21 - La scrittura diretta delle equazioni di congruenza - Parte II

- **[A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 15 aprile 2012]**

Esercizio n .9

Si calcolino le reazioni e si disegni il diagramma delle c.s.i. per il telaio in Figura:

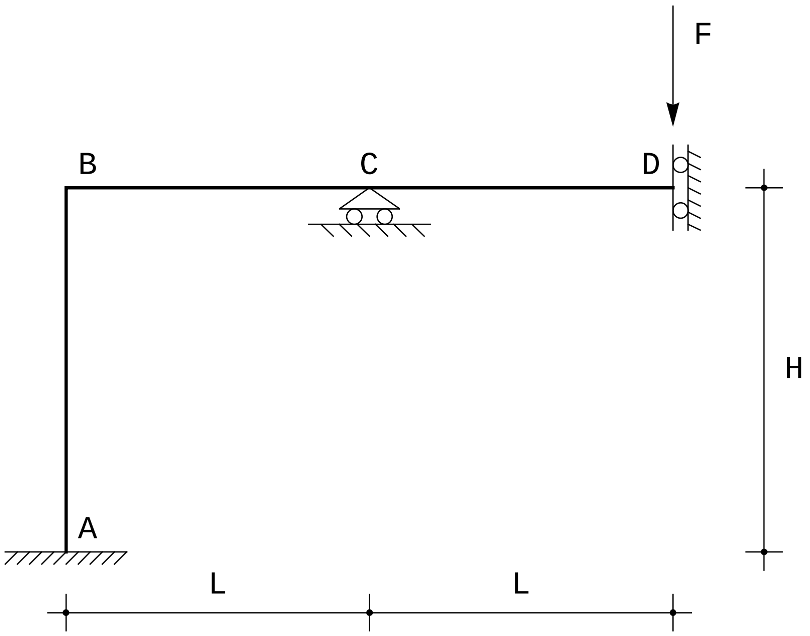


Figura 1 - Un telaio zoppo

Il calcolo delle incognite iperstatiche

Il telaio e' tre volte iperstatico, ed una possibile scelta di incognite iperstatiche e' riportata in Figura 2: si sono inserite tre cerniere in A, in B ed in C, e corrispondentemente sono stati aggiunti i momenti incogniti. Si e' indicato con M_{IJ} il momento nel nodo I agente sul tratto IJ, sicche', per le'equilibrio dei conci:

$$\begin{aligned} M_{BA} &= -M_{BC} \\ M_{CB} &= M_{CD} \end{aligned} \qquad (1)$$

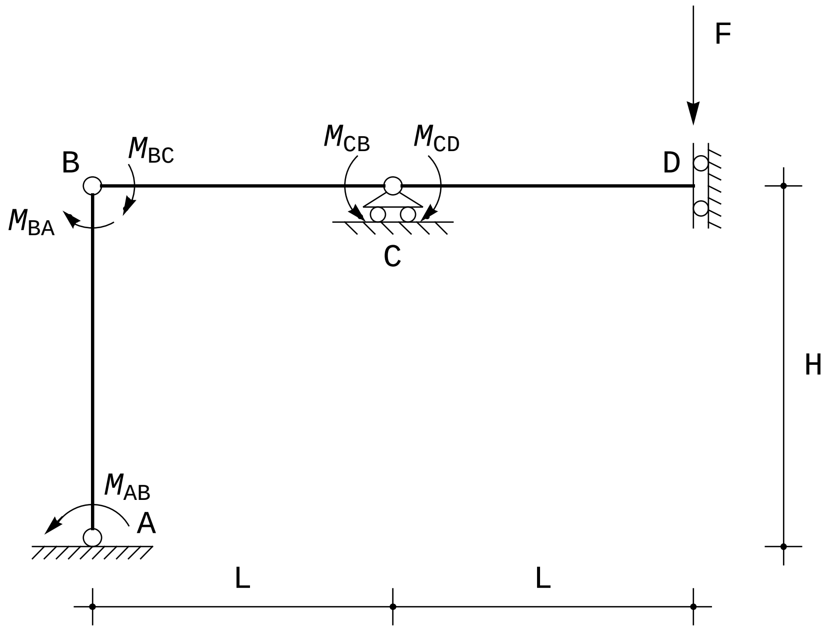


Figura 2 - Un possibile sistema isostatico equivalente

Per ripristinare la situazione originaria, occorrera' rispettare le tre condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} &\phi_A = 0 \\ &\Delta\phi_B = 0 \longrightarrow \phi_{BA} = \phi_{BC} \\ &\Delta\phi_C = 0 \longrightarrow \phi_{CB} = \phi_{CD} \end{aligned} \tag{2}$$

dove con ϕ_{IJ} si e'indicata la rotazione in I del tratto IJ. Utilizzando il principio di sovrapppposizione degli effetti si potra' scrivere:

$$\begin{aligned} &\phi_A^{(0)} + X_1\,\phi_A^{(1)} + X_2\,\phi_A^{(2)} + X_3\,\phi_A^{(3)} = 0 \\ &\phi_{BA}^{(0)} + X_1\,\phi_{BA}^{(1)} + X_2\,\phi_{BA}^{(2)} + X_3\,\phi_{BA}^{(3)} = \phi_{BC}^{(0)} + X_1\,\phi_{BC}^{(1)} + X_2\,\phi_{BC}^{(2)} + X_3\,\phi_{BC}^{(3)} \\ &\phi_{CB}^{(0)} + X_1\,\phi_{CB}^{(1)} + X_2\,\phi_{CB}^{(2)} + X_3\,\phi_{CB}^{(3)} = \phi_{CD}^{(0)} + X_1\,\phi_{CD}^{(1)} + X_2\,\phi_{CD}^{(2)} + X_3\,\phi_{CD}^{(3)} \end{aligned} \tag{3}$$

La particolare scelta della struttura isostatica equivalente implica che il telaio si e' suddiviso in schemi parziali, e quindi molti coefficienti delle (2) si annulleranno, e le equazioni di congruenza si semplificheranno in:

$$\begin{aligned} &M_{AB}\,\phi_A^{(1)} + M_{BA}\,\phi_A^{(2)} = 0 \\ &M_{AB}\,\phi_{BA}^{(1)} + M_{BA}\,\phi_{BA}^{(2)} = M_{BC}\,\phi_{BC}^{(2)} + M_{CB}\,\phi_{BC}^{(3)} \\ &M_{BC}\,\phi_{CB}^{(2)} + M_{CB}\,\phi_{CB}^{(3)} = M_{CD}\,\phi_{CD}^{(3)} + \phi_{CD}^{(0)} \end{aligned} \tag{4}$$

Il coefficiente $\phi_A^{(1)}$ e' la rotazione in A calcolata sullo schema (1), ossia sul telaio isostatico caricato da una coppia M_{AB} unitaria in A. Sara' quindi:

$$\phi_A^{(1)} = \frac{H}{3\,EI} \tag{5}$$

Il coefficiente $\phi_A^{(2)}$ e' la rotazione in A calcolata sullo schema (2), ossia sul telaio isostatico caricato da una coppia M_{BA} unitaria in B. Sara' quindi:

$$\phi_A^{(2)} = \frac{H}{6\,EI} \tag{6}$$

Analogamente si ha, operando sempre su schemi di travi appoggiate e caricate da una coppia all'estremo :

$$\phi_{BA}^{(1)} = -\frac{H}{6\,EI};\ \phi_{BA}^{(2)} = -\frac{H}{3\,EI};\ \phi_{BC}^{(2)} = -\frac{L}{3\,EI};\ \phi_{BC}^{(3)} = -\frac{L}{6\,EI} \tag{7}$$

$$\phi_{CB}^{(2)} = \frac{L}{6\,EI};\ \phi_{CB}^{(3)} = \frac{L}{3\,EI};\ \phi_{CD}^{(3)} = -\frac{L}{3\,EI};\ \phi_{CD}^{(0)} = -\frac{FL^2}{2\,EI} \tag{8}$$

I due coefficienti $\phi_{CD}^{(3)}$ e $\phi_{CD}^{(0)}$, invece, devono essere calcolati sullo schema di trave appoggiata a sinistra e con bipendolo a destra. Una banalissima applicazione dei corollari di Mohr permette di scrivere;

$$\phi_{CD}^{(3)} = -\frac{L}{EI};\ \phi_{CD}^{(0)} = -\frac{FL^2}{2\,EI} \tag{9}$$

In definitiva, le equazioni si scrivono :

$$\begin{aligned}
&\frac{H}{3\,EI} M_{AB} + \frac{H}{6\,EI} M_{BA} = 0\\
&-\frac{H}{6\,EI} M_{AB} - \frac{H}{3\,EI} M_{BA} = -\frac{L}{3\,EI} M_{BC} - \frac{L}{6\,EI} M_{CB}\\
&\frac{L}{6\,EI} M_{BC} + \frac{L}{3\,EI} M_{CB} = -\frac{L}{EI} M_{CD} - \frac{FL^2}{2\,EI}
\end{aligned} \tag{10}$$

ed utilizzando le (1) :

$$\begin{aligned}
&\frac{H}{3\,EI} M_{AB} - \frac{H}{6\,EI} M_{BC} = 0\\
&-\frac{H}{6\,EI} M_{AB} + \frac{H}{3\,EI} M_{BC} = -\frac{L}{3\,EI} M_{BC} - \frac{L}{6\,EI} M_{CB}\\
&\frac{L}{6\,EI} M_{BC} + \frac{L}{3\,EI} M_{CB} = -\frac{L}{EI} M_{CB} - \frac{FL^2}{2\,EI}
\end{aligned} \tag{11}$$

con soluzione :

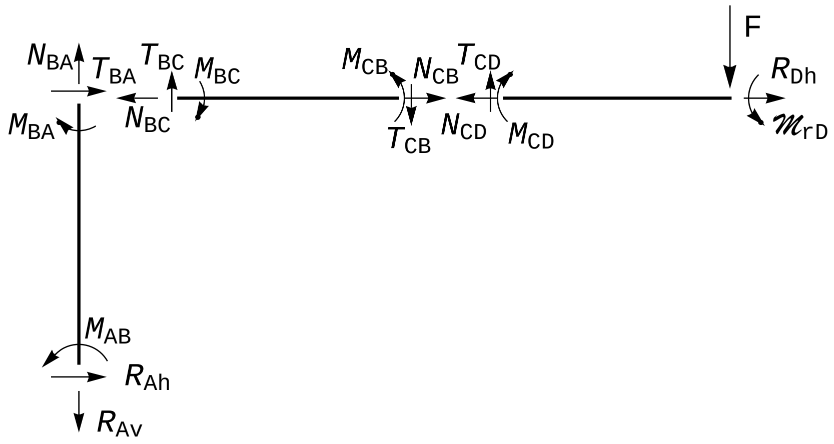
$$\begin{aligned}
M_{AB} &= \frac{F\,L^2}{2\,(4\,H + 5\,L)}\\
M_{BC} &= \frac{F\,L^2}{4\,H + 5\,L},\\
M_{CB} &= -\frac{F\,L\,(3\,H + 4\,L)}{2\,(4\,H + 5\,L)}
\end{aligned} \tag{12}$$

e nel caso L = H, cui d'ora in poi ci si limitera' :

$$\begin{aligned}
M_{AB} &= \frac{FL}{18}\\
M_{BC} &= \frac{FL}{9}\\
M_{CB} &= -\frac{7}{18} FL\\
M_{BA} &= -\frac{FL}{9}
\end{aligned} \tag{13}$$

Il calcolo delle reazioni, dei tagli e degli sforzi normali

Il quadro completo delle forze agenti sulla struttura e' riportato in Figura 3, e da essa deve essere possibile estrarre le informazioni necessarie con considerazioni di equilibrio.



L' equazione diu equilibrio del tratto AB alla rotazione intorno al polo B fornisce la reazione orizzontale:

$$R_{Ah}\,L + M_{AB} - M_{BA} = 0 \longrightarrow R_{Ah} = -\frac{F}{18} - \frac{F}{9} = -\frac{F}{6} \tag{14}$$

e l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale dello stesso tratto fornisce il taglio T_{BA} in testa al piedritto:

$$T_{BA} + R_{Ah} = 0 \longrightarrow T_{BA} = \frac{F}{6} \tag{15}$$

L' equilibrio del nodo in B alla traslazione orizzontale garantisce che:

$$T_{BA} - N_{BC} = 0 \longrightarrow N_{BC} = \frac{F}{6} \tag{16}$$

e gli altri equilibri alla traslazione orizzontale portano a scrivere:

$$\begin{aligned} -N_{BC} - N_{CB} = 0 &\longrightarrow N_{CB} = \frac{F}{6} \\ N_{CB} - N_{CD} = 0 &\longrightarrow N_{CD} = \frac{F}{6} \\ -N_{CD} + R_{Dh} = 0 &\longrightarrow R_{Dh} = \frac{F}{6} \end{aligned} \tag{17}$$

L' equilibrio alla rotazione del secondo tratto, con polo in B, fornisce :

$$-T_{CB}\,L - M_{BC} + M_{CB} = 0 \longrightarrow T_{CB} = -\frac{M_{BC}}{L} + \frac{M_{CB}}{L} = -\frac{F}{9} - \frac{7}{18}\,F = -\frac{F}{2} \tag{18}$$

ed anche, per l'equilibrio del secondo tratto alla traslazione verticale:

$$-T_{BC} + T_{CB} = 0 \longrightarrow T_{CB} = -\frac{F}{2} \tag{19}$$

L' equilibrio del nodo in B alla traslazione verticale garantisce che :

$$-N_{BA} - T_{BC} = 0 \longrightarrow N_{BA} = \frac{F}{2} \tag{20}$$

e quindi la reazione verticale dell' incastro :

$$-N_{BA} + R_{Av} = 0 \longrightarrow R_{Av} = \frac{F}{2} \tag{21}$$

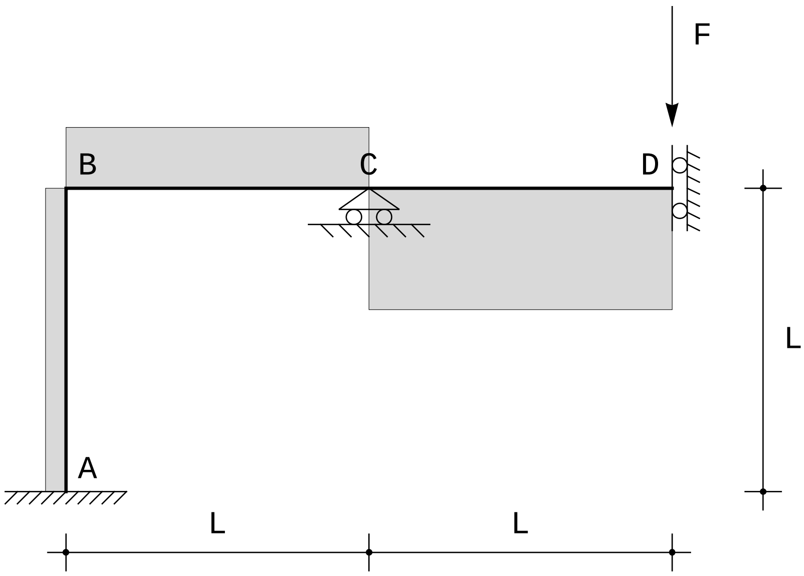
Infine, dall' equilibrio del terzo tratto si trae :

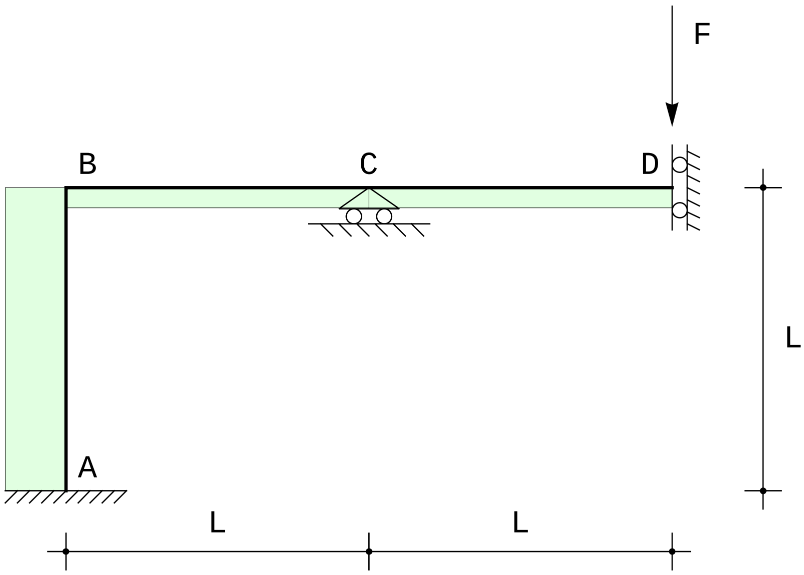
$$\begin{aligned} & -T_{CD} + F = 0 \longrightarrow T_{CD} = F \\ & \mathcal{M}_{rD} - FL - M_{CD} = 0 \longrightarrow \mathcal{M}_{rD} = FL + M_{CD} = FL - \frac{7}{18} FL = \frac{11}{18} FL \end{aligned} \tag{22}$$

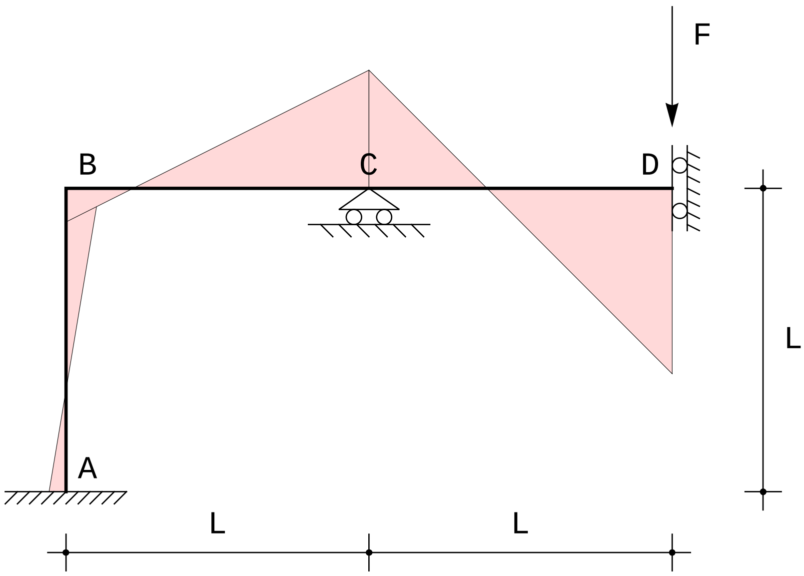
e quindi l' equilibrio del concio in C permette di calcolare la reazione dell' appoggio :

$$-T_{CB} + R_C + T_{CD} = 0 \longrightarrow R_C = T_{CB} - T_{CD} = -\frac{3}{2} F \tag{23}$$

■ Il tracciamento dei diagrammi



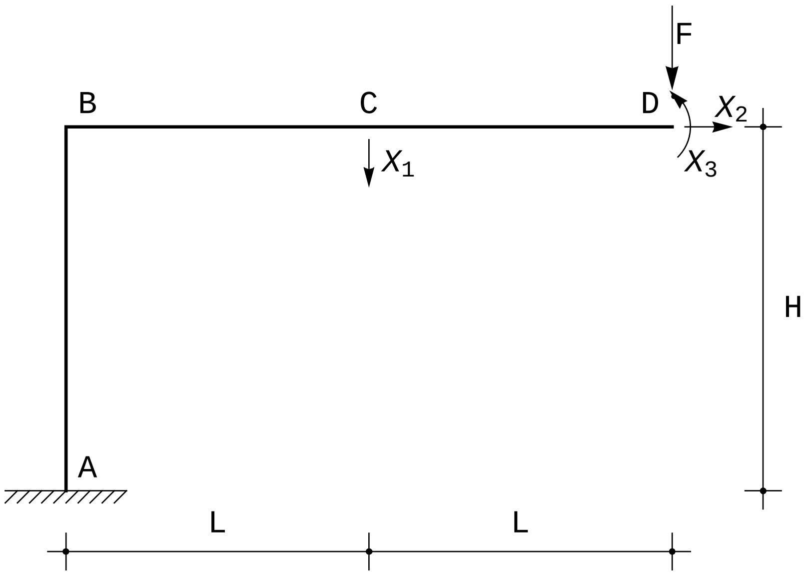




Esercizio n .10

Si vuole ora affrontare lo stesso esempio precedente assumendo un diverso sistema isostatico equivalente, ed utilizzando il metodo della composizione degli spostamenti. A tal fine si sceglie la struttura a mensola di Figura 7, e su di essa si impongono le tre condizioni di congruenza:

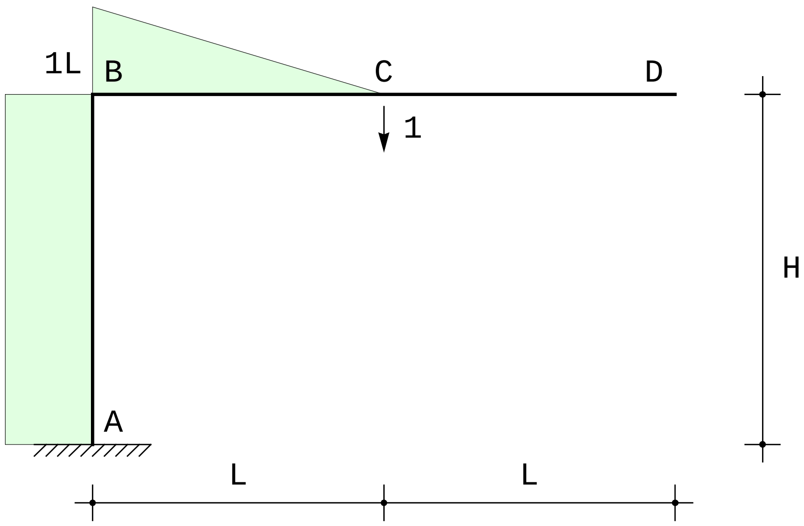
$$
\begin{aligned}
u_{2\,C} &= 0\\
u_{3\,D} &= 0\\
\phi_D &= 0
\end{aligned}
\tag{24}
$$



Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti si scrivera' allora :

$$\begin{aligned} u_{2C} &= u_{2C}^{(0)} + X_1\, u_{2C}^{(1)} + X_2\, u_{2C}^{(2)} + X_3\, u_{2C}^{(3)} = 0 \\ u_{3D} &= u_{3D}^{(0)} + X_1\, u_{3D}^{(1)} + X_2\, u_{3D}^{(2)} + X_3\, u_{3D}^{(3)} = 0 \\ \phi_D &= \phi_D^{(0)} + X_1\, \phi_D^{(1)} + X_2\, \phi_D^{(2)} + X_3\, \phi_D^{(3)} = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

■ Il calcolo dei coefficienti



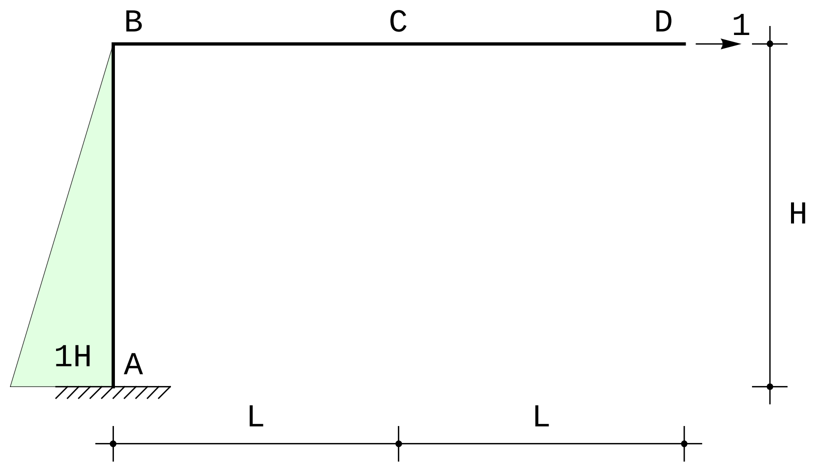
Lo schema 1 e' riportato in Figura 8, e su di esso si calcolano i coefficienti $u_{2C}^{(1)}, u_{3D}^{(1)}$ e $\phi_D^{(1)}$. Si ha immediatamente:

$$u_{2C}^{(1)} = 1\,L\,\frac{H}{EI}\,L + 1\,\frac{L^3}{3\,EI} = \frac{HL^2}{EI} + \frac{L^3}{3\,EI}$$

$$u_{3D}^{(1)} = 1\,L\,\frac{H^2}{2\,EI} \qquad (26)$$

$$\phi_{D}^{(1)} = -1\,L\,\frac{H}{EI} - 1\,\frac{L^2}{2\,EI}$$

Il secondo schema prevede una forza orizzontale unitaria in D, che causa il momento riportato in Figura 9. Su di esso si calcolano i coefficienti $u_{2C}^{(2)}$, $u_{3D}^{(2)}$ e $\phi_{D}^{(2)}$



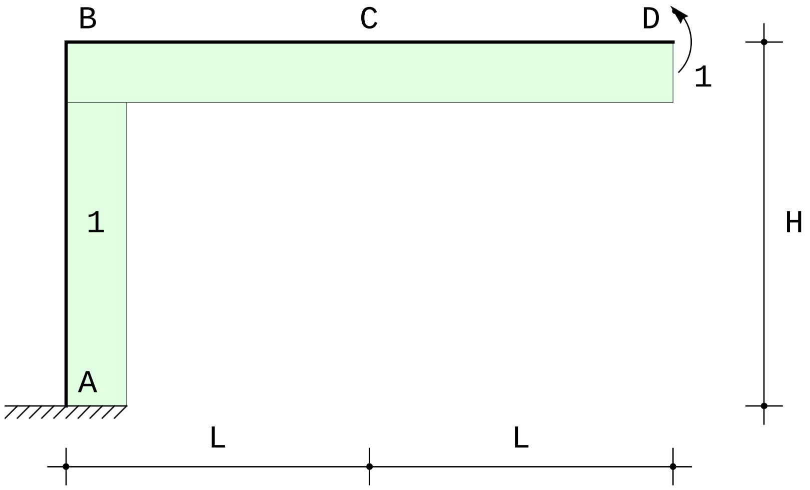
anch' essi deducibili immediatamente da una semplice composizione di spostamenti :

$$u_{2C}^{(2)} = 1\,\frac{H^2}{2\,EI}\,L = \frac{H^2\,L}{2\,EI}$$

$$u_{3D}^{(2)} = 1\,\frac{H^3}{3\,EI} \qquad (27)$$

$$\phi_{D}^{(2)} = -1\,\frac{H^2}{2\,EI}$$

Il terzo schema prevede una coppia unitaria in D, che causa il momento riportato in Figura 10. Su di esso si calcolano i coefficienti $u_{2C}^{(3)}$, $u_{3D}^{(3)}$ e $\phi_{D}^{(3)}$:

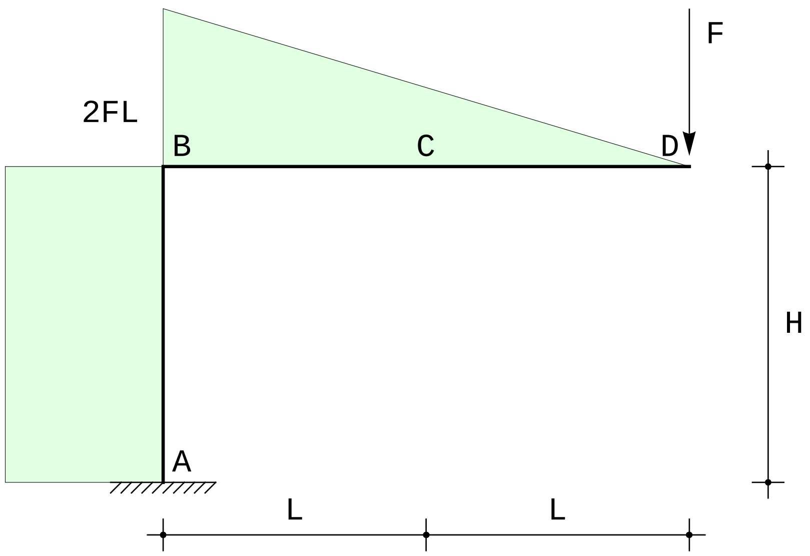


$$u_{2C}^{(3)} = -1\,\frac{H}{EI}\,L - 1\,\frac{L^2}{2\,EI}$$

$$u_{3D}^{(3)} = -1\,\frac{H^2}{2\,EI} \qquad (28)$$

$$\phi_D^{(3)} = 1\,\frac{H}{EI} + 1\times 2\,\frac{L}{EI}$$

Infine, lo schema zero prevede la presenza delle forze applicate, ossia - in questo caso - della forza F in D. Il diagramma del momento e' riportato in Figura 11, ed i relativi coefficienti si ottengono come:



$$u_{2C}^{(0)} = 2\,FL\,\frac{H}{EI}\,L + \frac{FL}{EI}\,\frac{L^2}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{FL}{EI}\,L\,\frac{2}{3}\,L = 2\,\frac{FL^2\,H}{EI} + \frac{5\,FL^3}{6\,EI}$$

$$u_{3D}^{(0)} = 2\,FL\,\frac{H^2}{2\,EI} \qquad (29)$$

$$\phi_D^{(0)} = -2\,FL\,\frac{H}{EI} - F\,\frac{(2\,L)^2}{2\,EI} = -2\,\frac{FLH}{EI} - \frac{2\,FL^2}{EI}$$

Si e' utilizzato il metodo di Mohr per ottenere lo spostamento trasversale in mezzeria per una mensola caricata in un estremo.

La soluzione delle equazioni di congruenza

Sostituendo i valori dei coefficienti nelle (25) si giunge al sistema:

$$
\begin{aligned}
&u_{2C} = \\
&\quad 2\frac{FL^2H}{EI} + \frac{5FL^3}{6EI} + X_1\left(\frac{HL^2}{EI} + \frac{L^3}{3EI}\right) + X_2\frac{H^2L}{2EI} - X_3\left(\frac{HL}{EI} + \frac{L^2}{2EI}\right) = 0 \\
&u_{3D} = 2FL\frac{H^2}{2EI} + X_1\frac{LH^2}{2EI} + X_2\frac{H^3}{3EI} - X_3\frac{H^2}{2EI} = 0 \\
&\phi_D = \\
&\quad -2\frac{FLH}{EI} - \frac{2FL^2}{EI} - X_1\left(\frac{LH}{EI} + \frac{L^2}{2EI}\right) - X_2\frac{H^2}{2EI} + X_3\left(\frac{H}{EI} + \frac{2L}{EI}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{30}
$$

con soluzione :

$$
\begin{aligned}
X_1 &= -\frac{F(11H + 16L)}{8H + 10L} \\
X_2 &= \frac{3FL^2}{8H^2 + 10HL} \\
X_3 &= \frac{FL(5H + 6L)}{8H + 10L}
\end{aligned}
\tag{31}
$$

e nel caso in cui H = L :

$$
\begin{aligned}
X_1 &= -\frac{3F}{2} \\
X_2 &= \frac{F}{6} \\
X_3 &= \frac{11FL}{18}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

confermando i valori ottenuti nell' esercizio precedente.

Figure

Figure

Vincoli