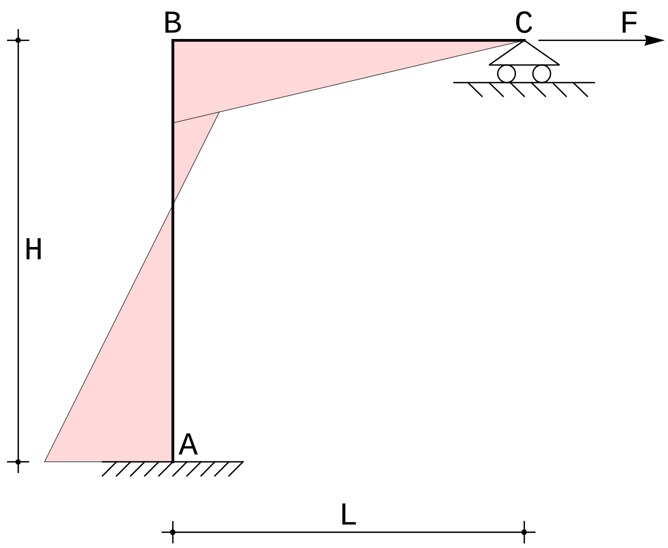

Figura 4 - Il diagramma del momento

L' equilibrio alla rotazione del ritto permette il calcolo del taglio:

$$T_{AB} = \frac{X_1 + X_2}{H} = F \tag{6}$$

come del resto ovvio, in base all'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale della struttura. Sul traverso si ha invece, ancora piu' semplicemente:

$$-T_{BC}\,L - X_2 = 0 \tag{7}$$

e quindi :

$$T_{BC} = -\frac{X_2}{L} = -\frac{3\,F\,H^2}{2\,L\,(3\,H + L)} \tag{8}$$

da cui la reazione dell' appoggio in C, gia' calcolata con altro metodo.

Infine, l' equilibrio del nodo in B permette di affermare :

$$N_{BA} = -T_{BC} = \frac{3 F H^2}{2 L (3 H + L)} \tag{9}$$
$$N_{BC} = T_{BA} = F$$

Esercizio n .2

Si calcolino le reazioni e si disegni il diagramma delle c.s.i. per il telaio in Figura 5:

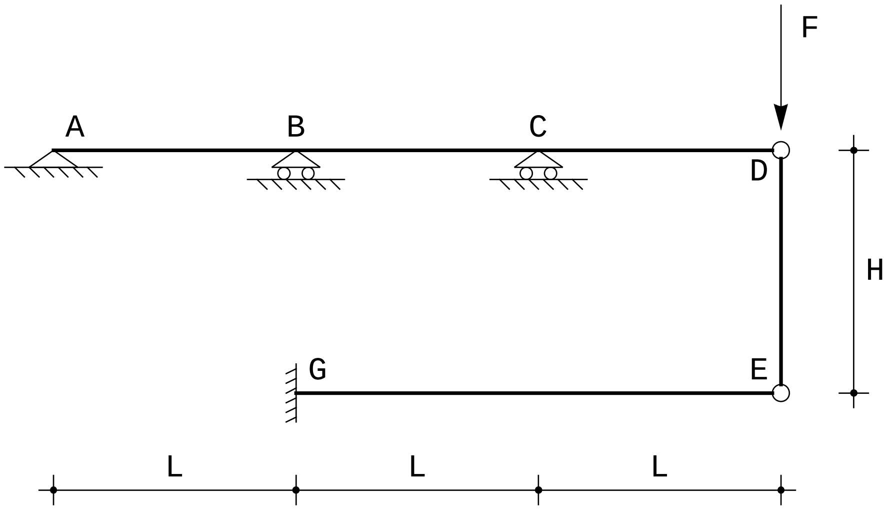

Figura 5 - Un telaio doppiamente iperstatico

■ La scelta delle incognite iperstatiche

Il telaio e' due volte iperstatico, e seguendo il metodo misto, ossia introducendo cerniere nei nodi B,C e G si giunge ad una struttura labile. Di qui la necessita' di identificare il corrispondente meccanismo, e su di esso imporre l'equilibrio con il metodo di Lagrange. La struttura labile equivalente e' quindi:

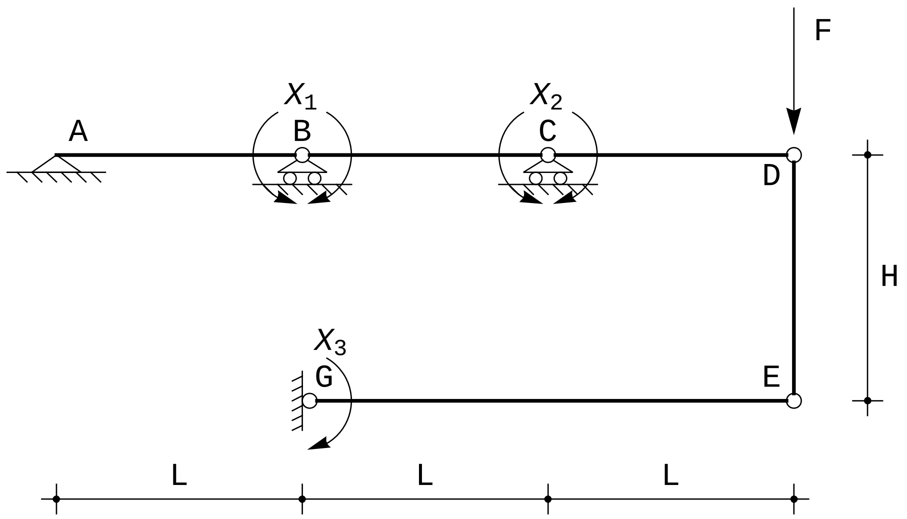

Figura 6 - La struttura labile equivalente del sistema di Figura 5

con cinematismo illustrato in Figura 7.

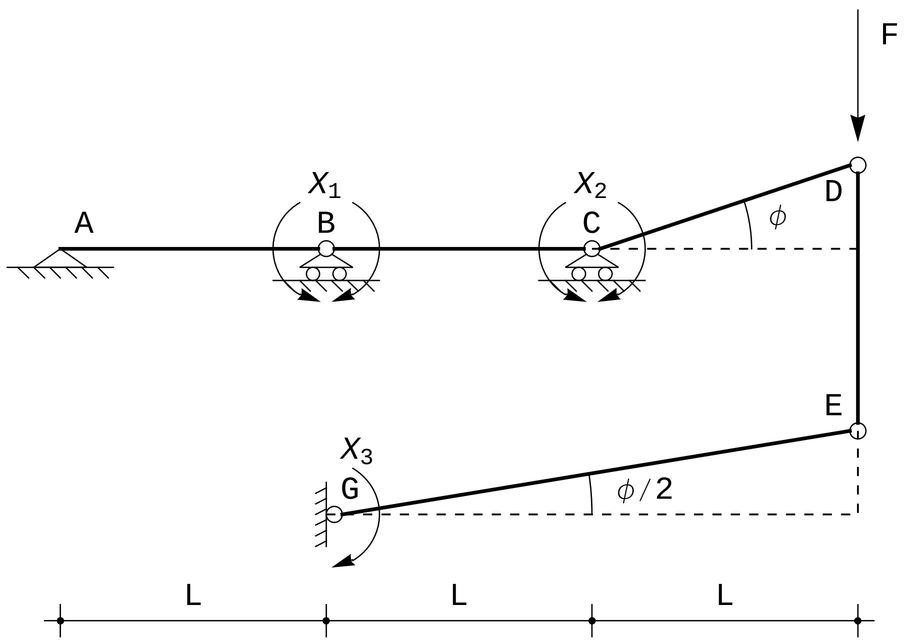

Figura 7 - Un possibile sistema labile equivalente

Si devono scrivere le tre equazioni di *congruenza:*

$$\begin{aligned}
&\triangle\phi_B = 0 \longrightarrow \phi_{BC} = \phi_{BA} \longrightarrow X_1 \frac{L}{3\,EI} = -X_1 \frac{L}{3\,EI} - X_2 \frac{L}{6\,EI} \\
&\triangle\phi_C = 0 \longrightarrow \phi_{CB} = \phi_{CD} \longrightarrow X_1 \frac{L}{6\,EI} + X_2 \frac{L}{3\,EI} = -X_2 \frac{L}{3\,EI} + \phi \\
&\phi_G = 0 \longrightarrow -X_3 \frac{2\,L}{3\,EI} + \frac{\phi}{2} = 0
\end{aligned} \tag{10}$$

Inoltre, la struttura ammette il cinematismo di Figura 7, e su di esso occorre scrivere la condizione di *equilibrio* dettata dal principio dei lavori virtuali.

$$-X_2\,\phi - F\,L\,\phi - X_3\,\frac{\phi}{2} = 0 \qquad (11)$$

Queste quattro equazioni forniscono:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{16\,F\,L}{79} \\ X_2 &= -\frac{64\,F\,L}{79} \\ X_3 &= -\frac{30\,F\,L}{79} \\ \phi &= -\frac{40\,F\,L^2}{79\,EI} \end{aligned} \qquad (12)$$

■ Le caratteristiche della sollecitazione interna

Il diagramma del momento e' immediato, in quanto costituito da tratti lineari con valori noti agli estremi:

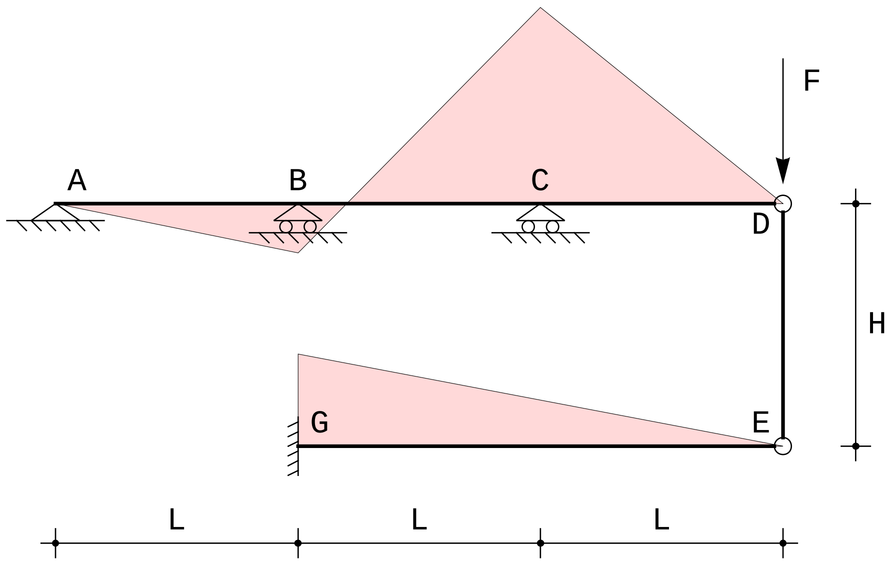

Figura 8 - Il diagramma dei momenti

I diagrammi di taglio e sforzo normale vengono lasciati come esercizio. Lo sforzo normale nel pendolo sara' pari a:

$$N_{ED} = -\frac{15}{79}\,F \qquad (13)$$

Nelle prossime Esercitazioni si calcoleranno le incognite iperstatiche attraverso il principio dei lavori virtuali, e si studieranno spostamenti, rotazioni e c.s.i. attraverso il metodo della linea elastica.

Figure

Vincoli