

22 - Il principio dei lavori virtuali

■ [A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 15 aprile 2013]

Esempio n .1

Si consideri il portale di Figura 1, semplicemente iperstatico. Si vuole applicare il principio dei lavori virtuali per il calcolo dell'incognita iperstatica, tenendo conto del contributo di taglio e sforzo normale

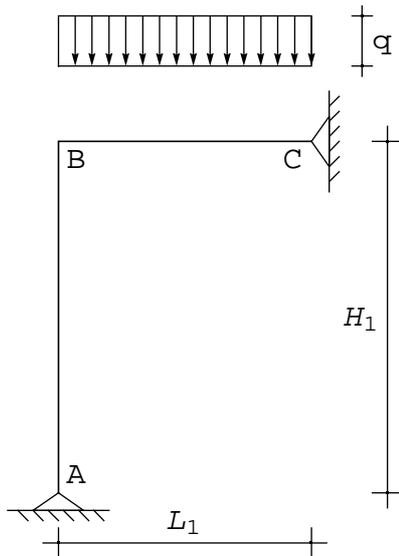


Figura 1 - Un portale semplicemente iperstatico

Si sceglie - come incognita iperstatica - la reazione orizzontale della cerniera in A, riducendosi quindi al sistema isostatico equivalente di Figura 2.

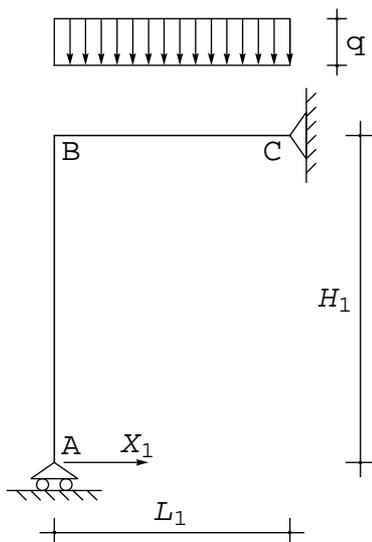


Figura 2 - Il sistema isostatico equivalente

Leggendo, come usuale, gli spostamenti sul sistema reale, e le forze sul sistema virtuale di Figura 3, si potrà scrivere il principio delle forze virtuali come segue:

$$\int_s M^{(1)} \frac{M}{EI} ds + \kappa \int_s T^{(1)} \frac{T}{GA} ds + \int_s N^{(1)} \frac{N}{EA} ds = 0 \quad (1)$$

Le caratteristiche $M^{(1)}$, $T^{(1)}$ ed $N^{(1)}$ sono da calcolare sullo schema di Figura 3, e rappresentano il contributo del sistema di forze virtuali, mentre le caratteristiche M , T ed N sono da calcolare sul sistema effettivo di Figura 1, o più appropriatamente sul sistema isostatico equivalente. Sarà allora, per il principio di sovrapposizione degli effetti:

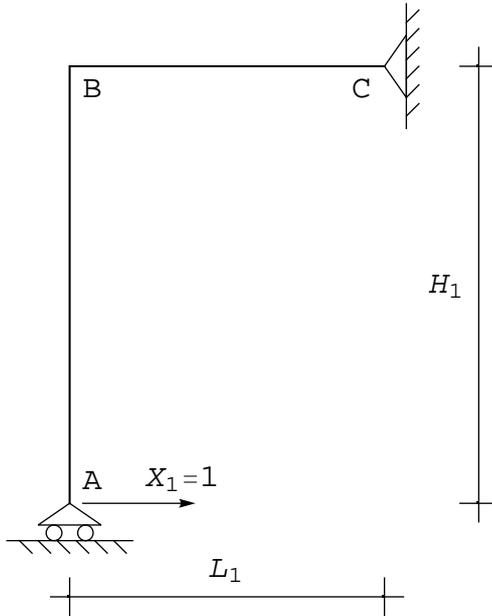


Figura 3 - Il sistema S_1 di forze virtuali

$$\begin{aligned} M &= M^{(0)} + M^{(1)} X_1 \\ T &= T^{(0)} + T^{(1)} X_1 \\ N &= N^{(0)} + N^{(1)} X_1 \end{aligned} \quad (2)$$

dove le caratteristiche $M^{(0)}$, $T^{(0)}$ ed $N^{(0)}$ vanno calcolate sullo schema S_0 , caricato dai soli carichi esterni.

Utilizzando le (2), il p.l.v. si scrive :

$$\begin{aligned} &\int_s M^{(1)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds + \kappa \int_s T^{(1)} \frac{T^{(0)}}{GA} ds + \int_s N^{(1)} \frac{N^{(0)}}{EA} ds + \\ &X_1 \left(\int_s \frac{M^{(1)2}}{EI} ds + \kappa \int_s \frac{T^{(1)2}}{GA} ds + \int_s \frac{N^{(1)2}}{EA} ds \right) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

da cui può ottenersi l'incognita iperstatica X_1 .

■ Il calcolo di $\int_s \frac{M^{(1)2}}{EI} ds$, $\int_s \frac{T^{(1)2}}{GA} ds$, $\int_s \frac{N^{(1)2}}{EA} ds$

Il diagramma del momento $M^{(1)}$ è riportato in Figura 4, e l'integrale non presenta particolari difficoltà:

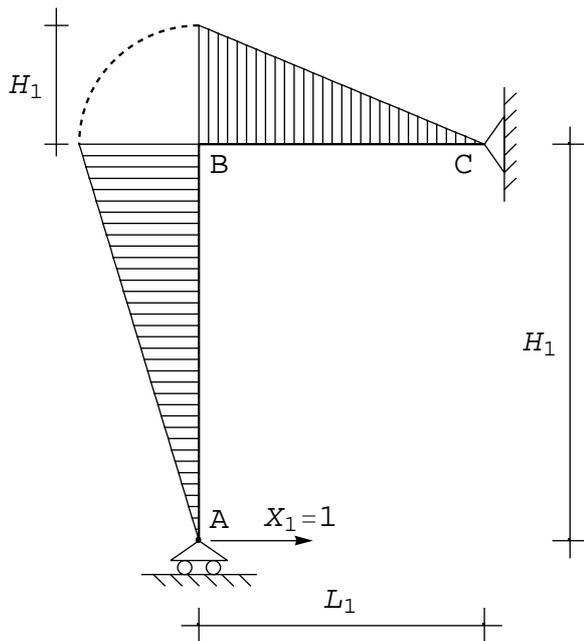


Figura 4 - Il diagramma del momento sul sistema S_1

$$\int_s \frac{M^{(1)2}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_0^{H_1} z^2 dz + \frac{H_1}{EI} \int_0^{L_1} \left(1 - \frac{z}{L_1}\right)^2 dz = \frac{H_1^3}{3EI} + \frac{H_1^2 L_1}{3EI} \quad (4)$$

I diagrammi del taglio e dello sforzo normale possono tracciarsi partendo dalla conoscenza delle reazioni:

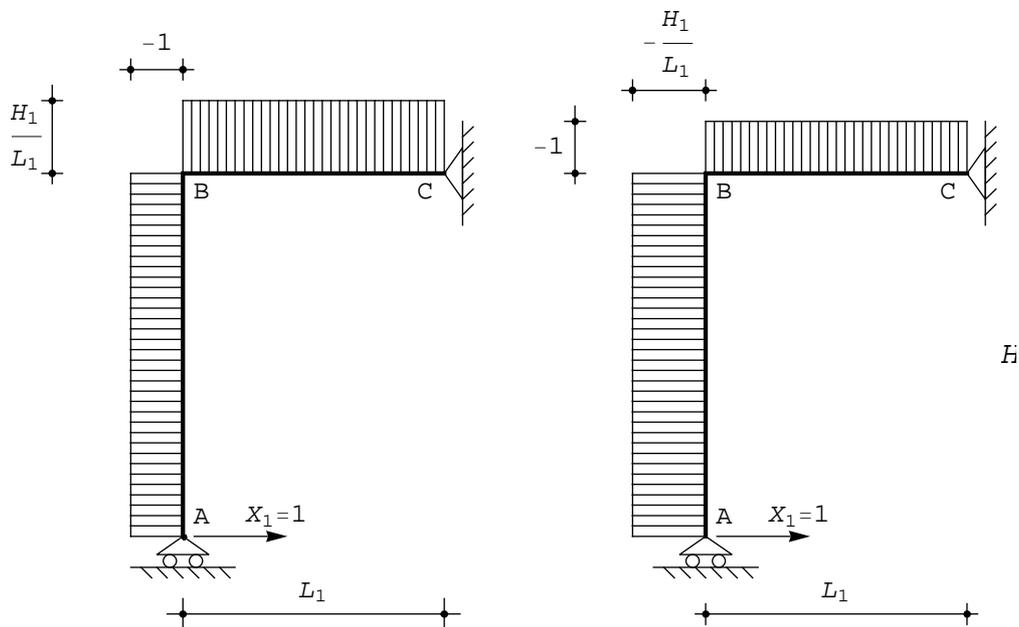


Figura 5 - I diagrammi del taglio e dello sforzo normale sul sistema S_1

$$\begin{aligned}
 R_{Av} &= -\frac{H_1}{L_1} \\
 R_{Ch} &= -1 \\
 R_{Cv} &= \frac{H_1}{L_1}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Sul ritto AB, si avra' quindi :

$$\begin{aligned}
 T_{AB} &= -1 \\
 N_{AB} &= -\frac{H_1}{L_1}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

mentre l'equilibrio del concio in B permette di dedurre:

$$\begin{aligned}
 T_{BC} &= \frac{H_1}{L_1} \\
 N_{BC} &= -1
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

come illustrato in Figura 6. Si ricorda che la convenzione sui segni degli sforzi normali prevede che essi siano positivi se di trazione, mentre i tagli sono positivi se fanno ruotare il concio in senso orario.

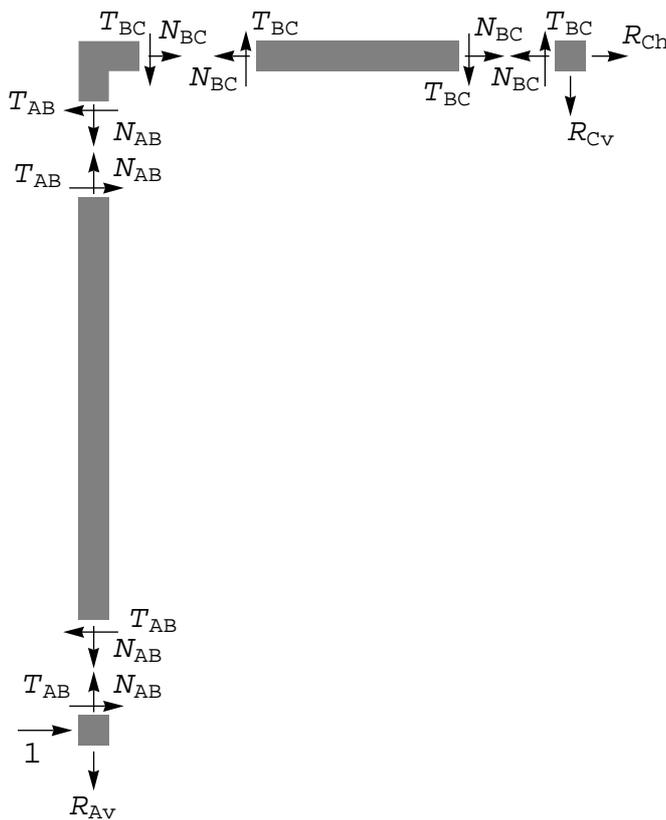


Figura 6 - I diagrammi delle forze per il calcolo di sforzi normali e tagli

Data la costanza dei diagrammi in questione, gli integrali sono banali :

$$\int_s \frac{T^{(1)2}}{GA} ds = \frac{H_1}{GA} + \frac{H_1^2}{L_1 GA}
 \tag{8}$$

$$\int_s \frac{N^{(1)2}}{EA} ds = \frac{H_1^2}{EA L_1^2} H_1 + \frac{L_1}{EA} \quad (9)$$

■ Il calcolo di $\int_s \frac{M^{(0)} M^{(1)}}{EI} ds$, $\int_s \frac{T^{(0)} T^{(1)}}{GA} ds$, $\int_s \frac{N^{(0)} N^{(1)}}{EA} ds$

Il diagramma del momento $M^{(0)}$, da calcolare sullo schema S_0 di Figura 7, e' diverso da zero solo sul travaso, mentre risulta nullo lungo il piedritto, ed il suo andamento e' quello da trave semplicemente appoggiata. Sara' quindi:

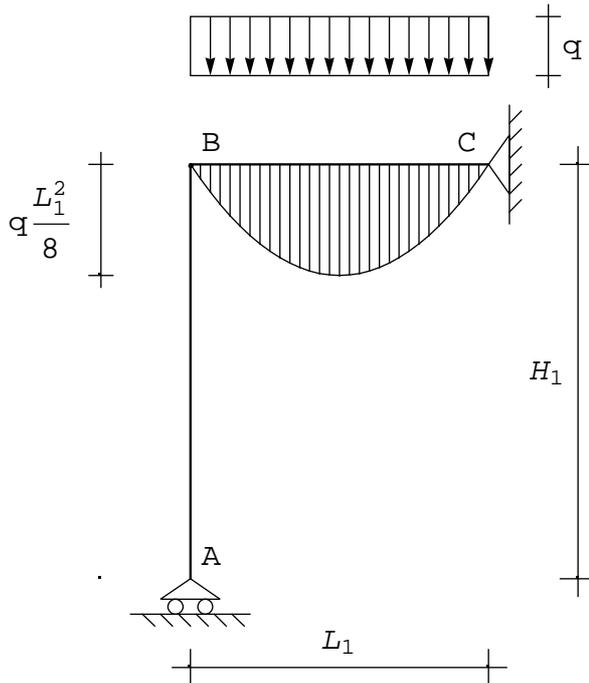


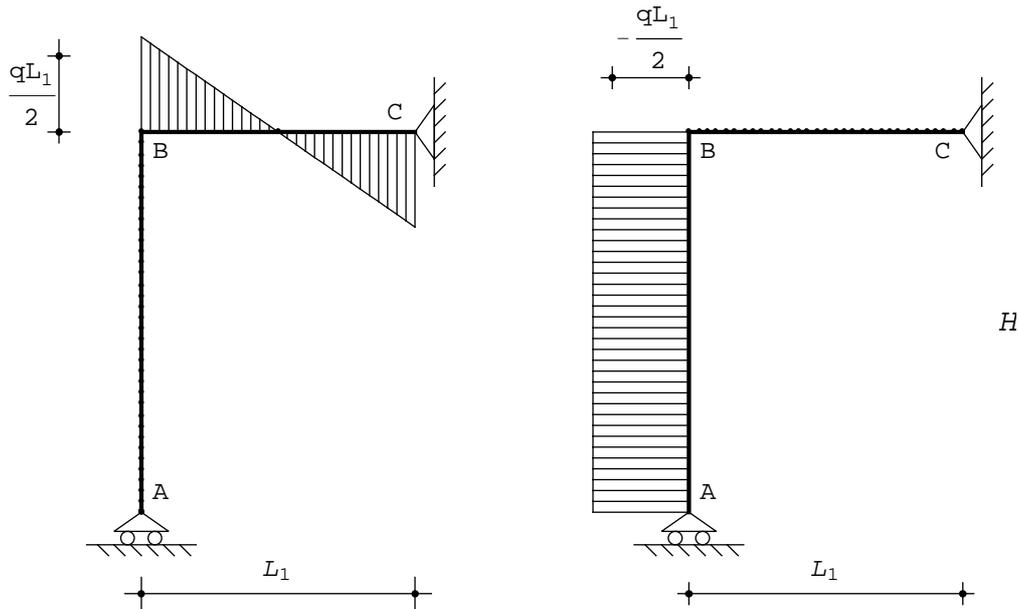
Figura 7 - Il diagramma del momento sul sistema S_0

$$\int_s \frac{M^{(0)} M^{(1)}}{EI} ds = - \frac{q H_1}{2 EI} \int_0^{L_1} z (L_1 - z) \left(1 - \frac{z}{L_1}\right) dz = - \frac{q H_1 L_1^3}{24 EI} \quad (10)$$

I diagrammi di taglio $T^{(0)}$ e di sforzo normale $N^{(0)}$ sono riportati in Figura 8

$$\int_s \frac{T^{(0)} T^{(1)}}{GA} ds = - \frac{q H_1}{2 L_1 GA} \int_0^{L_1} \left(\frac{L_1}{2} - z\right) dz = 0 \quad (11)$$

$$\int_s \frac{N^{(0)} N^{(1)}}{EA} ds = - \frac{q H_1 L_1}{2 L_1 EA} \int_0^{H_1} dz = - \frac{q H_1^2}{2 EA} \quad (12)$$

Figura 8 - Il diagramma del taglio e dello sforzo normale sul sistema S_0

■ Il calcolo dell' incognita iperstatica

Dalla (3) si ha subito:

$$X_1 = - \frac{\int_S M^{(1)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds + \kappa \int_S T^{(1)} \frac{T^{(0)}}{GA} ds + \int_S N^{(1)} \frac{N^{(0)}}{EA} ds}{\int_S \frac{M^{(1)2}}{EI} ds + \kappa \int_S \frac{T^{(1)2}}{GA} ds + \int_S \frac{N^{(1)2}}{EA} ds} \quad (13)$$

ossia :

$$X_1 = \frac{\frac{q H_1 L_1^3}{24 EI} + \frac{q H_1^2}{2 EA}}{\frac{H_1^3}{3 EI} + \frac{H_1^2 L_1}{3 EI} + \kappa \left(\frac{H_1}{GA} + \frac{H_1^2}{L_1 GA} \right) + \frac{H_1^3}{EA L_1^2} + \frac{L_1}{EA}} \quad (14)$$

Se si vogliono trascurare le deformazioni taglianti, occorre eliminare da questa formula i termini in cui compare la rigidezza tagliente GA , che si suppone infinita. Ne segue:

$$X_1 = \frac{\frac{q H_1 L_1^3}{24 EI} + \frac{q H_1^2}{2 EA}}{\frac{H_1^3}{3 EI} + \frac{H_1^2 L_1}{3 EI} + \frac{H_1^3}{EA L_1^2} + \frac{L_1}{EA}} \quad (15)$$

Se si vuole trascurare anche la deformazione da sforzo assiale, occorre eliminare dalla (15) i termini in cui compare la rigidezza assiale EA , che si suppone infinita:

$$X_1 = \frac{\frac{q H_1 L_1^3}{24 EI}}{\frac{H_1^3}{3 EI} + \frac{H_1^2 L_1}{3 EI}} = \frac{q}{8} \frac{L_1^3}{H_1 (H_1 + L_1)} \quad (16)$$

Esempio n .2

Lo stesso telaio dell' esempio precedente subisce anche un cedimento anelastico orizzontale della cerniera di sinistra, che si sposta della quantità δ . Studiare la struttura con l'ausilio del principio dei lavori virtuali, trascurando gli effetti delle deformazioni taglianti ed assiali.

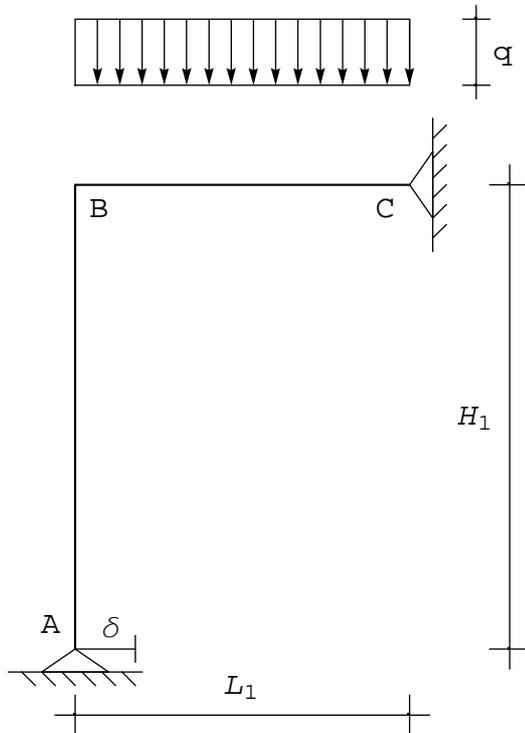


Figura 9 - La presenza di un vincolo imperfetto

In questo caso, il lavoro esterno compiuto dalla forza virtuale unitaria in A non e' nullo, e quindi il p.l.v. si scrive, limitandosi ai soli effetti flessionali:

$$\int_{\mathcal{S}} M^{(1)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds + X_1 \int_{\mathcal{S}} \frac{M^{(1)2}}{EI} ds = 1 \times \delta \quad (17)$$

e quindi, utilizzando i valori degli integrali gia' dedotti:

$$X_1 = \frac{\left(1 \times \delta - \int_{\mathcal{S}} M^{(1)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds \right)}{\int_{\mathcal{S}} \frac{M^{(1)2}}{EI} ds} = \frac{\delta - \frac{q H_1 L_1^3}{24 EI}}{-\frac{H_1^3}{3 EI} + \frac{H_1^2 L_1}{3 EI}} = \frac{-24 EI \delta + q H_1 L_1^3}{8 H_1^2 (H_1 - L_1)} \quad (18)$$

Esempio n .3

Si consideri ora il portale sospeso di Figura 10, costituito da tre tratti di diversa sezione retta, con momento di inerzia I_1 (tratto AB), I_2 (tratto BC) ed I_3 (tratto CD), soggetto ad una forza orizzontale concentrata ad altezza H_3 .

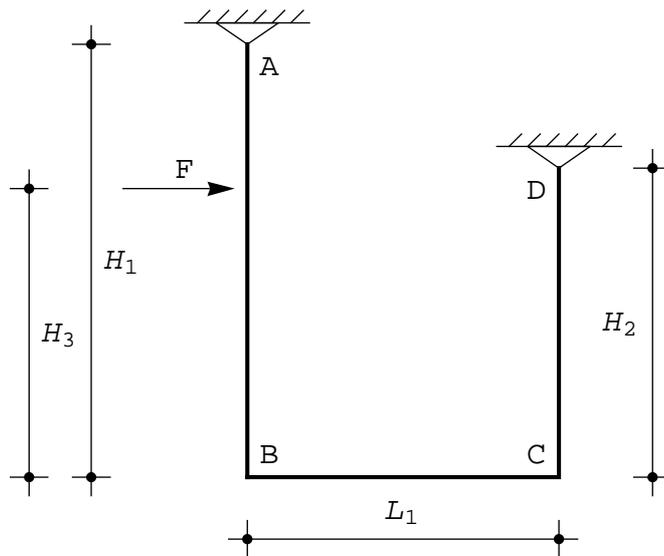


Figura 10 - Un portale sospeso

La struttura e' una volta iperstatica, e come struttura isostatica equivalente si sceglie' il sistema di Figura 11.

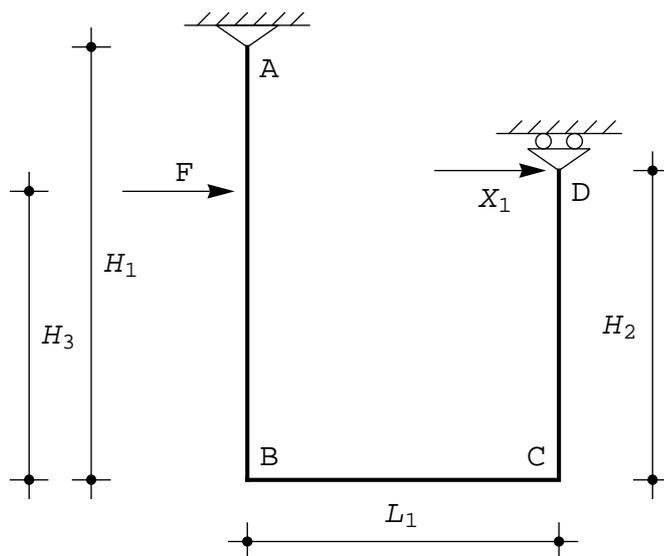


Figura 11 - Un S.I.E. per il portale sospeso

Sullo schema S_0 le reazioni possono calcolarsi a partire dalle tre equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} R_{Ah} &= -F \\ R_{Dv} &= F \frac{H_1 - H_3}{L_1} \\ R_{Av} &= -R_{Dv} \end{aligned} \quad (19)$$

ed il relativo diagramma $M^{(0)}$ del momento si presenta come in Figura 12:

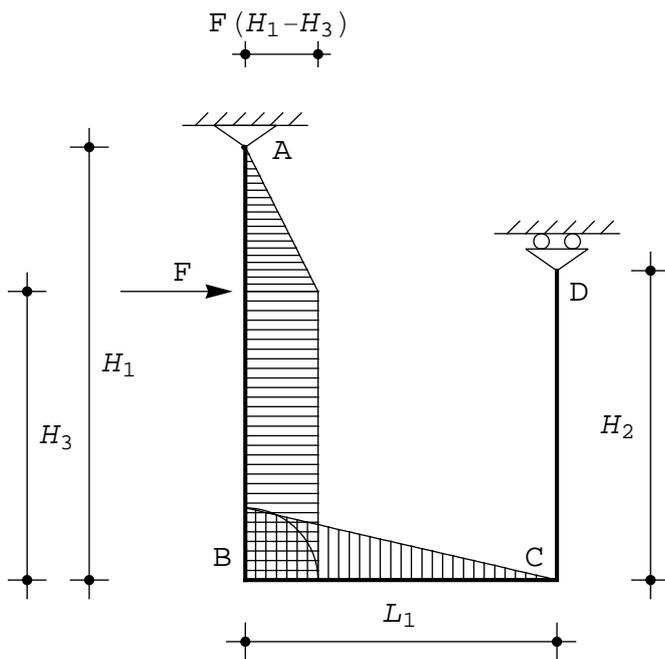


Figura 12 - Il diagramma $M^{(0)}$ per il portale sospeso

Sullo schema S_1 le equazioni di equilibrio forniscono:

$$\begin{aligned}
 R_{Ah} &= -1 \\
 R_{Dv} &= \frac{H_1 - H_2}{L_1} \\
 R_{Av} &= -R_{Dv}
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Ne segue che il momento assume l'aspetto di Figura 13, variando linearmente lungo il traverso dal valore $1 \times H_1$ a sinistra, al valore $1 \times H_2$ a destra.

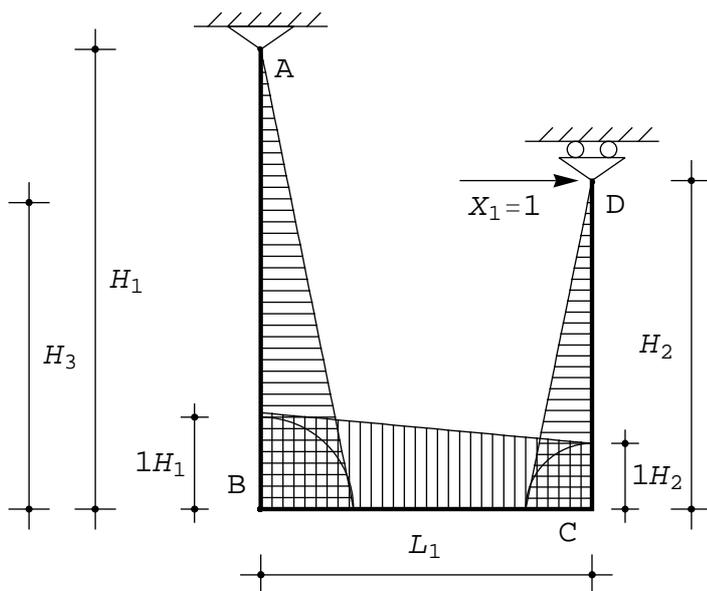


Figura 13 - Il diagramma $M^{(1)}$ per il portale sospeso

Il principio dei lavori virtuali, limitandosi agli effetti flessionali, si scrivera':

$$\int_s M^{(1)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds + X_1 \int_s \frac{M^{(1)2}}{EI} ds = 0 \quad (21)$$

ed occorrerà esplicitare gli integrali, basandosi sui diagrammi precedenti.

■ Il calcolo di $\int_s \frac{M^{(0)} M^{(1)}}{EI} ds$

Si divide l'integrale in più tratti, scrivendo:

$$\int_s M^{(1)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds = \int_{H_3}^{H_1} M^{(1)} \frac{M^{(0)}}{EI_1} dz + \int_0^{H_3} M^{(1)} \frac{M^{(0)}}{EI_1} dz + \int_0^{L_1} M^{(1)} \frac{M^{(0)}}{EI_2} dz \quad (22)$$

Si noti che il ritto di destra non compare, in quanto su di esso il momento $M^{(0)}$ è nullo, e che si è diviso in due il ritto di sinistra. Le espressioni analitiche sono molto semplici:

per il primo tratto, da A all'ascissa della forza F, si sceglie l'origine in A, ottenendo:

$$\begin{aligned} M^{(0)} &= F z \\ M^{(1)} &= z \end{aligned} \quad (23)$$

per il secondo tratto, dall'ascissa della forza F, al punto B, si sceglie l'origine in B, ottenendo:

$$\begin{aligned} M^{(0)} &= F (H_1 - H_3) \\ M^{(1)} &= H_1 - z \end{aligned} \quad (24)$$

per il terzo tratto, dal punto B al punto C, si sceglie l'origine in B, ottenendo:

$$\begin{aligned} M^{(0)} &= F (H_1 - H_3) \left(1 - \frac{z}{L_1} \right) \\ M^{(1)} &= H_1 - (H_1 - H_2) \frac{z}{L_1} \end{aligned} \quad (25)$$

e quindi il richiesto integrale può dedursi come

$$\begin{aligned} \int_s M^{(1)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds &= \frac{F}{EI_1} \int_0^{H_1-H_3} z^2 dz + \frac{F (H_1 - H_3)}{EI_1} \int_0^{H_3} (H_1 - z) dz + \\ &\frac{F (H_1 - H_3)}{EI_2} \int_0^{L_1} \left(1 - \frac{z}{L_1} \right) \left(H_1 - (H_1 - H_2) \frac{z}{L_1} \right) dz = \\ &\frac{F (H_1 - H_3)^3}{3 EI_1} + \frac{F (H_1 - H_3) \left(H_1 H_3 - \frac{H_3^2}{2} \right)}{EI_1} + \frac{F (H_1 - H_3) \left(\frac{H_1 L_1}{3} + \frac{H_2 L_1}{6} \right)}{EI_2} \end{aligned} \quad (26)$$

■ Il calcolo di $\int_s \frac{M^{(1)2}}{EI} ds$

Alle leggi di variazione di $M^{(1)}$ già dedotte, deve aggiungersi la legge di variazione lungo il ritto di destra. Scegliendo l'origine del riferimento in D si ottiene:

$$M^{(1)} = z \quad (27)$$

e quindi subito:

$$\int_s \frac{M^{(1)2}}{EI} ds =$$

$$\frac{1}{EI_1} \int_0^{H_1} z^2 ds + \frac{1}{EI_2} \int_0^{L_1} \left(H_1 + (H_2 - H_1) \frac{z}{L_1} \right)^2 ds + \frac{1}{EI_3} \int_0^{H_2} z^2 ds =$$

$$\frac{H_1^3}{3 EI_1} + \frac{H_2^3}{3 EI_3} + \frac{\frac{1}{3} H_1^2 L_1 + \frac{1}{3} H_1 H_2 L_1 + \frac{1}{3} H_2^2 L_1}{EI_2}$$

■ Il calcolo dell' incognita iperstatica

Si ha immediatamente, dalla (21) :

$$X_1 = - \frac{\frac{F (H_1 - H_3)^3}{3 EI_1} + \frac{F (H_1 - H_3) \left(H_1 H_3 - \frac{H_3^2}{2} \right)}{EI_1} + \frac{F (H_1 - H_3) \left(\frac{H_1 L_1}{3} + \frac{H_2 L_1}{6} \right)}{EI_2}}{\frac{H_1^3}{3 EI_1} + \frac{H_2^3}{3 EI_3} + \frac{\frac{1}{3} H_1^2 L_1 + \frac{1}{3} H_1 H_2 L_1 + \frac{1}{3} H_2^2 L_1}{EI_2}} \quad (29)$$

ossia, semplificando:

$$X_1 = -F \frac{I_3 \left(I_2 \left(2 H_1^3 - 3 H_1 H_2^2 + H_3^3 \right) + I_1 \left(2 H_1 + H_2 \right) \left(H_1 - H_3 \right) L_1 \right)}{2 I_2 \left(I_3 H_1^3 + I_1 H_2^3 \right) + 2 I_1 I_3 \left(H_1^2 + H_1 H_2 + H_2^2 \right) L_1} \quad (30)$$

Esempio n. 4

Si vuole ora studiare il telaio di Figura 14, tenendo conto dei soli effetti della deformabilità flessionale.

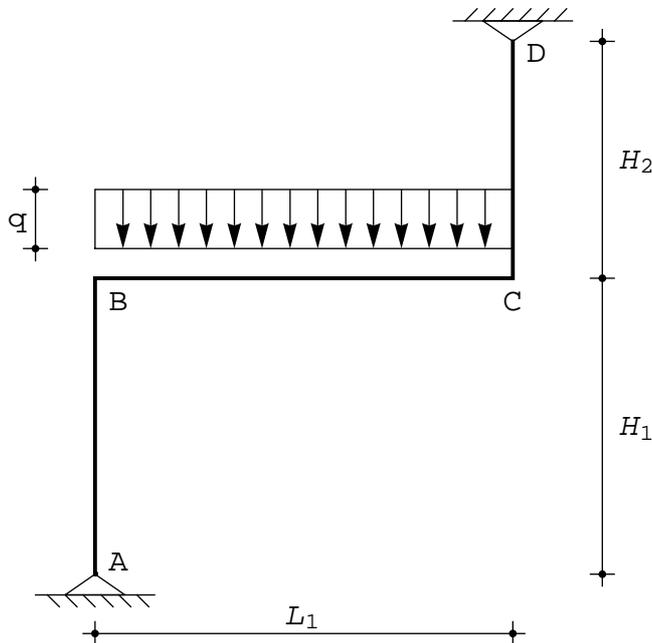


Figura 14 - Un telaio semplicemente iperstatico

Si utilizza il sistema isostatico equivalente di Figura 15, dove è anche evidenziata l'incognita iperstatica X_1 .

Il principio dei lavori virtuali, limitandosi agli effetti flessionali, si scriverà:

$$\int_s M^{(1)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds + X_1 \int_s \frac{M^{(1)2}}{EI} ds = 0 \quad (31)$$

dove i diagrammi $M^{(0)}$ ed $M^{(1)}$ devono essere calcolati sullo schema S_0 , in presenza del solo carico applicato q , ed S_1 , in presenza di una incognita iperstatica unitaria $X_1=1$.

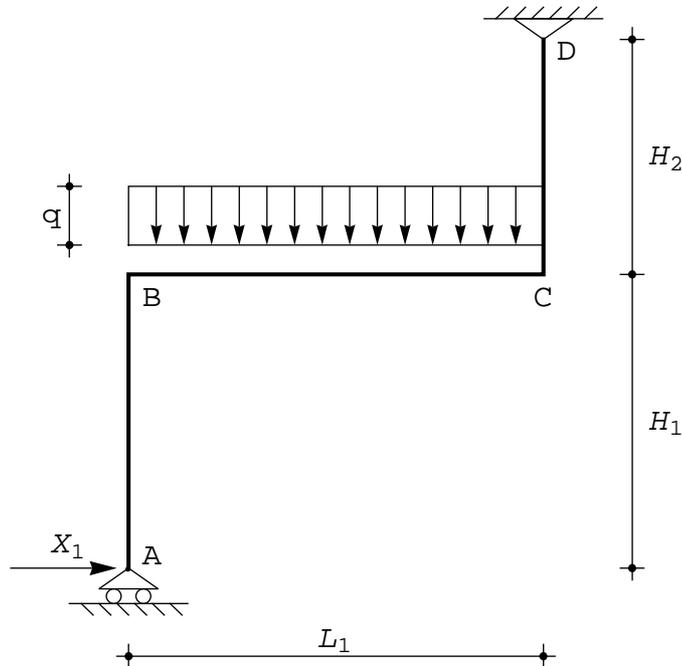


Figura 15 - Un S.I.E. per il telaio semplicemente iperstatico di Figura 14

Le reazioni vincolari per lo schema S_0 sono ricavabili dalle tre equazioni di equilibrio:

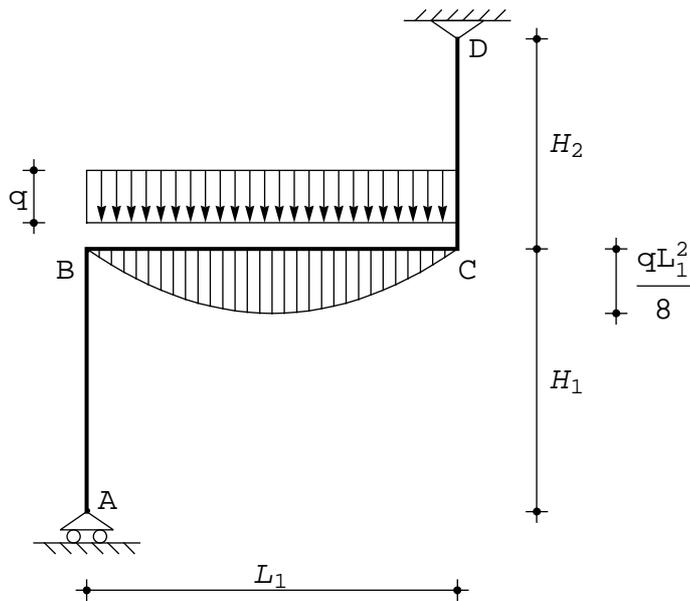
$$\begin{aligned} R_{Dh} &= 0 \\ R_{Av} + R_{Dv} + qL_1 &= 0 \\ \frac{qL_1^2}{2} + R_{Av} L_1 &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

da cui subito :

$$\begin{aligned} R_{Dh} &= 0 \\ R_{Av} &= -\frac{qL_1}{2} \\ R_{Dv} &= -\frac{qL_1}{2} \end{aligned} \quad (33)$$

Il diagramma dei momenti e' quindi limitato al traverso, dove assume l'aspetto quadratico, ed ha equazione (origine in B):

$$M^{(0)} = q \frac{z}{2} (L_1 - z) \quad (34)$$

Figura 16 - Il diagramma $M^{(0)}$

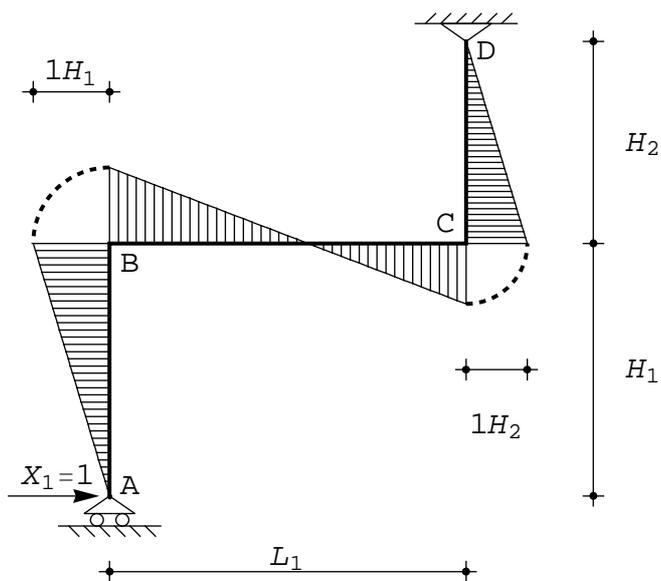
Sullo schema S_1 , le equazioni di equilibrio si scrivono, scegliendo il polo in D:

$$\begin{aligned} R_{Dh} + 1 &= 0 \\ R_{Av} + R_{Dv} &= 0 \\ R_{Av} L_1 + 1 (H_1 + H_2) &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

da cui subito :

$$R_{Dh} = -1; \quad R_{Av} = -\frac{H_1 + H_2}{L_1}; \quad R_{Dv} = \frac{H_1 + H_2}{L_1} \quad (36)$$

ed il diagramma dei momenti e' riportato in Figura 17

Figura 17 -Il diagramma $M^{(1)}$

Il calcolo di $\int_{\mathbf{s}} \frac{\mathbf{M}^{(0)} \mathbf{M}^{(1)}}{EI} d\mathbf{s}$

L'integrale sarà diverso da zero solo lungo il traverso, dove può scriversi (origine in B):

$$\int_{\mathbf{s}} M^{(1)} \frac{M^{(0)}}{EI} d\mathbf{s} = -\frac{q}{2EI} \int_0^{L_1} z (L_1 - z) \left(H_1 - (H_1 + H_2) \frac{z}{L_1} \right) dz = -\frac{qL_1^3}{24EI} (H_1 - H_2) \quad (37)$$

Si noti subito che, se i ritti hanno uguale lunghezza, tale integrale si annulla, in quanto prodotto di una funzione simmetrica per una antisimmetrica:

■ Il calcolo di $\int_{\mathbf{s}} \frac{M^{(1)2}}{EI} d\mathbf{s}$

L'integrale potrà essere suddiviso in tre tratti:

$$\int_{\mathbf{s}} \frac{M^{(1)2}}{EI} d\mathbf{s} = \frac{1}{EI} \int_0^{H_1} z^2 dz + \frac{1}{EI} \int_0^{L_1} \left(H_1 - (H_1 + H_2) \frac{z}{L_1} \right)^2 dz + \frac{1}{EI} \int_0^{H_2} z^2 dz = \frac{H_1^3}{3EI} + \frac{H_2^3}{3EI} + \frac{(H_1^2 - H_1 H_2 + H_2^2) L_1}{3EI} \quad (38)$$

L'incognita iperstatica, quindi, sarà fornita da :

$$X_1 = \frac{qL_1^3}{8} \frac{H_1 - H_2}{H_1^3 + H_2^3 + (H_1^2 - H_1 H_2 + H_2^2) L_1} \quad (39)$$

■ L' influenza dello sforzo normale

Nei casi in cui H_1 ed H_2 assumono valori molto prossimi, se non addirittura coincidenti, il valore dell'incognita iperstatica X_1 diviene molto piccolo, ed è opportuno indagare se l'influenza dello sforzo normale non possa essere rilevante. A ciò fare occorre calcolare il diagramma $N^{(0)}$ sullo schema S_0 ed il diagramma $N^{(1)}$ sullo schema S_1 . Nel primo caso, le reazioni (33) garantiscono l'assenza di sforzi normali sul traverso, mentre i due ritti vedranno uno sforzo normale costante, e pari alla metà della risultante del carico applicato:

$$N_{AB}^{(0)} = R_{Av} = -\frac{qL_1}{2} \quad (40)$$

$$N_{CD}^{(0)} = -R_{Dv} = \frac{qL_1}{2} \quad (41)$$

Come ovvio, il ritto di sinistra risulta compresso, quello di destra è teso.

Nel secondo caso, invece, le reazioni (36) implicano uno sforzo normale nel traverso pari a -1, mentre per i ritti si ha, analogamente al caso precedente:

$$N_{AB}^{(1)} = R_{Av} = -\frac{H_1 + H_2}{L_1} \quad (42)$$

$$N_{CD}^{(0)} = -R_{Dv} = -\frac{H_1 + H_2}{L_1} \quad (43)$$

e si noti che ora ambedue i ritti risultano compressi. Cio' basta a calcolare gli integrali richiesti per il principio dei lavori virtuali:

$$\int_s N^{(1)} \frac{N^{(0)}}{EA} ds = \frac{q}{2EA} (H_1^2 - H_2^2) \quad (44)$$

$$\int_s \frac{N^{(1)2}}{EA} ds = \frac{1}{EA} \left(\frac{H_1 + H_2}{L_1} \right)^2 (H_1 + H_2) + \frac{L_1}{EA} \quad (45)$$

Esempio n .5

Si vuol calcolare le incognite iperstatiche per la struttura di Figura 18. Essa e' tre volte iperstatica, e come struttura isostatica equivalente si sceglie la trave di Figura 19.

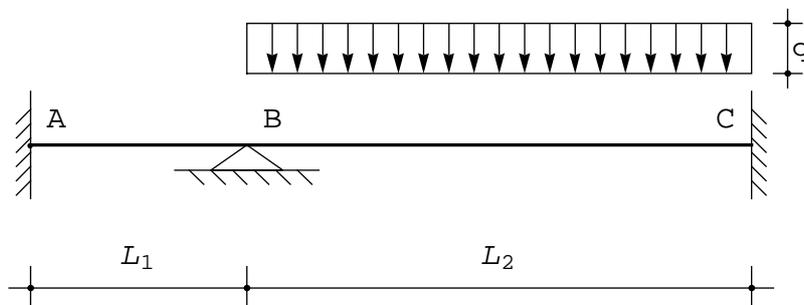


Figura 18 -Una trave tre volte iperstatica

Tale scelta, come noto, risulta particolarmente conveniente, in quanto suddivide la trave originaria in due distinte travi semplicemente appoggiate. Sullo schema S_0 , ad esempio, il diagramma del momento e' limitato alla seconda campata, e coincide con quello di trave semplicemente appoggiata in B e C.

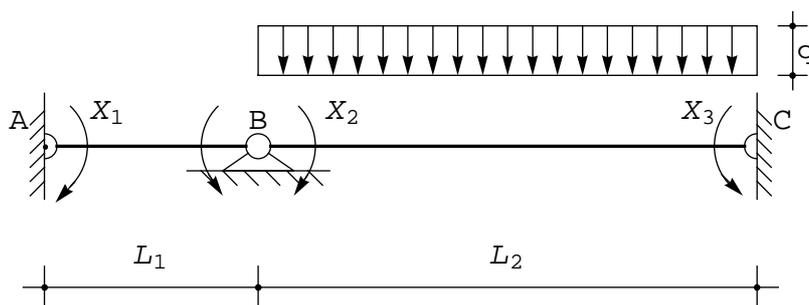


Figura 19 -Un S.I.E. per la trave di Figura 18

Si potra' scrivere, simbolicamente :

$$S . I . E . = S_0 + X_1 S_1 + X_2 S_2 + X_3 S_3 \quad (46)$$

ed i sistemi S_0 , S_1 , S_2 ed S_3 sono presentati nella Figure 20-23, insieme ai relativi diagrammi dei momenti. Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il momento sulla struttura effettiva sara' pari a:

$$M = M^{(0)} + X_1 M^{(1)} + X_2 M^{(2)} + X_3 M^{(3)} \quad (47)$$

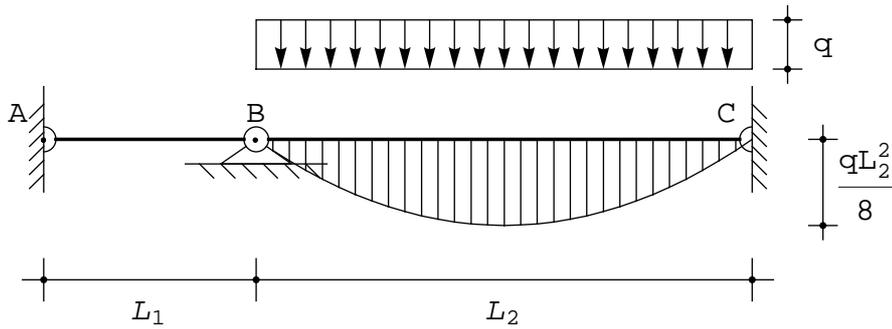


Figura 20 -Il diagramma del momento per il sistema S_0

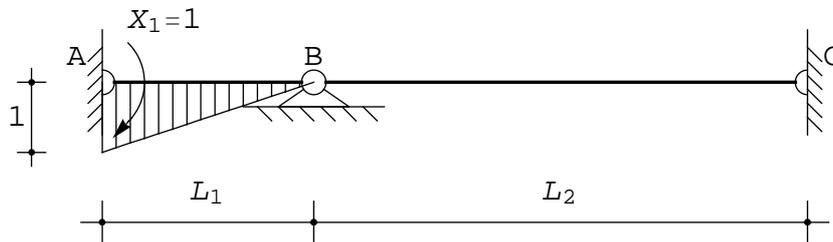


Figura 21 -Il diagramma del momento per il sistema S_1

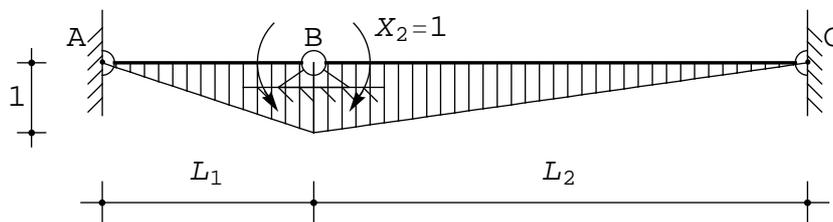


Figura 22 -Il diagramma del momento per il sistema S_2

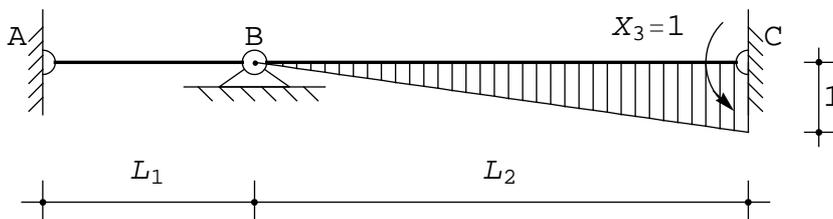


Figura 23 -Il diagramma del momento per il sistema S_3

Si scriva ora il principio dei lavori virtuali, assumendo come insieme di forze (virtuali) quelle agenti sul sistema S_1 , e come insieme di spostamenti quelli effettivi, calcolabili sul S.I.E.. Limitandosi ai soli effetti flessionali, si ha:

$$\int_s M^{(1)} \frac{M}{EI} ds = 0 \quad (48)$$

Analogamente, possono scriversi altre due equazioni, scegliendo come insieme di forze quelli agenti sul

sistema S_2 e rispettivamente sul sistema S_3 , e come spostamenti quelli effettivi:

$$\int_s M^{(2)} \frac{M}{EI} ds = 0 \quad (49)$$

$$\int_s M^{(3)} \frac{M}{EI} ds = 0 \quad (50)$$

Utilizzando la (47) si giunge quindi ad un sistema di tre equazioni nelle tre incognite iperstatiche:

$$\begin{aligned} X_1 \int_s \frac{M^{(1)2}}{EI} ds + X_2 \int_s M^{(1)} \frac{M^{(2)}}{EI} ds + X_3 \int_s M^{(1)} \frac{M^{(3)}}{EI} ds = \\ - \int_s M^{(1)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds \\ X_1 \int_s M^{(2)} \frac{M^{(1)}}{EI} ds + X_2 \int_s \frac{M^{(2)2}}{EI} ds + X_3 \int_s M^{(2)} \frac{M^{(3)}}{EI} ds = \\ - \int_s M^{(2)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds \\ X_1 \int_s M^{(3)} \frac{M^{(1)}}{EI} ds + X_2 \int_s M^{(3)} \frac{M^{(2)}}{EI} ds + X_3 \int_s \frac{M^{(3)2}}{EI} ds = \\ - \int_s M^{(3)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds \end{aligned} \quad (51)$$

i cui coefficienti possono agevolmente dedursi a partire dalle leggi di variazione dei momenti:

$$\int_s M^{(1)2} ds = \int_0^{L_1} \left(1 - \frac{z}{L_1}\right)^2 dz = \frac{L_1}{3} \quad (52)$$

$$\int_s M^{(1)} M^{(2)} ds = \int_0^{L_1} \left(1 - \frac{z}{L_1}\right) \frac{z}{L_1} dz = \frac{L_1}{6} \quad (53)$$

$$\int_s M^{(1)} M^{(3)} ds = 0 \quad (54)$$

$$\int_s M^{(2)2} ds = \int_0^{L_1} \left(\frac{z}{L_1}\right)^2 dz + \int_0^{L_2} \left(1 - \frac{z}{L_2}\right)^2 dz = \frac{L_1}{3} + \frac{L_2}{3} \quad (55)$$

$$\int_s M^{(2)} M^{(3)} ds = \int_0^{L_2} \left(1 - \frac{z}{L_2}\right) \frac{z}{L_2} dz = \frac{L_2}{6} \quad (56)$$

$$\int_s M^{(3)2} ds = \int_0^{L_2} \left(1 - \frac{z}{L_2}\right)^2 dz = \frac{L_2}{3} \quad (57)$$

$$\int_s M^{(1)} M^{(0)} ds = 0 \quad (58)$$

$$\int_s M^{(2)} M^{(0)} ds = \frac{q}{2} \int_0^{L_2} \left(1 - \frac{z}{L_2}\right) z (L_2 - z) dz = \frac{q L_2^3}{24} \quad (59)$$

$$\int_s M^{(3)} M^{(0)} ds = \frac{q}{2} \int_0^{L_2} \frac{z}{L_2} z (L_2 - z) dz = \frac{q L_2^3}{24} \quad (60)$$

Il sistema (51) si scrive allora come :

$$\begin{aligned} \frac{L_1}{3} X_1 + \frac{L_1}{6} X_2 &= 0 \\ \frac{L_1}{6} X_1 + \left(\frac{L_1}{3} + \frac{L_2}{3} \right) X_2 + \frac{L_2}{6} X_3 &= - \frac{q L_2^3}{24} \\ \frac{L_2}{6} X_2 + \frac{L_2}{3} X_3 &= - \frac{q L_2^3}{24} \end{aligned} \quad (61)$$

con soluzione :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{q L_2^3}{24 (L_1 + L_2)} \\ X_2 &= - \frac{q L_2^3}{12 (L_1 + L_2)} \\ X_3 &= - \frac{L_2^2 (3 q L_1 + 2 q L_2)}{24 (L_1 + L_2)} \end{aligned} \quad (62)$$

Esempio n .6

Si consideri la struttura di Figura 24, una volta iperstatica, e si voglia utilizzare il principio dei lavori virtuali al fine di ottenere l'incognita iperstatica. Attesa la geometria della struttura, si vuole tener conto degli effetti da deformazione assiale delle due aste.

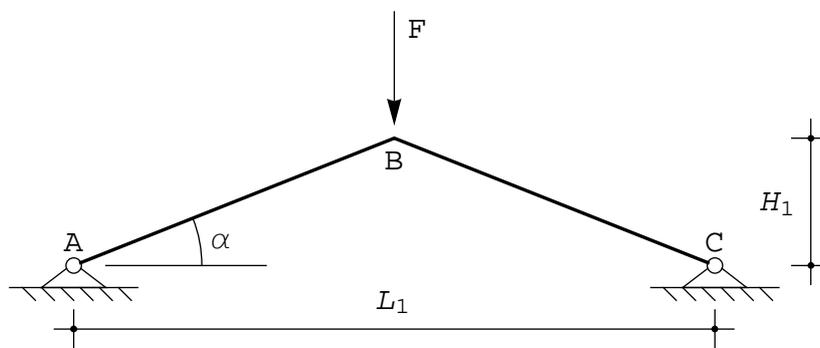


Figura 24 -Una struttura spingente semplicemente iperstatica

Si scelga, quale sistema isostatico equivalente, la struttura di Figura 25, ottenuta posizionando una cerniera in mezzeria.

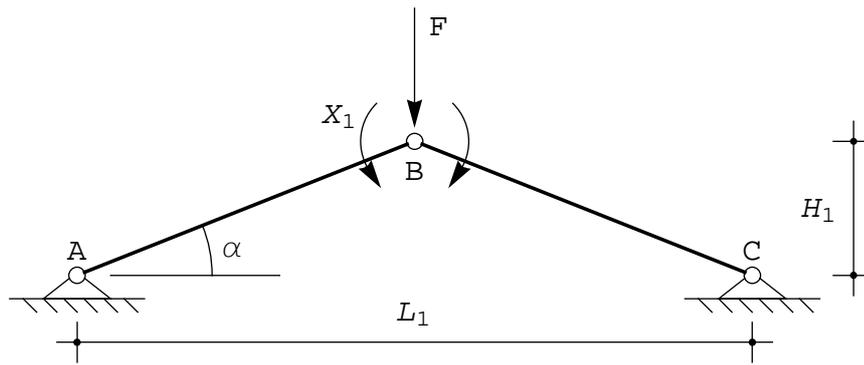
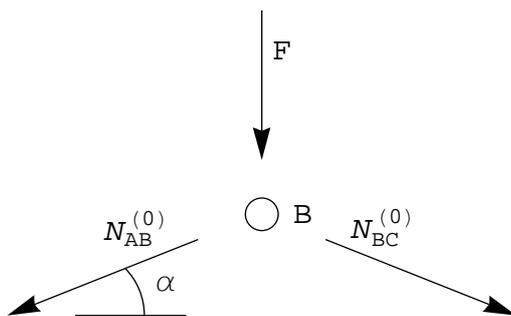


Figura 25 -Un S.I.E. per la struttura di Figura 24

■ L' esame del sistema S_0

Sulla struttura S_0 , caricata dalla forza F , il diagramma del momento risulta identicamente nullo, mentre gli sforzi assiali nelle due aste possono calcolarsi dalle equazioni di equilibrio della cerniera in B:

Figura 26 -L'equilibrio della cerniera in sommita' per il sistema S_0

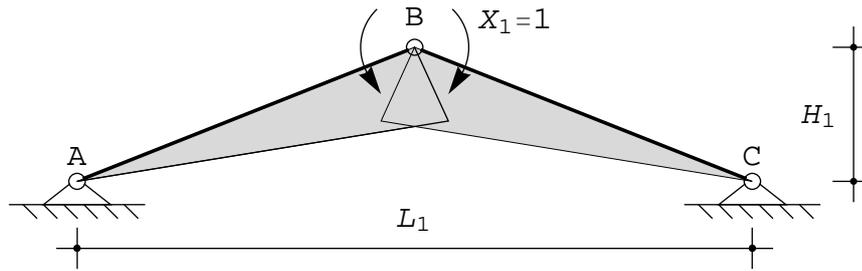
$$\begin{aligned} -N_{AB}^{(0)} \cos(\alpha) + N_{BC}^{(0)} \cos(\alpha) &= 0 \\ N_{AB}^{(0)} \sin(\alpha) + N_{BC}^{(0)} \sin(\alpha) + F &= 0 \end{aligned} \quad (63)$$

e quindi :

$$N_{AB}^{(0)} = N_{BC}^{(0)} = -\frac{F}{2 \sin(\alpha)} \quad (64)$$

■ L' esame del sistema S_1

Il sistema S_1 e' riportato in Figura 27, insieme al diagramma del momento. Su ciascuna delle aste il momento decresce linearmente da 1, in corrispondenza della cerniera B, a zero in corrispondenza delle cerniere al suolo.

Figura 27 -Il diagramma del momento sul sistema S_1

Per il calcolo dello sforzo normale, si osservi che le equazioni di equilibrio dell'intera struttura si scrivono:

$$\begin{aligned} R_{Ah}^{(1)} + R_{Ch}^{(1)} &= 0 \\ R_{Av}^{(1)} + R_{Cv}^{(1)} &= 0 \\ R_{Av}^{(1)} L_1 &= 0 \end{aligned} \quad (65)$$

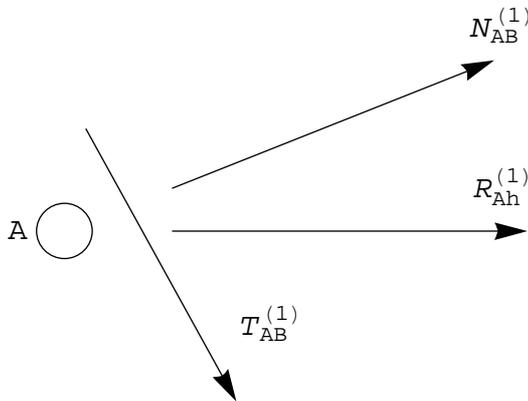
avendo scelto il polo in C. Ne segue che le componenti verticali delle reazioni sono nulle, mentre le componenti orizzontali sono uguali e contrarie. Inoltre, l'equazione di equilibrio dell'asta AB, scegliendo come polo il punto B, fornisce:

$$-T_{AB}^{(1)} L + 1 = 0 \quad (66)$$

e quindi :

$$T_{AB}^{(1)} = \frac{1}{L} = \frac{\sin(\alpha)}{H_1} \quad (67)$$

Infine, l'equilibrio della cerniera in A fornisce:

Figura 28 -L'equilibrio della cerniera in A per il sistema S_1

$$\begin{aligned} R_{Ah}^{(1)} + N_{AB}^{(1)} \cos(\alpha) + T_{AB}^{(1)} \sin(\alpha) &= 0 \\ -N_{AB}^{(1)} \sin(\alpha) + T_{AB}^{(1)} \cos(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (68)$$

da cui :

$$\begin{aligned} N_{AB}^{(1)} &= \frac{\cos(\alpha)}{H_1} \\ R_{Ah}^{(1)} &= -\frac{1}{H_1} \end{aligned} \quad (69)$$

■ La scrittura del p.l.v.

Dovra' scriversi, per il principio dei lavori virtuali :

$$\int_s M^{(1)} \frac{M}{EI} ds + \int_s N^{(1)} \frac{N}{EA} ds = 0 \quad (70)$$

e tramite il principio di sovrapposizione degli effetti :

$$\begin{aligned} M &= M^{(0)} + X_1 M^{(1)} \\ N &= N^{(0)} + X_1 N^{(1)} \end{aligned} \quad (71)$$

da cui l'equazione :

$$\left(\int_s \frac{M^{(1)2}}{EI} ds + \int_s \frac{N^{(1)2}}{EA} ds \right) X_1 = - \int_s M^{(1)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds - \int_s N^{(1)} \frac{N^{(0)}}{EA} ds = 0 \quad (72)$$

Sara' poi possibile calcolare gli integrali nel seguente modo :

$$\int_s M^{(1)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds = 0 \quad (73)$$

$$\int_s \frac{M^{(1)2}}{EI} ds = \frac{2}{EI} \int_0^L \left(\frac{z}{L} \right)^2 dz = \frac{2L}{3EI} \quad (74)$$

$$\int_s N^{(1)} \frac{N^{(0)}}{EA} ds = -2 \frac{F}{2 \sin(\alpha)} \frac{\cos(\alpha)}{H_1} \frac{L}{EA} = -\frac{F}{H_1 \tan(\alpha)} \frac{L}{EA} \quad (75)$$

$$\int_s \frac{N^{(1)2}}{EA} ds = 2 \frac{\cos^2(\alpha)}{H_1^2} \frac{L}{EA} \quad (76)$$

e quindi l'incognita iperstatica si scrive :

$$X_1 = \frac{3F}{2 \tan(\alpha)} \frac{H_1 AI}{A H_1^2 + 3 I \cos^2(\alpha)} \quad (77)$$

Esempio n.7

La maglia triangolare chiusa di Figura 29 e' soggetta ad una stesa di carico uniformemente distribuita di intensita' q lungo l'asta orizzontale. Essa e' isostatica per vincoli esterni, e tre volte internamente iperstatica.

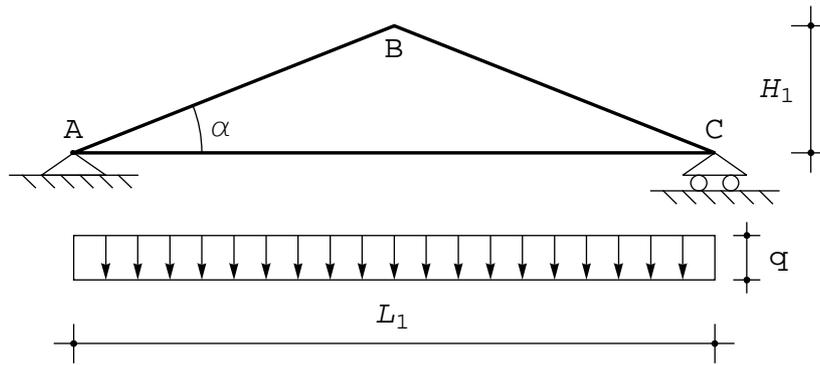


Figura 29 -Una maglia triangolare chiusa, tre volte iperstatica

Come sistema isostatico equivalente si sceglie la struttura di Figura 30, in cui sono state introdotte tre cerniere nei tre vertici della maglia, insieme alle corrispondenti incognite iperstatiche. Come sempre, si possono scrivere tre espressioni del principio dei lavori virtuali, utilizzando sempre il sistema di spostamenti effettivo come sistema di spostamenti geometricamente ammissibile, e le forze $X_1=1$, $X_2=1$ ed $X_3=1$, rispettivamente.

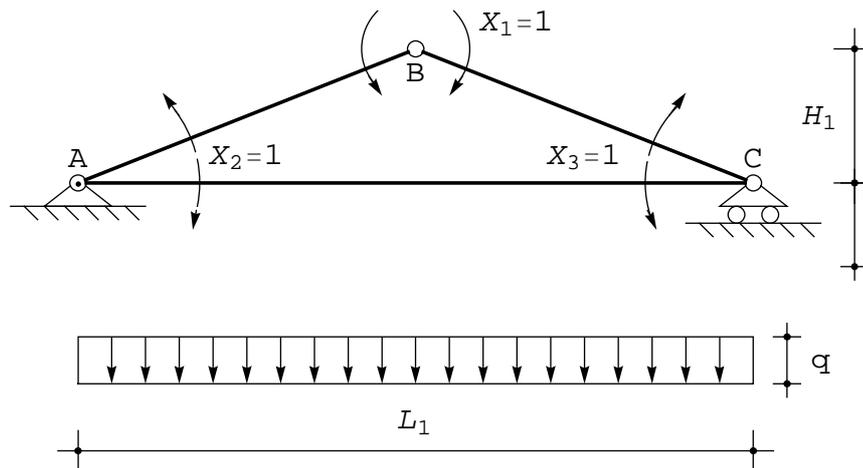


Figura 30 -Il sistema isostatico equivalente alla maglia chiusa di Figura 29

Con le usuali terminologie, si ha:

$$\int_s M^{(1)} \frac{M}{EI} ds + \int_s N^{(1)} \frac{N}{EA} ds = 0$$

$$\int_s M^{(2)} \frac{M}{EI} ds + \int_s N^{(2)} \frac{N}{EA} ds = 0$$

$$\int_s M^{(3)} \frac{M}{EI} ds + \int_s N^{(3)} \frac{N}{EA} ds = 0$$
(78)

dove si e' tenuto conto anche dell'effetto delle deformazioni assiali. Per il principio di sovrapposizione degli effetti si ha:

$$M = M^{(0)} + X_1 M^{(1)} + X_2 M^{(2)} + X_3 M^{(3)}$$

$$N = N^{(0)} + X_1 N^{(1)} + X_2 N^{(2)} + X_3 N^{(3)}$$
(79)

e quindi le (65) si tramutano nel sistema di dimensione tre:

$$a_{ij} X_j + b_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (80)$$

con :

$$a_{ij} = \int_s M^{(i)} \frac{M^{(j)}}{EI} ds + \int_s N^{(i)} \frac{N^{(j)}}{EA} ds \quad (81)$$

$$b_i = \int_s M^{(i)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds + \int_s N^{(i)} \frac{N^{(0)}}{EA} ds \quad (82)$$

Occorre quindi studiare i sistemi S_0 , S_1 , S_2 ed S_3 , e per ciascuno di essi tracciare il diagramma del momento e dello sforzo normale.

■ Lo studio del sistema S_0

Il diagramma del momento sul sistema S_0 e' limitato all'asta orizzontale caricata, dove assume andamento parabolico. Lo sforzo normale e' invece identicamente nullo

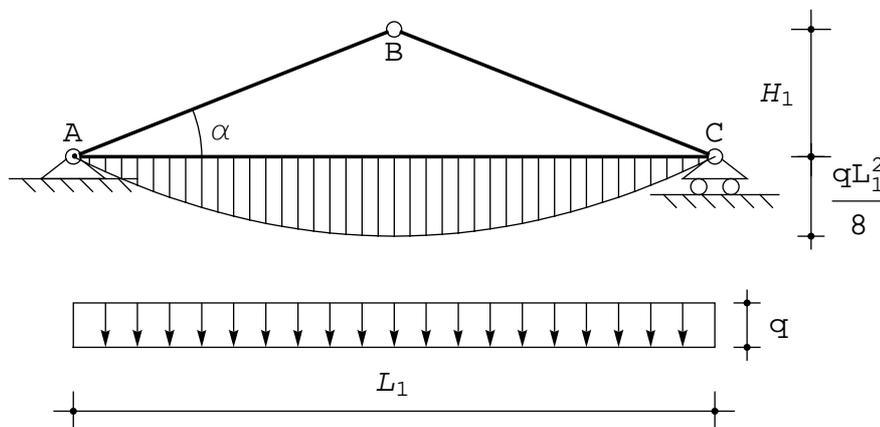


Figura 31 -Il diagramma del momento sul sistema S_0

■ Lo studio del sistema S_1

Il diagramma del momento su sistema S_1 e' limitato alle due aste inclinate, caricate da una coppia unitaria in un estremo. Nell'asta AB il momento decresce linearmente da B, dove ha valore unitario, ad A, dove si annulla, ed analogo diagramma puo' tracciarsi per l'asta BC:

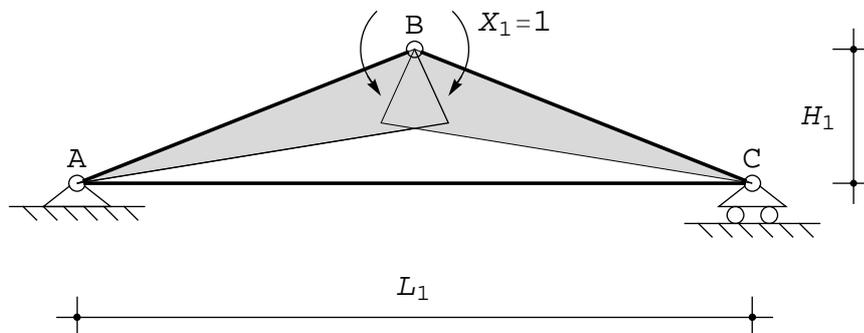


Figura 32 -Il diagramma del momento sul sistema S_1

Per dedurre il valore degli sforzi normali, si consideri l'asta AB, e si scriva l'equazione di equilibrio intorno al punto B (analogo ragionamento puo' farsi per l'asta BC):

$$-T_{AB}^{(1)} L + 1 = 0 \quad (83)$$

e quindi si conosce il taglio in AB :

$$T_{AB}^{(1)} = \frac{1}{L} \quad (84)$$

Cio' e' anche deducibile dal diagramma del momento, e dalla sua pendenza. Conosciuto il taglio AB, l'equilibrio della cerniera in A fornisce gli sforzi normali nelle aste AB ed AC, in quanto le reazioni esterne sono identicamente nulle, cosi' come nullo e' il taglio in AC:

$$\begin{aligned} T_{AB}^{(1)} \sin(\alpha) + N_{AB}^{(1)} \cos(\alpha) + N_{AC}^{(1)} &= 0 \\ T_{AB}^{(1)} \cos(\alpha) - N_{AB}^{(1)} \sin(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (85)$$

Si ha quindi :

$$N_{AB}^{(1)} = \frac{T_{AB}^{(1)}}{\tan(\alpha)} = \frac{L_1}{2 L H_1} \quad (86)$$

$$N_{AC}^{(1)} = -\frac{\sin(\alpha)}{L} - \frac{L_1}{2 L H_1} \cos(\alpha) \quad (87)$$

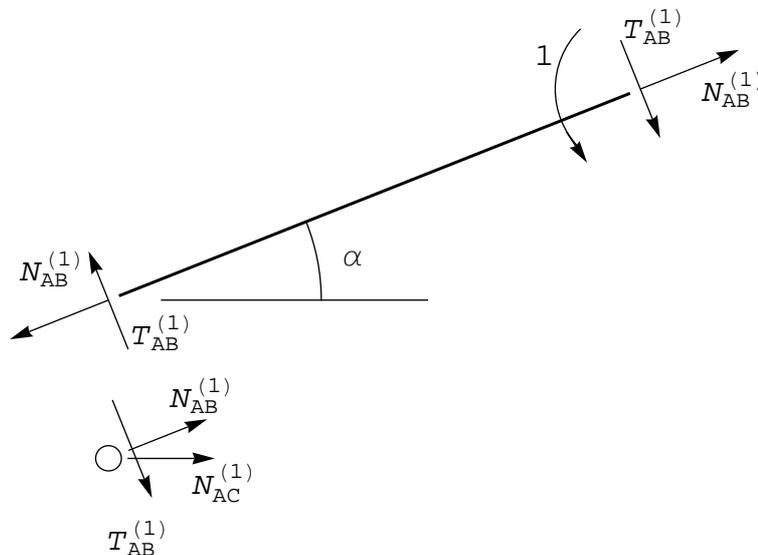


Figura 33 - Le forze agenti sull'asta AB e sulla cerniera in A

Ma

$$\begin{aligned} L \sin(\alpha) &= H_1 \\ L \cos(\alpha) &= \frac{L_1}{2} \end{aligned} \quad (88)$$

e quindi infine :

$$N_{AC}^{(1)} = - \frac{\sin(\alpha)}{L} - \frac{L_1}{2 L H_1} \cos(\alpha) =$$

$$- \frac{\sin^2(\alpha)}{H_1} - \frac{2 L}{2 L H_1} \cos^2(\alpha) = - \frac{1}{H_1}$$

■ Lo studio del sistema S_2

Il diagramma del momento per il sistema S_2 e' analogo al precedente, con le aste AB ed AC interessate da un momento linearmente variabile tra uno e zero, e con l'asta BC scarica.

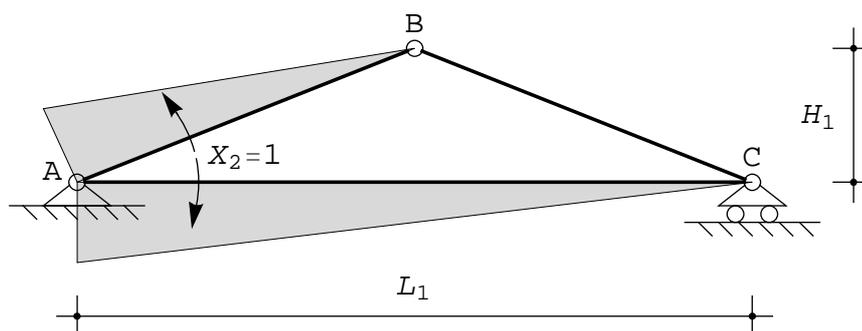


Figura 34 -Il diagramma del momento sul sistema S_2

L'equilibrio alla rotazione delle due aste AB ed AC, o piu' semplicemente lo studio della pendenza del diagramma del momento portano a conoscere i rispettivi tagli:

$$T_{AB}^{(2)} = \frac{1}{L}$$

$$T_{AC}^{(2)} = - \frac{1}{L_1} \quad (90)$$

mentre l'equilibrio della cerniera in A porta a scrivere:

$$N_{AB}^{(2)} \cos(\alpha) + T_{AB}^{(2)} \sin(\alpha) + N_{AC}^{(2)} = 0$$

$$- N_{AB}^{(2)} \sin(\alpha) + T_{AB}^{(2)} \cos(\alpha) + T_{AC}^{(2)} = 0 \quad (91)$$

ossia :

$$N_{AB}^{(2)} = \frac{1 \cos(\alpha)}{L \sin(\alpha)} - \frac{1}{L_1 \sin(\alpha)} = \frac{L_1}{2 H_1 L} - \frac{L}{L_1 H_1} \quad (92)$$

$$N_{AC}^{(2)} = - \frac{1 \cos(\alpha) \cos(\alpha)}{L \sin(\alpha)} + \frac{\cos(\alpha)}{L_1 \sin(\alpha)} - \frac{1}{L} \sin(\alpha) =$$

$$- \frac{1}{L \sin(\alpha)} + \frac{\cos(\alpha)}{L_1 \sin(\alpha)} = - \frac{1}{H_1} + \frac{1}{2 H_1} = - \frac{1}{2 H_1} \quad (93)$$

L'equilibrio della cerniera in C fornisce :

$$\begin{aligned} -N_{BC}^{(2)} \cos(\alpha) + T_{BC}^{(2)} \sin(\alpha) - N_{AC}^{(2)} &= 0 \\ -N_{BC}^{(2)} \sin(\alpha) - T_{BC}^{(2)} \cos(\alpha) - T_{AC}^{(2)} &= 0 \end{aligned}$$

e quindi :

$$N_{BC}^{(2)} = -N_{AC}^{(2)} \cos(\alpha) - T_{AC}^{(2)} \sin(\alpha) = \frac{L_1}{4 L H_1} + \frac{H_1}{L L_1} \quad (95)$$

■ Lo studio del sistema S_3

Il diagramma del momento per il sistema S_2 e' analogo al precedente, con le aste AB ed AC interessate da un momento linearmente variabile tra uno e zero, e con l'asta BC scarica.

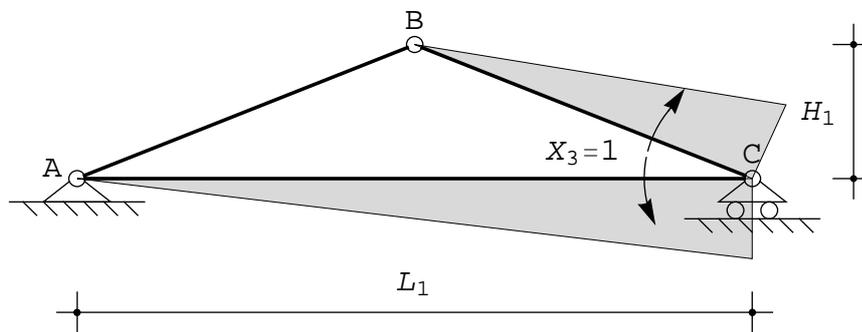


Figura 35 -Il diagramma del momento sul sistema S_3

L'equilibrio alla rotazione delle due aste BC ed AC, o più semplicemente lo studio della pendenza del diagramma del momento portano a conoscere i rispettivi tagli:

$$\begin{aligned} T_{BC}^{(3)} &= -\frac{1}{L} \\ T_{AC}^{(3)} &= \frac{1}{L_1} \end{aligned} \quad (96)$$

mentre l'equilibrio della cerniera in C porta a scrivere:

$$\begin{aligned} -N_{BC}^{(3)} \cos(\alpha) + T_{BC}^{(3)} \sin(\alpha) - N_{AC}^{(3)} &= 0 \\ -N_{BC}^{(3)} \sin(\alpha) - T_{BC}^{(3)} \cos(\alpha) - T_{AC}^{(3)} &= 0 \end{aligned} \quad (97)$$

ossia :

$$N_{BC}^{(3)} = \frac{1}{L} \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} - \frac{1}{L_1} \frac{1}{\sin(\alpha)} = \frac{L_1}{2 L H_1} - \frac{L}{H_1 L_1} \quad (98)$$

$$N_{AC}^{(3)} = -\left(\frac{L_1}{2 L H_1} - \frac{L}{H_1 L_1} \right) \cos(\alpha) - \frac{1}{L} \sin(\alpha) = -\frac{1}{2 H_1} \quad (99)$$

L'equilibrio della cerniera in A fornisce :

$$\begin{aligned} N_{AB}^{(3)} \cos(\alpha) + T_{AB}^{(3)} \sin(\alpha) + N_{AC}^{(3)} &= 0 \\ -N_{AB}^{(3)} \sin(\alpha) + T_{AB}^{(3)} \cos(\alpha) + T_{AC}^{(3)} &= 0 \end{aligned} \quad (100)$$

e quindi :

$$\begin{aligned} N_{AB}^{(3)} &= -N_{AC}^{(3)} \cos(\alpha) + T_{AC}^{(3)} \sin(\alpha) = \\ &= \frac{1}{2H_1} \cos(\alpha) + \frac{1}{L_1} \sin(\alpha) = \frac{L_1}{4LH_1} + \frac{H_1}{L L_1} \end{aligned} \quad (101)$$

■ Il calcolo dei coefficienti

Gli integrali che compaiono nelle tre equazioni di congruenza possono calcolarsi agevolmente. Si ha infatti, per i momenti:

$$\begin{aligned} \int_s M^{(1)} M^{(0)} ds &= 0 \\ \int_s M^{(2)} M^{(0)} ds &= \frac{q}{2} \int_0^{L_1} \left(1 - \frac{z}{L_1}\right) z (L_1 - z) dz = \frac{q L_1^3}{24} \end{aligned} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} \int_s M^{(3)} M^{(0)} ds &= \frac{q}{2} \int_0^{L_1} \left(\frac{z}{L_1}\right) z (L_1 - z) dz = \frac{q L_1^3}{24} \\ \int_s M^{(1)2} ds &= 2 \int_0^L \left(\frac{z}{L}\right)^2 dz = \frac{2L}{3} \\ \int_s M^{(1)} M^{(2)} ds &= - \int_0^L \left(\frac{z}{L}\right) \left(1 - \frac{z}{L}\right) dz = -\frac{L}{6} \\ \int_s M^{(1)} M^{(3)} ds &= - \int_0^L \left(\frac{z}{L}\right) \left(1 - \frac{z}{L}\right) dz = -\frac{L}{6} \end{aligned} \quad (103)$$

$$\begin{aligned} \int_s M^{(2)2} ds &= \int_0^L \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 dz + \int_0^{L_1} \left(1 - \frac{z}{L_1}\right)^2 dz = \frac{L}{3} + \frac{L_1}{3} \\ \int_s M^{(2)} M^{(3)} ds &= \int_0^{L_1} \left(\frac{z}{L_1}\right) \left(1 - \frac{z}{L_1}\right) dz = \frac{L_1}{6} \\ \int_s M^{(3)2} ds &= \int_0^L \left(\frac{z}{L}\right)^2 dz + \int_0^{L_1} \left(\frac{z}{L_1}\right)^2 dz = \frac{L}{3} + \frac{L_1}{3} \end{aligned} \quad (104)$$

mentre per gli sforzi normali, costanti nelle aste, gli integrali sono immediati :

$$\begin{aligned} \int_s N^{(1)} N^{(0)} ds &= 0 \\ \int_s N^{(2)} N^{(0)} ds &= 0 \\ \int_s N^{(3)} N^{(0)} ds &= 0 \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{s}} \mathbf{N}^{(1)2} d\mathbf{s} &= 2 \left(\frac{L_1}{2 L H_1} \right)^2 L + \left(\frac{1}{H_1} \right)^2 L_1 = \frac{L_1 (2 L + L_1)}{2 L H_1^2} \\
\int_{\mathbf{s}} \mathbf{N}^{(1)} \mathbf{N}^{(2)} d\mathbf{s} &= \left(\frac{L_1}{2 L H_1} \right) \left(\frac{L_1}{2 H_1 L} - \frac{L}{L_1 H_1} \right) L + \left(\frac{1}{H_1} \right) \left(\frac{1}{2 H_1} \right) L_1 + \\
&\quad \left(\frac{L_1}{2 L H_1} \right) \left(\frac{L_1}{4 L H_1} + \frac{H_1}{L L_1} \right) L = \frac{-4 L^2 + 4 H_1^2 + 4 L L_1 + 3 L_1^2}{8 L H_1^2} \\
\int_{\mathbf{s}} \mathbf{N}^{(1)} \mathbf{N}^{(3)} d\mathbf{s} &= \left(\frac{L_1}{2 L H_1} \right) \left(\frac{L_1}{4 L H_1} + \frac{H_1}{L L_1} \right) L + \left(\frac{1}{H_1} \right) \left(\frac{1}{2 H_1} \right) L_1 + \\
&\quad \left(\frac{L_1}{2 L H_1} \right) \left(\frac{L_1}{2 L H_1} - \frac{L}{H_1 L_1} \right) L = \frac{-4 L^2 + 4 H_1^2 + 4 L L_1 + 3 L_1^2}{8 L H_1^2} \\
\int_{\mathbf{s}} \mathbf{N}^{(2)2} d\mathbf{s} &= \\
&\quad \left(\frac{L_1}{2 H_1 L} - \frac{L}{L_1 H_1} \right)^2 L + \left(\frac{1}{2 H_1} \right)^2 L_1 + \left(\frac{L_1}{4 L H_1} + \frac{H_1}{L L_1} \right)^2 L = \\
&\quad \frac{16 L^4 + 16 H_1^4 - 16 L^2 L_1^2 + 8 H_1^2 L_1^2 + 4 L L_1^3 + 5 L_1^4}{16 L H_1^2 L_1^2} \\
\int_{\mathbf{s}} \mathbf{N}^{(2)} \mathbf{N}^{(3)} d\mathbf{s} &= \left(\frac{L_1}{2 H_1 L} - \frac{L}{L_1 H_1} \right) \left(\frac{L_1}{4 L H_1} + \frac{H_1}{L L_1} \right) L + \\
&\quad \left(\frac{1}{2 H_1} \right) \left(\frac{1}{2 H_1} \right) L_1 + \left(\frac{L_1}{4 L H_1} + \frac{H_1}{L L_1} \right) \left(\frac{L_1}{2 L H_1} - \frac{L}{H_1 L_1} \right) L = \\
&\quad \frac{1}{4} \left(\frac{4}{L} - \frac{8 L}{L_1^2} + \frac{-2 L + L_1 + \frac{L_1^2}{L}}{H_1^2} \right) \\
\int_{\mathbf{s}} \mathbf{N}^{(3)2} d\mathbf{s} &= \frac{16 L^4 + 16 H_1^4 - 16 L^2 L_1^2 + 8 H_1^2 L_1^2 + 4 L L_1^3 + 5 L_1^4}{16 L H_1^2 L_1^2}
\end{aligned} \tag{107}$$

■ La soluzione del sistema

La matrice A ed il vettore b delle equazioni (81) e (82) possono riempirsi come segue:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{2 L}{3 I} + \frac{L_1 (2 L + L_1)}{2 A L H_1^2} \\
a_{12} &= -\frac{L}{6 I} + \frac{-4 L^2 + 4 H_1^2 + 4 L L_1 + 3 L_1^2}{8 A L H_1^2} \\
a_{13} &= \frac{-L}{6 I} + \frac{-4 L^2 + 4 H_1^2 + 4 L L_1 + 3 L_1^2}{8 A L H_1^2} \\
a_{22} &= \frac{L}{3 I} + \frac{L_1}{3 I} + \frac{16 L^4 + 16 H_1^4 - 16 L^2 L_1^2 + 8 H_1^2 L_1^2 + 4 L L_1^3 + 5 L_1^4}{16 A L H_1^2 L_1^2}
\end{aligned}$$

$$a_{23} = \frac{L_1}{6 I} + \frac{1}{4 A} \left(\frac{4}{L} - \frac{8 L}{L_1^2} + \frac{-2 L + L_1 + \frac{L_1^2}{L}}{H_1^2} \right);$$

$$a_{33} = \frac{L}{3 I} + \frac{L_1}{3 I} + \frac{16 L^4 + 16 H_1^4 - 16 L^2 L_1^2 + 8 H_1^2 L_1^2 + 4 L L_1^3 + 5 L_1^4}{16 A L H_1^2 L_1^2}$$

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = -\frac{q L_1^3}{24 I}$$

$$b_3 = -\frac{q L_1^3}{24 I}$$

e la soluzione del sistema puo' ottenersi come:

$$X_1 = \left(A H_1^2 q L_1^5 \left(4 H_1^2 \left(3 J - A L^2 \right) + 3 J \left(-4 L^2 + 4 L L_1 + 3 L_1^2 \right) \right) \right) /$$

$$\left(6 \left(8 A^2 H_1^4 L^2 L_1^2 \left(L + 2 L_1 \right) + 3 J^2 L_1 \left(4 H_1^2 - 4 L^2 + L_1^2 \right)^2 + \right. \right. \quad (109)$$

$$\left. \left. 2 A H_1^2 J \left(16 H_1^4 L + 16 L^5 - 32 L^3 L_1^2 + 24 L^2 L_1^3 + 31 L L_1^4 + 6 L_1^5 - 32 H_1^2 \left(L^3 - L L_1^2 \right) \right) \right) \right)$$

$$X_2 = X_3 = - \left(A H_1^2 q L_1^5 \left(4 A H_1^2 L^2 + 3 J L_1 \left(2 L + L_1 \right) \right) \right) /$$

$$\left(3 \left(8 A^2 H_1^4 L^2 L_1^2 \left(L + 2 L_1 \right) + 3 J^2 L_1 \left(4 H_1^2 - 4 L^2 + L_1^2 \right)^2 + \right. \right. \quad (110)$$

$$\left. \left. 2 A H_1^2 J \left(16 H_1^4 L + 16 L^5 - 32 L^3 L_1^2 + 24 L^2 L_1^3 + 31 L L_1^4 + 6 L_1^5 - 32 H_1^2 \left(L^3 - L L_1^2 \right) \right) \right) \right)$$

Per trascurare gli effetti della deformazione assiale, si calcola il limite per A che tende ad infinito, ottenendo:

$$X_1 = -\frac{q L_1^3}{12 (L + 2 s)} \quad (111)$$

$$X_2 = X_3 = -\frac{q L_1^3}{6 (L + 2 s)}$$

■ Un esempio numerico

Si ipotizzi ora di voler esaminare una struttura di luce $L_1 = 14$ metri, ed altezza $H_1 = 7$ metri, soggetta al carico q pari a 3 tm^{-1} . Inoltre, la struttura sia metallica con sezione caratterizzata da un'area $A = 198 \text{ cm}^2$ ed un momento di inerzia $I = 57680 \text{ cm}^4$ (corrispondente ad un profilato HE 400 B). Sara' ovviamente:

$$L = \sqrt{7^2 + 7^2} = 9.90 \text{ m} \quad (112)$$

e quindi i momenti incogniti sono pari a :

$$X_1 = -17.95$$

$$X_2 = X_3 = -36.13 \quad (113)$$

Ponendo invece $A \rightarrow \infty$ si hanno i valori:

$$X_1 = -18.10$$

$$X_2 = X_3 = -36.20 \quad (114)$$

I calcoli

Esempio n .8

La trave doppia collegata da un pendolo di Figura 36 e' gia' stata studiata attraverso il cosiddetto metodo misto. In questa sede, invece, si vuol utilizzare il p.l.v. per la scrittura delle due equazioni di congruenza sul sistema isostatico equivalente di Figura 37.

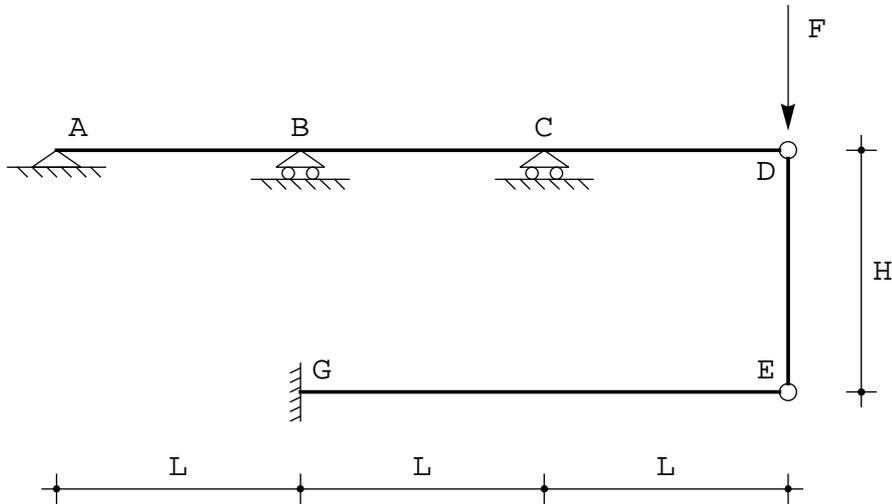


Figura 36 - Una trave doppia collegata da un pendolo

Si sono quindi scelte come incognite lo sforzo normale nel pendolo DE (positivo se di trazione) , e la reazione del carrello in C.

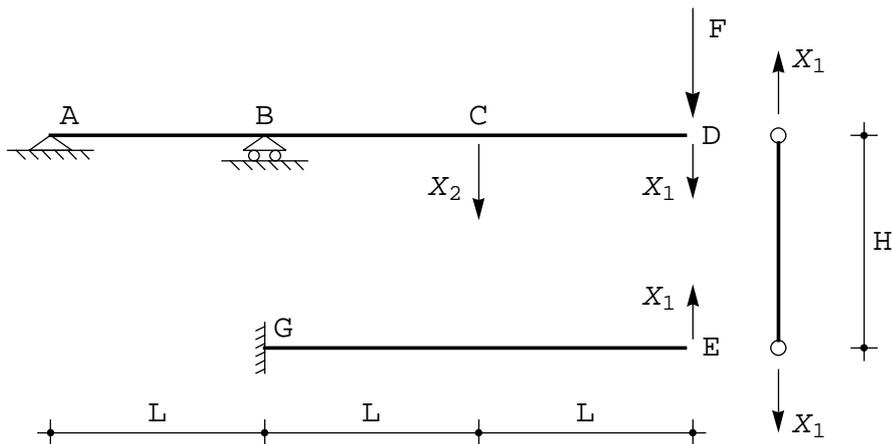


Figura 37 - Il sistema isostatico equivalente alla struttura di Figura 36

Siano ora M i momenti flettenti effettivi, $M^{(1)}$ i momenti flettenti generati da uno sforzo normale unitario $X_1=1$, ed $M^{(2)}$ i momenti generati da una reazione $X_2=1$. Utilizzando il sistema di spostamenti effettivo, ed il sistema di forze virtuali in cui $X_1 = 1$, si può scrivere il principio dei lavori virtuali come:

$$\int_s M^{(1)} \frac{M}{EI} ds = -1 \frac{X_1 H}{EA} \quad (115)$$

Il segno negativo dipende dall'aver scelto lo sforzo normale positivo se di trazione, e quindi la forza unitaria con cui e' caricata la struttura compie lavoro negativo per effetto dell'allungamento del pendolo. Utilizzando invece il sistema di spostamenti effettivo, ed il sistema di forze virtuali in cui $X_2 = 1$, si puo' scrivere il principio dei lavori virtuali come:

$$\int_s M^{(2)} \frac{M}{EI} ds = 0 \quad (116)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il momento M puo' esprimersi come somma dei momenti generati dalla forza F , dalla X_1 e dalla X_2 :

$$M = M^{(0)} + X_1 M^{(1)} + X_2 M^{(2)} \quad (117)$$

e quindi le (115 - 116) divengono :

$$\int_s M^{(1)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds + X_1 \int_s M^{(1)} \frac{M^{(1)}}{EI} ds + X_2 \int_s M^{(1)} \frac{M^{(2)}}{EI} ds = -1 \frac{X_1 H}{EA} \quad (118)$$

$$\int_s M^{(2)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds + X_1 \int_s M^{(2)} \frac{M^{(1)}}{EI} ds + X_2 \int_s M^{(2)} \frac{M^{(2)}}{EI} ds = 0$$

Si tratta quindi di calcolare i coefficienti di un sistema di equazioni nelle due incognite X_1 ed X_2 . A tal fine, si riportano i diagrammi dei momenti $M^{(0)}$, $M^{(1)}$ ed $M^{(2)}$, su cui e' immediato calcolare gli integrali richiesti:

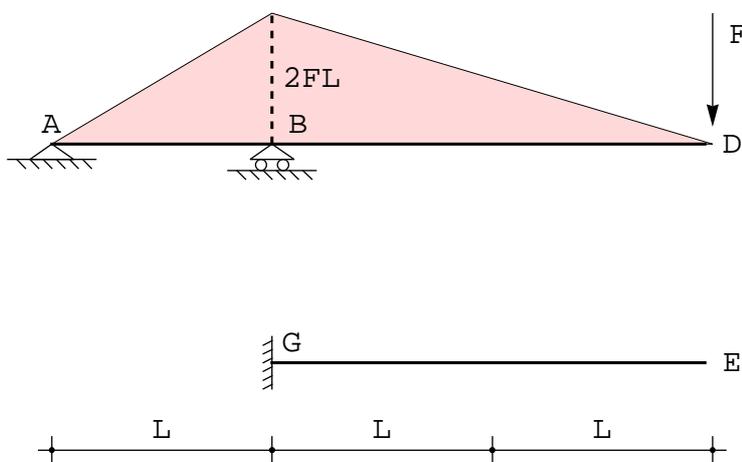


Figura 38 - Il sistema S_0 ed il relativo diagramma dei momenti $M^{(0)}$

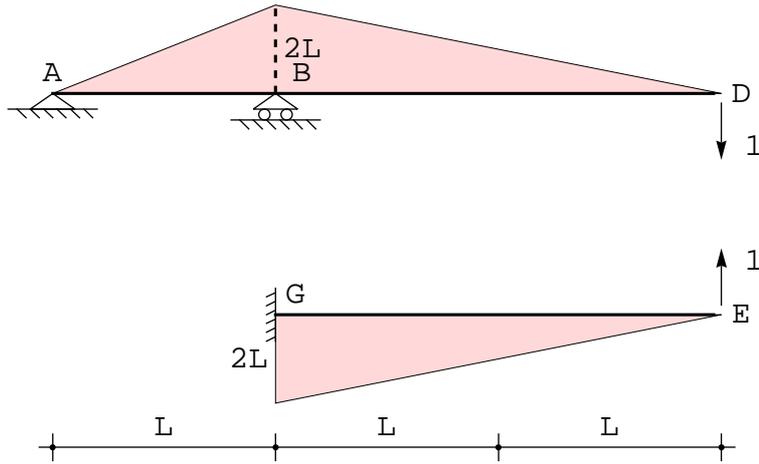


Figura 39 - Il sistema S_1 ed il relativo diagramma dei momenti $M^{(1)}$

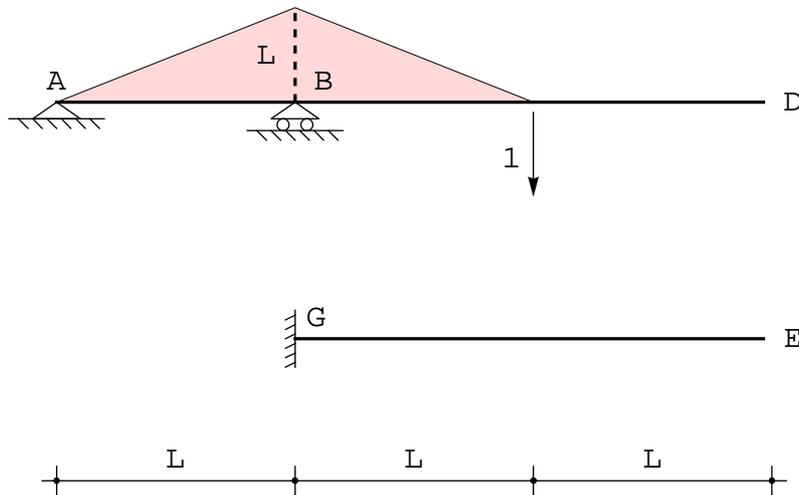


Figura 40 - Il sistema S_2 ed il relativo diagramma dei momenti $M^{(2)}$

Sarà quindi possibile esprimere analiticamente i tre diagrammi del momento, e scrivere:

$$\int_s M^{(1)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds = \int_0^L (2Fz) \frac{2z}{EI} dz + \int_0^{2L} 2FL \left(1 - \frac{z}{2L}\right) \frac{2L}{EI} \left(1 - \frac{z}{2L}\right) dz = 4 \frac{FL^3}{EI} \quad (119)$$

$$\int_s M^{(2)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds = \int_0^L (2Fz) \frac{z}{EI} dz + \int_0^L 2FL \left(1 - \frac{z}{2L}\right) \frac{(L-z)}{EI} dz = 3 \frac{FL^3}{EI} \quad (120)$$

$$\int_{\mathbf{s}} \mathbf{M}^{(1)} \frac{M^{(1)}}{EI} d\mathbf{s} = \int_0^L (2z) \frac{2z}{EI} dz + \int_0^{2L} 2L \left(1 - \frac{z}{2L}\right) \frac{2L}{EI} \left(1 - \frac{z}{2L}\right) dz + \int_0^{2L} 2L \left(1 - \frac{z}{2L}\right) \frac{2L}{EI} \left(1 - \frac{z}{2L}\right) dz = \frac{20L^3}{3EI} \quad (121)$$

$$\int_{\mathbf{s}} \mathbf{M}^{(1)} \frac{M^{(2)}}{EI} d\mathbf{s} = \int_0^L (2z) \frac{z}{EI} dz + \int_0^L 2L \left(1 - \frac{z}{2L}\right) \frac{(L-z)}{EI} dz = \frac{3L^3}{2EI} \quad (122)$$

$$\int_{\mathbf{s}} \mathbf{M}^{(2)} \frac{M^{(2)}}{EI} d\mathbf{s} = \int_0^L z \frac{z}{EI} dz + \int_0^L \frac{(L-z)^2}{EI} dz = \frac{2L^3}{3EI} \quad (123)$$

Le equazioni divengono quindi :

$$\left(\frac{20L^3}{3EI} + \frac{H}{EA} \right) X_1 + \frac{3L^3}{2EI} X_2 = -4 \frac{FL^3}{EI} \quad (124)$$

$$\frac{3L^3}{2EI} X_1 + \frac{2L^3}{3EI} X_2 = -\frac{3FL^3}{2}$$

con soluzione :

$$X_1 = -\frac{15EAFL^3}{79EA L^3 + 24EI H} \quad (125)$$

$$X_2 = -\frac{18(8EAFL^3 + 3EIFH)}{79EA L^3 + 24EI Lp}$$

Per riottenere i risultati del metodo misto, non resta che trascurare la deformabilita' assiale del pendolo, e far tendere EA all'infinito. Si ottiene:

$$X_1 = -\frac{15}{79} F \quad (126)$$

$$X_2 = -\frac{144}{79} F$$

■ Il caso del carico distribuito

Un vantaggio dell'utilizzo del principio dei lavori virtuali risiede nel poter studiare facilmente diverse condizioni di carico, calcolando volta a volta il solo diagramma $M^{(0)}$ dovuto ai carichi. Se ad esempio la struttura precedente fosse caricata da una stesa di carico uniformemente distribuita di intensita' q su tutta la trave superiore, bisognerebbe utilizzare l'espressione

$$M^{(0)} = -\frac{1}{2} qz(3L+z) \quad (127)$$

nella prima campata, e :

$$M^{(0)} = -\frac{1}{2} q (-2L + z)^2 \quad (128)$$

nella seconda, sicche' risulta:

$$\int_s M^{(1)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds = \int_0^L \left(-\frac{1}{2} q z (3L + z) \right) \frac{2z}{EI} dz + \int_0^{2L} \left(-\frac{1}{2} q (-2L + z)^2 \right) \frac{2L}{EI} \left(1 - \frac{z}{2L} \right) dz = -\frac{13L^4 q}{4EI} \quad (129)$$

$$\int_s M^{(2)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds = \int_0^L \left(-\frac{1}{2} q z (3L + z) \right) \frac{z}{EI} dz + \int_0^L \left(-\frac{1}{2} q (-2L + z)^2 \right) \frac{(L - z)}{EI} dz = -\frac{4L^4 q}{3EI} \quad (130)$$

Gli altri termini restano inalterati, sicche' le equazioni di congruenza si scrivono :

$$\left(\frac{20L^3}{3EI} + \frac{H}{EA} \right) X_1 + \frac{3L^3}{2EI} X_2 = -\frac{13L^4 q}{4EI} \quad (131)$$

$$\frac{3L^3}{2EI} X_1 + \frac{2L^3}{3EI} X_2 = -\frac{4L^4 q}{3EI}$$

con soluzione :

$$X_1 = \frac{6EA L^4 q}{79EA L^3 + 24EI H} \quad (132)$$

$$X_2 = \frac{L (289EA L^3 q + 96EI H q)}{2 (79EA L^3 + 24EI H)}$$

Per riottenere i risultati del metodo misto, non resta che trascurare la deformabilita' assiale del pendolo, e far tendere EA all'infinito. Si ottiene:

$$X_1 = \frac{6}{79} qL \quad (133)$$

$$X_2 = \frac{289}{158} qL$$

■ Calcolo

Esempio n .9

Si consideri il telaio di Figura 41, costituito da un traverso, incastrato al piede, di altezza H, e da un ritto di luce 3L, poggiate su due carrelli.

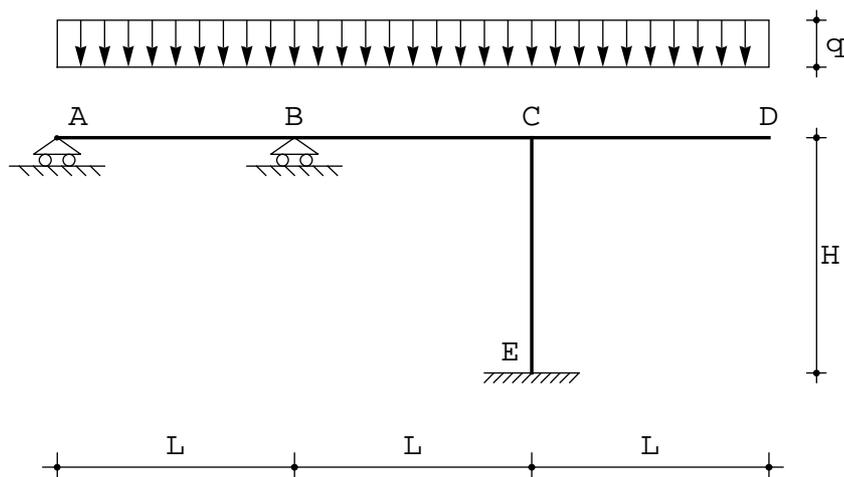


Figura 41 - Un telaio doppiamente iperstatico

La struttura e' manifestamente doppiamente iperstatica, e puo' essere risolta col metodo misto, introducendo tre cerniere in B,C ed E, oppure utilizzando il metodo della composizione degli spostamenti per la scrittura diretta di due equazioni di congruenza. In questo Esempio, si vuole utilizzare il principio dei lavori virtuali al fine di calcolare le incognite iperstatiche di Figura 42.

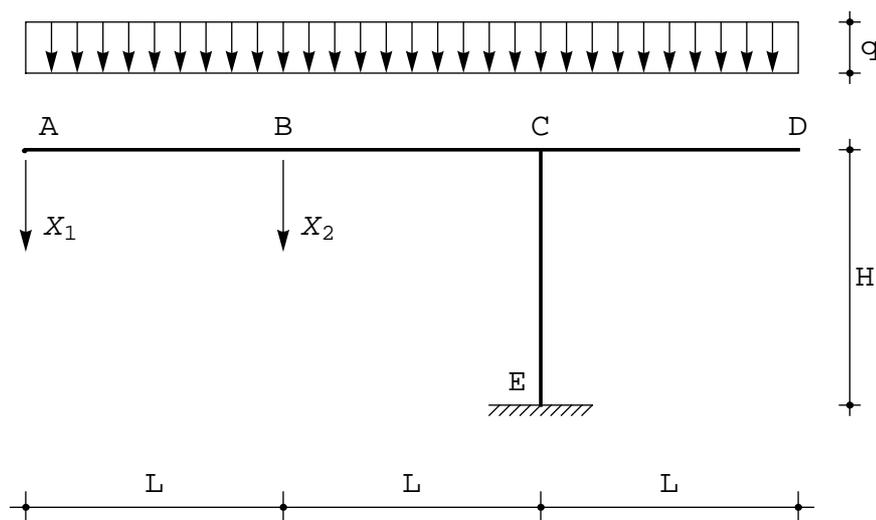


Figura 42- Un sistema isostatico equivalente per il telaio di Figura 41

Siano ora M i momenti flettenti effettivi, $M^{(1)}$ i momenti flettenti generati da una reazione unitaria $X_1=1$, ed $M^{(2)}$ i momenti generati da una reazione unitaria $X_2=1$. Utilizzando il sistema di spostamenti effettivo, ed il sistema di forze virtuali in cui $X_1 = 1$, si puo' scrivere il principio dei lavori virtuali come:

$$\int_s M^{(1)} \frac{M}{EI} ds = 0 \quad (134)$$

Utilizzando invece il sistema di spostamenti effettivo, ed il sistema di forze virtuali in cui $X_2 = 1$, si puo' scrivere il principio dei lavori virtuali come:

$$\int_s M^{(2)} \frac{M}{EI} ds = 0 \quad (135)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il momento M puo' esprimersi come somma dei momenti generati dal carico q , dalla X_1 e dalla X_2 :

$$M = M^{(0)} + X_1 M^{(1)} + X_2 M^{(2)} \quad (136)$$

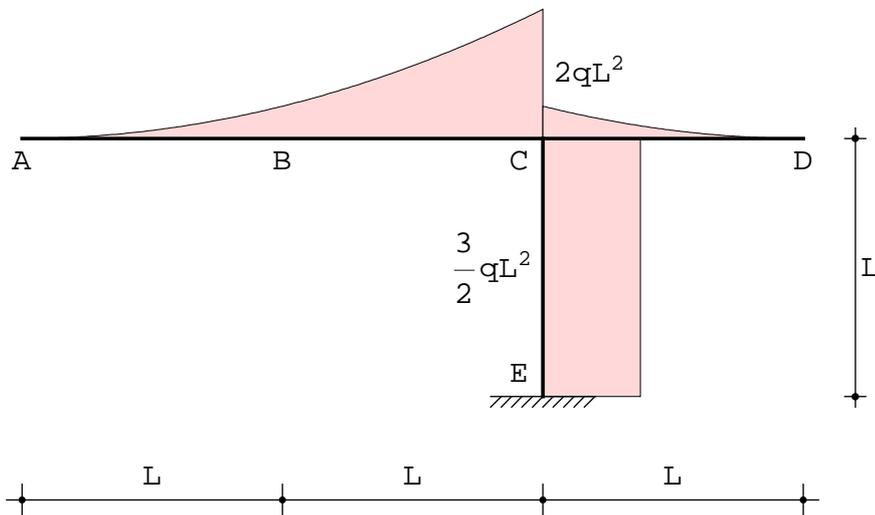
e quindi le (134 - 135) divengono :

$$\int_s M^{(1)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds + X_1 \int_s M^{(1)} \frac{M^{(1)}}{EI} ds + X_2 \int_s M^{(1)} \frac{M^{(2)}}{EI} ds = 0 \quad (137)$$

$$\int_s M^{(2)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds + X_1 \int_s M^{(2)} \frac{M^{(1)}}{EI} ds + X_2 \int_s M^{(2)} \frac{M^{(2)}}{EI} ds = 0$$

■ Il calcolo degli integrali

Il tracciamento dei diagrammi del momento non presenta alcuna difficolta' : in Figura 43 e' riportato il diagramma $M^{(0)}$, calcolato sullo schema isostatico caricato dalle forze esterne:



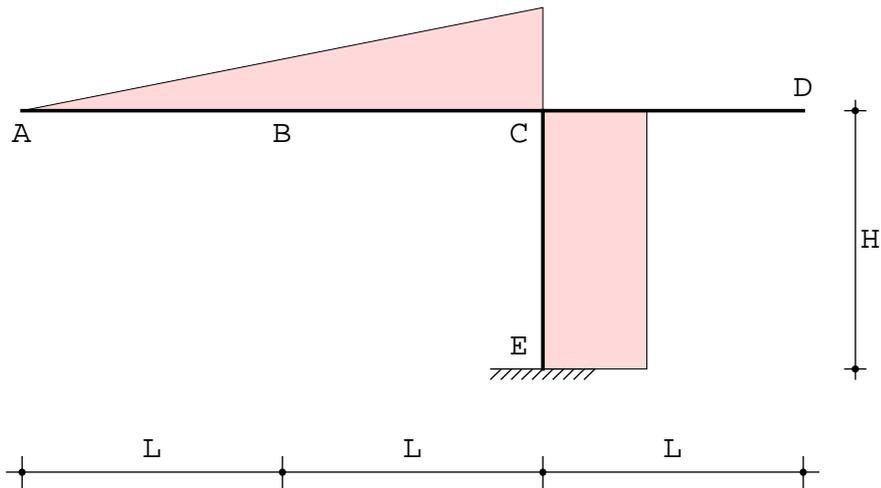
L' espressione analitica e' facilmente deducibile:

$$M_{AC}^{(0)} = -q \frac{z^2}{2}$$

$$M_{CD}^{(0)} = -q \frac{L^2}{2} - q \frac{z^2}{2} + q L z \quad (138)$$

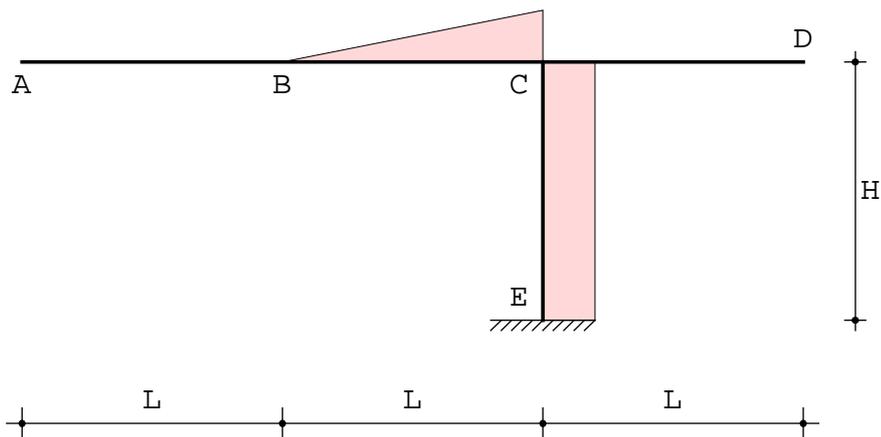
$$M_{CE}^{(0)} = -\frac{3}{2} q L^2$$

Il diagramma $M^{(1)}$, riportato in Figura 44, e' ancora piu' semplice, in quanto costituito da tratti lineari:



$$\begin{aligned} M_{AC}^{(1)} &= -z \\ M_{CE}^{(1)} &= -2L \end{aligned} \quad (139)$$

ed analogamente per il diagramma $M^{(2)}$, riportato in Figura 45:



$$\begin{aligned} M_{BC}^{(2)} &= -z \\ M_{CE}^{(2)} &= -L \end{aligned} \quad (140)$$

Sara' quindi :

$$\int_s M^{(1)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds = \int_0^{2L} \left(-\frac{1}{2} q z^2 \right) \frac{z}{EI} dz + \int_0^L \left(-\frac{3}{2} q L^2 \right) 2 \frac{L}{EI} dz = -5 \frac{qL^4}{EI} \quad (141)$$

$$\int_s M^{(2)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds = \int_L^{2L} \left(-\frac{1}{2} q z^2 \right) \frac{(z-L)}{EI} dz + \int_0^L \left(-\frac{3}{2} q L^2 \right) \frac{L}{EI} dz = -\frac{53}{24} \frac{qL^4}{EI} \quad (142)$$

Si noti che per il calcolo del secondo integrale sul tratto BC si e' riportata l'origine del sistema di riferimento

di $M^{(2)}$ nel punto A, traslando di $-L$, e quindi l'espressione analitica di $M_{BC}^{(2)}$ e' divenuta $(z-L)$.

$$\int_s M^{(1)} \frac{M^{(1)}}{EI} ds = \int_0^{2L} z \frac{z}{EI} dz + \int_0^L 2L \frac{L}{EI} dz = \frac{20}{3} \frac{L^3}{EI} \quad (143)$$

$$\int_s M^{(2)} \frac{M^{(2)}}{EI} ds = \int_0^L z \frac{z}{EI} dz + \int_0^L L \frac{L}{EI} dz = \frac{4}{3} \frac{L^3}{EI} \quad (144)$$

$$\int_s M^{(1)} \frac{M^{(2)}}{EI} ds = \int_L^{2L} z (z-L) dz + \int_0^L 2L L dz = \frac{17}{6} \frac{L^3}{EI} \quad (145)$$

In definitiva, si hanno le due equazioni di congruenza :

$$\frac{20 L^3 X_1}{3} + \frac{17 L^3 X_2}{6} = 5 L^4 q \quad (146)$$

$$\frac{17 L^3 X_1}{6} + \frac{4 L^3 X_2}{3} = \frac{53 L^4 q}{24} \quad (147)$$

con soluzione :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{59}{124} q L \\ X_2 &= \frac{20}{31} q L \end{aligned} \quad (148)$$

Figure

Vincoli

Calcolo