

# 20 - La scrittura diretta delle equazioni di congruenza

■ [A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 9 aprile 2013]

Si consideri una struttura piana costituita da  $t$  tratti, per cui quindi possano scriversi  $3t$  equazioni di equilibrio. Se il numero di reazioni vincolari incognite  $s$  è maggiore di  $3t$ , non sarà possibile risolvere le equazioni di equilibrio, e la struttura si dirà iperstatica, con grado di iperstaticità  $i$  pari ad  $s-3t$ .

In questa Esercitazione si illustra un metodo di calcolo delle reazioni di una simile trave iperstatica, che conduce alla scrittura di  $i$  equazioni supplementari, che poi possono essere risolte a fornire  $i$  reazioni vincolari. Le restanti reazioni possono poi essere calcolate utilizzando le equazioni di equilibrio. Il metodo evolve secondo i seguenti passi:

1. la struttura di partenza,  $i$  volte iperstatica, viene trasformata in un sistema isostatico equivalente (S.I.E.), attraverso la rimozione di opportuni gradi di vincolo esterno, oppure attraverso opportune sconnessioni. Ogni qualvolta si elimina un grado di vincolo, si aggiunge al sistema la reazione incognita, ed ogni qualvolta si opera una sconnessione, si aggiunge al sistema la caratteristica della sollecitazione interna incognita. Alla fine del procedimento, il sistema isostatico equivalente sarà costituito da una struttura isostatica caricata dai carichi originari, e da  $i$  quantità incognite  $X_i$  (incognite iperstatiche).

2. Per il calcolo delle incognite iperstatiche, si scrivono  $i$  equazioni di congruenza, ripristinando le equazioni di vincolo originarie: se ad esempio si è soppresso un carrello, occorre imporre che lo spostamento corrispondente sia nullo. Si ottiene il sistema:

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (1)$$

dove la matrice  $\mathbf{A}$ , quadrata e di ordine  $i$ , risulterà simmetrica, a causa del teorema di reciprocità. La generica colonna  $i$ -ma della matrice può calcolarsi sullo schema  $S^{(i)}$ , costituito dalla struttura isostatica caricata dalla sola incognita  $X_i$ , assunta di valore unitario, mentre la colonna dei termini noti può calcolarsi sullo schema  $S^{(0)}$ , costituito dalla struttura isostatica soggetta ai carichi originari.

3. Il calcolo dei termini della matrice  $\mathbf{A}$ , e del vettore  $\mathbf{b}$  dei termini noti si riduce quindi a calcolare spostamenti e/o rotazioni su sistemi isostatici, ed a tal fine si possono utilizzare i metodi studiati in precedenza.

4. riempita la matrice  $\mathbf{A}$ , ed il vettore  $\mathbf{b}$ , si risolve il sistema (1) e si ricavano le incognite  $X_i$ . Se si vuol conoscere anche le altre reazioni, basta scrivere le equazioni di equilibrio sul S.I.E.

Come semplice esempio, si consideri la trave continua su cinque appoggi di Figura 1, caricata dal carico  $q$  esteso a tutta la luce:

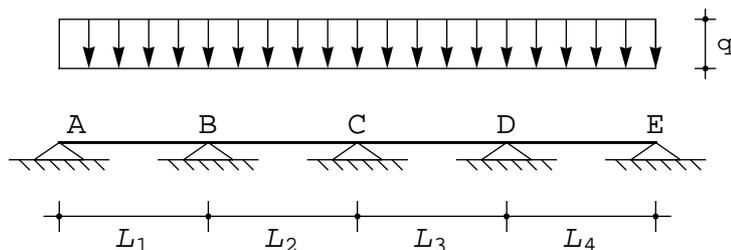


Figura 1 - Una trave continua tre volte iperstatica

Essa e' tre volte iperstatica, e come si e' visto nelle Lezioni, puo' essere convenientemente risolta applicando le equazioni dei tre momenti, inserendo tre cerniere in corrispondenza dei tre appoggi centrali. Tuttavia, e' anche possibile utilizzare un diverso sistema isostatico equivalente, rimuovendo del tutto i tre appoggi centrali, e sostituendoli con le tre reazioni incognite  $X_1$ ,  $X_2$  ed  $X_3$ . Si giunge quindi al S.I.E. di Figura 2, e su di esso va imposto il ripristino della congruenza, ossia va imposto che gli spostamenti siano nulli in corrispondenza delle ascisse dei tre appoggi rimossi:

$$\begin{aligned} u_{2B} &= 0 \\ u_{2C} &= 0 \\ u_{2D} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

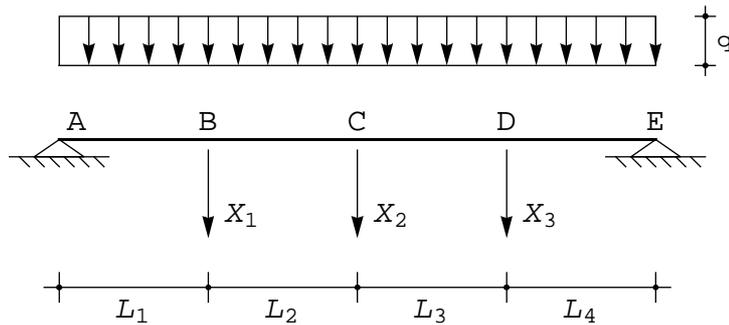


Figura 2 - Un sistema isostatico equivalente alla struttura di Figura 1 (S.I.E.)

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, ogni calcolo condotto sul S.I.E. puo' essere scisso nella somma di quattro contributi, calcolati sui sistemi parziali di Figura 3, e simbolicamente puo' scriversi:

$$S.I.E. = S^{(0)} + X_1 S^{(1)} + X_2 S^{(2)} + X_3 S^{(3)} \quad (3)$$

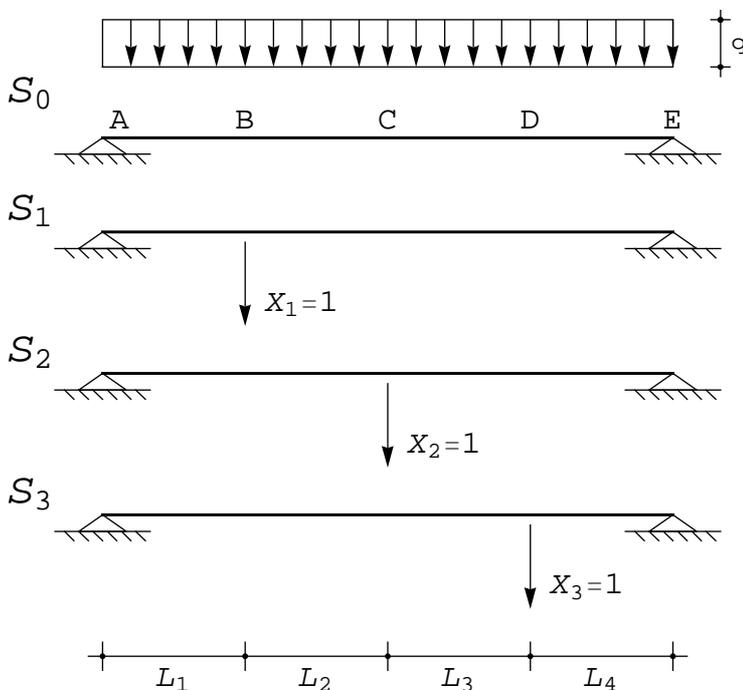


Figura 3 - Il sistema isostatico equivalente suddiviso in aliquote singole

## Esempio n .1

Come primo, immediato esempio, si consideri la trave di Figura 4, una volta iperstatica, e si voglia calcolarne le reazioni vincolari.

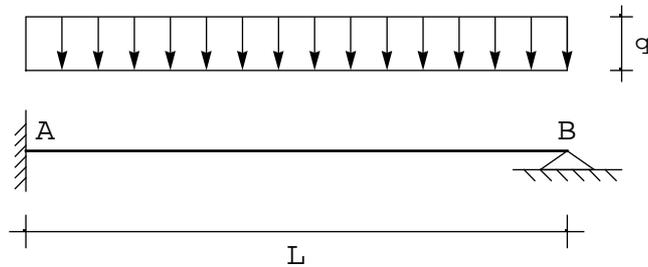


Figura 4 - Una trave semplicemente iperstatica

**Prima soluzione** - Si elimina l'appoggio in B, sostituendolo con la sua reazione (incognita  $X_1$ ). La struttura isostatica equivalente e' quindi la mensola di Figura 5

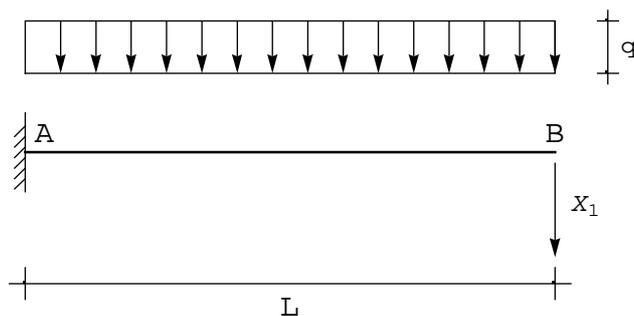


Figura 5 - Un sistema isostatico (S.I.E.) equivalente per la trave di Figura 4

e l'equazione di congruenza dovra' imporre che l'abbassamento in B sia nullo:

$$u_{2B} = 0 \quad (4)$$

Infine, operando sui sistemi parziali di Figura 6, il principio di sovrapposizione degli effetti ci permette di scrivere:

$$u_{2B} = u_{2B}^{(0)} + X_1 u_{2B}^{(1)} = 0 \quad (5)$$

Sara' quindi, in definitiva :

$$\frac{qL^4}{8EI} + X_1 \frac{L^3}{3EI} = 0 \quad (6)$$

da cui :

$$X_1 = R_B = -\frac{3}{8} qL \quad (7)$$

Le restanti reazioni possono calcolarsi sfruttando le equazioni di equilibrio:

$$R_A + R_B + qL = 0 \quad (8)$$

$$M_{rA} - \frac{qL^2}{2} - R_B L = 0$$

e forniscono:

$$R_A = -\frac{5}{8} qL \quad (9)$$

$$M_{rA} = \frac{qL^2}{8}$$

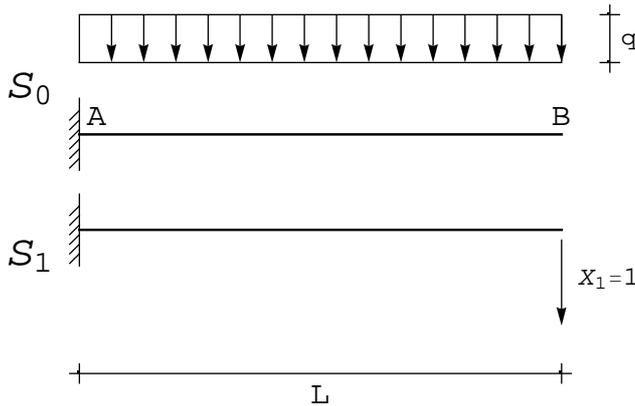


Figura 6 - I due sistemi parziali per il calcolo dei coefficienti dell'equazione di congruenza (5)

**Seconda soluzione** - Si introduce una cerniera in A, trasformando l'incastro in un appoggio, e si aggiunge la coppia reattiva incognita (incognita iperstatica  $X_1$ ). La struttura isostatica equivalente è ora quindi la trave appoggiata di Figura 7

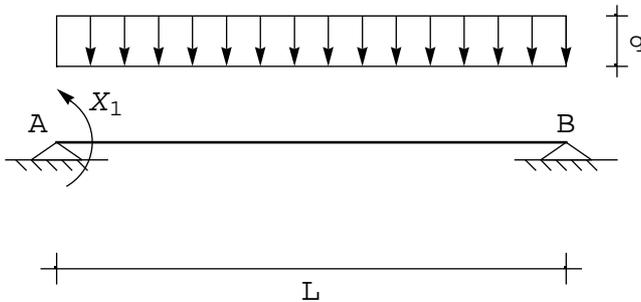


Figura 7 - Un secondo possibile sistema isostatico equivalente (S.I.E.) per la trave di Figura 4

e l'equazione di congruenza dovrà imporre che la rotazione in A sia nulla:

$$\phi_A = 0 \quad (10)$$

Infine, operando sui sistemi parziali di Figura 8, il principio di sovrapposizione degli effetti ci permette di scrivere:

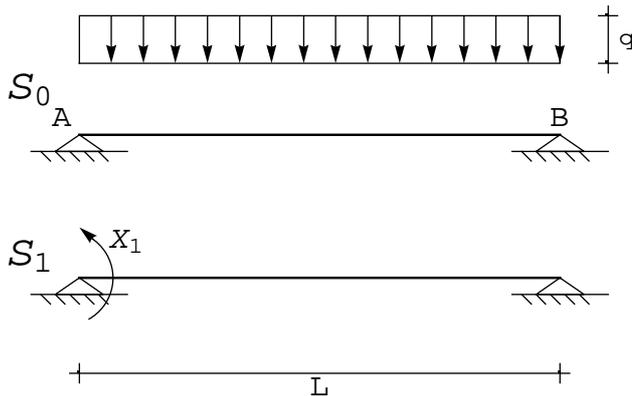


Figura 8 - I due sistemi parziali per il calcolo dei coefficienti dell'equazione di congruenza (11)

$$\phi_A = \phi_A^{(0)} + X_1 \phi_A^{(1)} = 0 \quad (11)$$

ossia :

$$-\frac{q L^3}{24 EI} + X_1 \frac{L}{3 EI} = 0 \quad (12)$$

da cui :

$$X_1 = \mathcal{M}_{rA} = \frac{q L^2}{8} \quad (13)$$

Le restanti reazioni possono calcolarsi sfruttando le equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} R_A + R_B + qL &= 0 \\ \mathcal{M}_{rA} - \frac{qL^2}{2} - R_B L &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

e forniscono:

$$\begin{aligned} R_B &= -\frac{3}{8} qL \\ R_A &= -\frac{5}{8} qL \end{aligned} \quad (15)$$

**Nota** - Ulteriori scelte del sistema isostatico equivalente sono ovviamente possibili, come ad esempio una trave con bipendolo ed appoggio, oppure ancora una trave con incastro, cerniera intermedia ed appoggio. Tuttavia, lo spirito del metodo consiste nel ricondursi ad una struttura isostatica equivalente che sia il più semplice e conosciuta possibile, e su di essa calcolare i coefficienti delle equazioni di congruenza

## Esempio n .2

Si consideri la trave di Figura 9, due volte iperstatica, e si voglia affrontare il calcolo delle reazioni attraverso la scrittura diretta di due equazioni di congruenza.

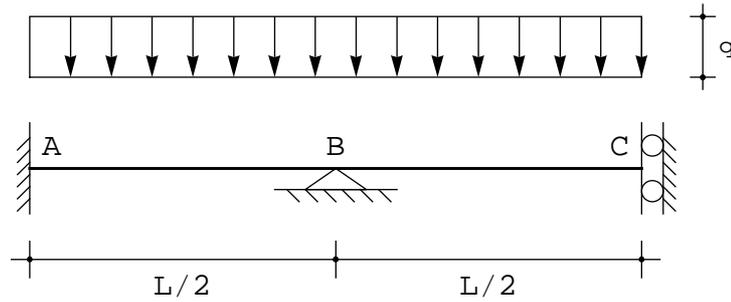


Figura 9 - Una trave due volte iperstatica

Una possibile scelta per il sistema isostatico equivalente puo' essere la struttura a mensola, ottenuta rimuovendo l'appoggio in mezzeria (ed aggiungendo la sua reazione incognita  $X_1$ ) ed il bipendolo a destra (aggiungendo quindi la coppia reattiva incognita  $X_2$ ).

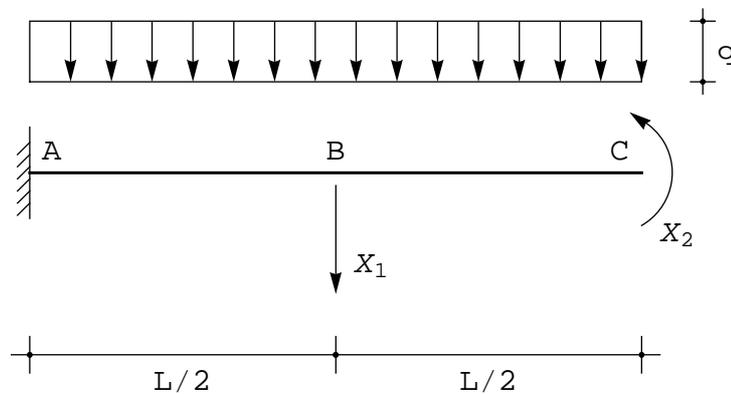


Figura 10 - Un possibile sistema isostatico equivalente per la trave di Figura 9

Le equazioni che ripristinano la congruenza si scrivono come:

$$\begin{aligned} u_{2B} &= u_{2B}^{(0)} + u_{2B}^{(1)} X_1 + u_{2B}^{(2)} X_2 = 0 \\ \phi_C &= \phi_C^{(0)} + \phi_C^{(1)} X_1 + \phi_C^{(2)} X_2 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

I coefficienti di  $X_1$  e di  $X_2$  sono di immediata deduzione, e possono essere calcolati sugli schemi  $S_1$  ed  $S_2$ , rispettivamente:

$$\begin{aligned} u_{2B}^{(1)} &= \frac{1}{3EI} \left( \frac{L}{2} \right)^3 \\ \phi_C^{(1)} &= -\frac{1}{2EI} \left( \frac{L}{2} \right)^2 \\ u_{2B}^{(2)} &= -\frac{1}{2EI} \left( \frac{L}{2} \right)^2 \\ \phi_C^{(2)} &= \frac{L}{EI} \end{aligned} \quad (17)$$

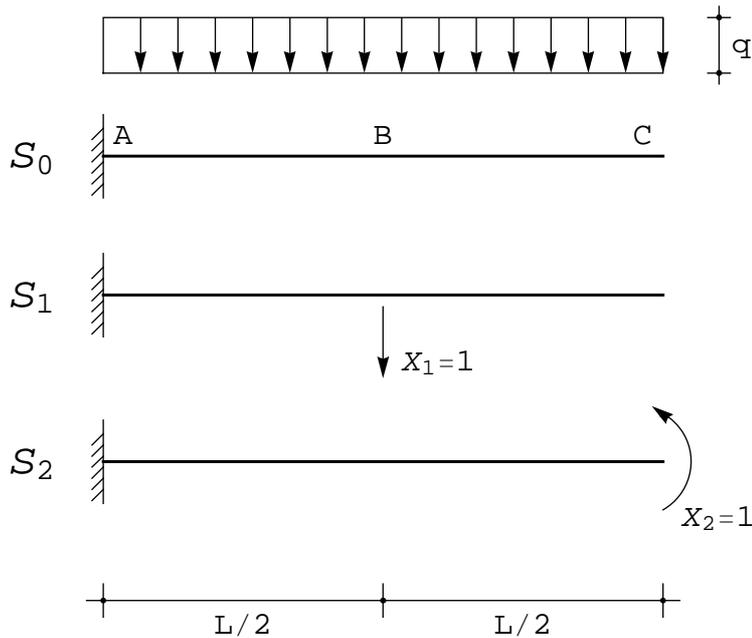


Figura 11 - I tre sistemi parziali sui quali determinare i coefficienti delle equazioni di congruenza

Il termine noto  $\phi_C^{(0)}$  e' anch'esso immediato:

$$\phi_C^{(0)} = -\frac{q L^3}{6 EI} \quad (18)$$

mentre il termine  $u_{2B}^{(0)}$ , che rappresenta l'abbassamento in mezzera sullo schema  $S_0$ , puo' essere calcolato applicando i corollari di Mohr, oppure tramite composizione degli spostamenti. Seguendo quest'ultimo procedimento, si considera la mensola di lunghezza  $L/2$ , soggetta al carico  $q$ , e caricata anche, nell'estremo libero, dal taglio e dal momento trasmessi dalla semiluce mancante. Si ha quindi:

$$u_{2B}^{(0)} = \frac{q}{8 EI} \left(\frac{L}{2}\right)^4 + \frac{q L}{2} \frac{1}{3 EI} \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{q L^2}{8} \frac{1}{2 EI} \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{17}{384} \frac{q L^4}{EI} \quad (19)$$

in quanto :

$$\begin{aligned} T\left(\frac{L}{2}\right) &= \frac{q L}{2} \\ M\left(\frac{L}{2}\right) &= -\frac{q L^2}{8} \end{aligned} \quad (20)$$

Le due equazioni di congruenza si scrivono allora :

$$\begin{aligned} \frac{17}{384} \frac{q L^4}{EI} + \frac{X_1}{3 EI} \left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{X_2}{2 EI} \left(\frac{L}{2}\right)^2 &= 0 \\ -\frac{q L^3}{6 EI} - \frac{X_1}{2 EI} \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{X_2 L}{EI} &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

con soluzione :

$$X_1 = -\frac{9}{10} q L$$

$$X_2 = \frac{13}{240} q L^2$$

### Esempio n. 3

Si riprende in esame la struttura di Figura 1, per illustrare come una opportuna scelta del sistema isostatico equivalente possa condurre ad una sostanziale riduzione del carico computazionale.

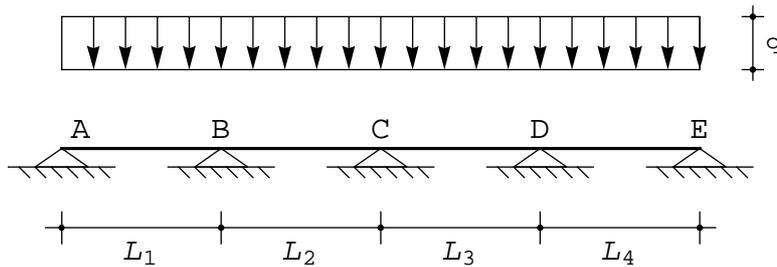


Figura 12 - Un sistema iperstatico adatto all'equazione dei tre momenti

Si inseriscano tre cerniere in corrispondenza dei tre appoggi, operando tre sconnessioni, e quindi riducendosi ad una struttura isostatica. Inoltre, si aggiungano i tre momenti flettenti (incogniti)  $X_1$ ,  $X_2$  ed  $X_3$ , agenti rispettivamente sul primo, sul secondo e sul terzo appoggio. Si è giunti al S.I.E. di Figura 13, su cui occorre imporre il rispetto delle tre equazioni di congruenza:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_B &= 0 \\ \Delta\phi_C &= 0 \\ \Delta\phi_D &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

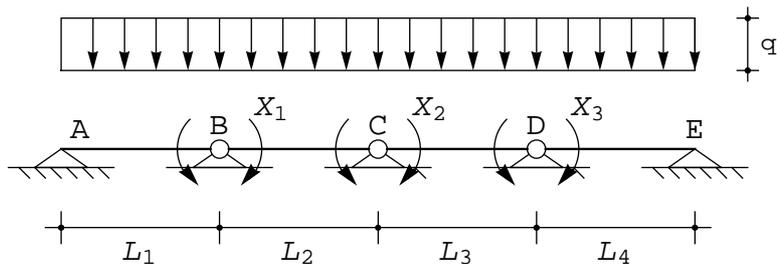


Figura 13 - Un conveniente S.I.E. per la struttura di Figura 12

Come può osservarsi, la trave si è ora suddivisa in quattro travi semplicemente appoggiate, su cui è immediato leggere gli spostamenti desiderati. Ad esempio, la rotazione  $\phi_{Bsin}$  può essere calcolata sulla trave AB, soggetta al carico ed alla coppia  $X_1$  positiva, e vale:

$$\phi_{Bsin} = q \frac{L_1^3}{24 EI} + X_1 \frac{L_1}{3 EI} \quad (24)$$

Analogamente,  $\phi_{Bdes}$  è da calcolare sulla trave BC, soggetta al carico, alla coppia  $X_1$ , negativa, ed alla coppia  $X_2$ , positiva:

$$\phi_{Bdes} = -\varrho \frac{L_2^3}{24 EI} - X_1 \frac{L_2}{3 EI} - X_2 \frac{L_2}{6 EI} \quad (25)$$

La prima equazione di congruenza si scrive allora :

$$\varrho \frac{L_1^3}{24 EI} + X_1 \frac{L_1}{3 EI} = -\varrho \frac{L_2^3}{24 EI} - X_1 \frac{L_2}{3 EI} - X_2 \frac{L_2}{6 EI} \quad (26)$$

mentre per gli altri due appoggi si potrà scrivere:

$$\varrho \frac{L_2^3}{24 EI} + X_1 \frac{L_2}{6 EI} + X_2 \frac{L_2}{3 EI} = -\varrho \frac{L_3^3}{24 EI} - X_2 \frac{L_3}{3 EI} - X_3 \frac{L_3}{6 EI} \quad (27)$$

$$\varrho \frac{L_3^3}{24 EI} + X_2 \frac{L_3}{6 EI} + X_3 \frac{L_2}{3 EI} = -\varrho \frac{L_4^3}{24 EI} - X_3 \frac{L_4}{3 EI} \quad (28)$$

In notazione matriciale, le tre equazioni di congruenza assumono un aspetto compatto:

$$\begin{pmatrix} \frac{L_1+L_2}{3} & \frac{L_2}{6} & 0 \\ \frac{L_2}{6} & \frac{L_2+L_3}{3} & \frac{L_3}{6} \\ 0 & \frac{L_3}{6} & \frac{L_3+L_4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = -\frac{\varrho}{24} \begin{pmatrix} L_1^3 + L_2^3 \\ L_2^3 + L_3^3 \\ L_3^3 + L_4^3 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Inoltre, l'introduzione di ulteriori appoggi intermedi non distrugge la banda tri-diagonale della matrice dei coefficienti, e la generalizzazione del sistema (29) al caso di  $n$  appoggi intermedi non presenta particolari difficoltà.

Risolvendo le tre equazioni (26 - 28) si conoscono quindi i tre momenti sugli appoggi intermedi:

$$X_1 = \frac{-\left(\varrho \left( L_1^3 \left( 4 L_2 \left( L_3 + L_4 \right) + L_3 \left( 3 L_3 + 4 L_4 \right) \right) + L_2 \left( -L_3^4 - 2 L_3^3 L_4 + L_3 L_4^3 + 2 L_2^3 \left( L_3 + L_4 \right) + L_2^2 L_3 \left( 3 L_3 + 4 L_4 \right) \right) \right)}{\left( 8 \left( L_2 \left( 3 L_2 \left( L_3 + L_4 \right) + L_3 \left( 3 L_3 + 4 L_4 \right) \right) + L_1 \left( 4 L_2 \left( L_3 + L_4 \right) + L_3 \left( 3 L_3 + 4 L_4 \right) \right) \right)} \quad (30)$$

$$X_2 = \frac{\left( \varrho \left( L_1 + L_2 \right) \left( L_3 + L_4 \right) \left( L_1^2 L_2 - L_1 L_2^2 - L_2^3 - L_3^3 - L_3^2 L_4 + L_3 L_4^2 \right) \right)}{\left( 4 \left( L_2 \left( 3 L_2 \left( L_3 + L_4 \right) + L_3 \left( 3 L_3 + 4 L_4 \right) \right) + L_1 \left( 4 L_2 \left( L_3 + L_4 \right) + L_3 \left( 3 L_3 + 4 L_4 \right) \right) \right)} \quad (31)$$

$$X_3 = \frac{\left( \varrho \left( L_3 \left( -L_2 \left( L_1^3 + L_2^3 \right) + 2 \left( L_1 + L_2 \right) \left( L_2^3 + L_3^3 \right) + \left( L_2^2 - 4 \left( L_1 + L_2 \right) \left( L_2 + L_3 \right) \right) \left( L_3^3 + L_4^3 \right) \right) \right)}{\left( 8 \left( - \left( L_1 + L_2 \right) L_3^2 + \left( 4 L_1 \left( L_2 + L_3 \right) + L_2 \left( 3 L_2 + 4 L_3 \right) \right) \left( L_3 + L_4 \right) \right)} \quad (32)$$

E' ora possibile dedurre i tagli, campata per campata, scrivendo le equazioni di equilibrio. Nella prima campata, in base al diagramma di Figura 14, si ha:

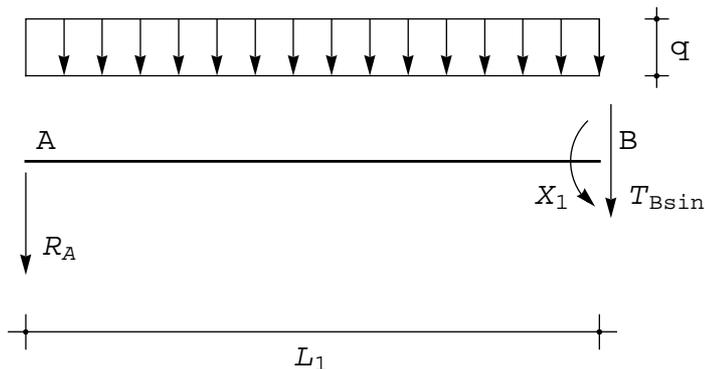


Figura 14 - Lo schema per il calcolo di reazioni e tagli sulla prima campata

$$\begin{aligned}
 R_A + qL_1 + T_{Bsin} &= 0 \\
 X_1 - \frac{qL_1^2}{2} - T_{Bsin} L_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{33}$$

da cui :

$$\begin{aligned}
 R_A &= -\frac{X_1}{L_1} - \frac{qL_1}{2} \\
 T_{Bsin} &= \frac{X_1}{L_1} - \frac{qL_1}{2}
 \end{aligned} \tag{34}$$

Nella seconda campata, il diagramma di riferimento e' quello di Figura 15, e su di esso si puo' scrivere:

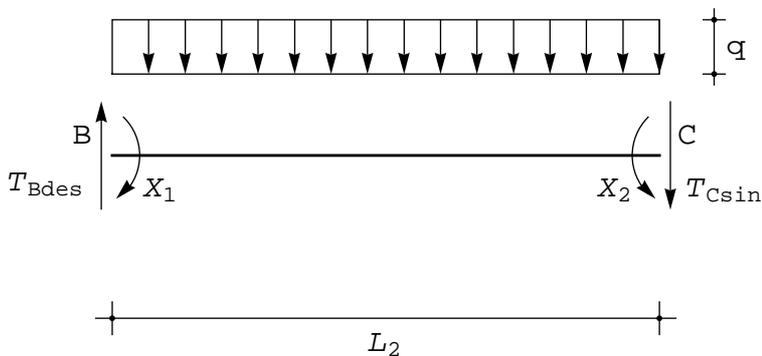


Figura 15 - Lo schema per il calcolo di reazioni e tagli sulla seconda campata

$$\begin{aligned}
 -T_{Bdes} + qL_2 + T_{Csin} &= 0 \\
 -X_1 + X_2 - \frac{qL_2^2}{2} - T_{Csin} L_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{35}$$

da cui :

$$\begin{aligned}
 T_{Bdes} &= \frac{qL_2}{2} - \frac{X_1}{L_2} + \frac{X_2}{L_2} \\
 T_{Csin} &= \frac{-X_1}{L_2} + \frac{X_2}{L_2} - \frac{qL_2}{2}
 \end{aligned} \tag{36}$$

La reazione dell' appoggio in B e' quindi fornita da :

$$R_B = T_{Bsin} - T_{Bdes} = X_1 \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) - \frac{q}{2} (L_1 + L_2) - \frac{X_2}{L_2} \quad (37)$$

Il restante studio e' lasciato come esercizio.

## Esempio n .4

Si vuole ora esaminare la struttura di Figura 16, semplicemente iperstatica, soggetta ad un carico uniformemente distribuito di intensita' q, e ad una forza concentrata F sullo sbalzo.

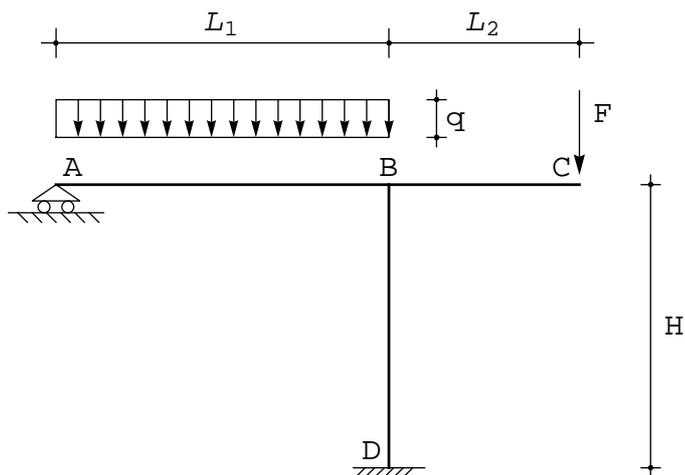


Figura 16 - Un telaio con piedritto e sbalzo

Scegliendo come incognita iperstatica la reazione verticale del carrello in A, la struttura isostatica equivalente e' quella in Figura 17, e la corrispondente equazione di congruenza impone che lo spostamento verticale del carrello sia nullo:

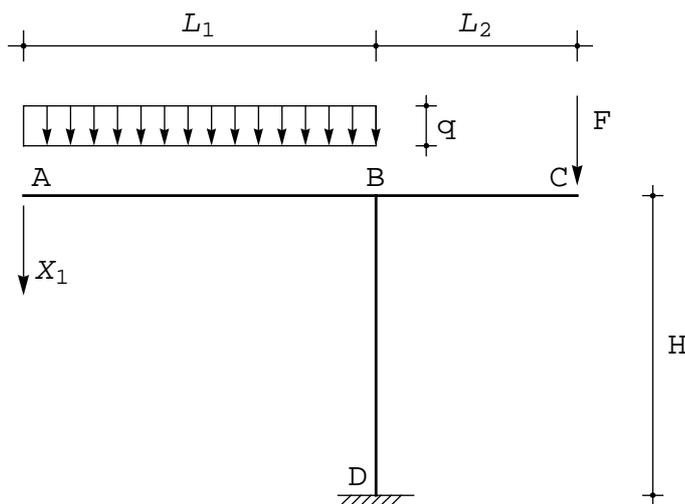


Figura 17 - Il S.I.E. al telaio di Figura 16

$$u_{2A} = 0 \quad (38)$$

Ne segue, per il principio di sovrapposizione degli effetti, che si puo' scrivere:

$$u_{2A}^{(01)} + u_{2A}^{(02)} + X_1 u_{2A}^{(1)} = 0 \quad (39)$$

dove  $u_{2A}^{(01)}$  e' lo spostamento in A dovuto al carico  $q$ ,  $u_{2A}^{(02)}$  e' lo spostamento in A dovuto alla forza  $F$  ed  $u_{2A}^{(1)}$  e' lo spostamento in A dovuto ad una forza verticale unitaria in A. I tre contributi possono calcolarsi separatamente :

### ■ Calcolo di $u_{2A}^{(01)}$

Il diagramma del momento dovuto al carico  $q$  si presenta come in Figura 18, ed aiutandosi con esso si puo' utilizzare il metodo della composizione degli spostamenti. Il ritto BD, infatti, puo' essere riguardato come una mensola caricata dalla coppia di intensita'  $qL_1^2/2$ , e quindi la rotazione in B sara' pari a:

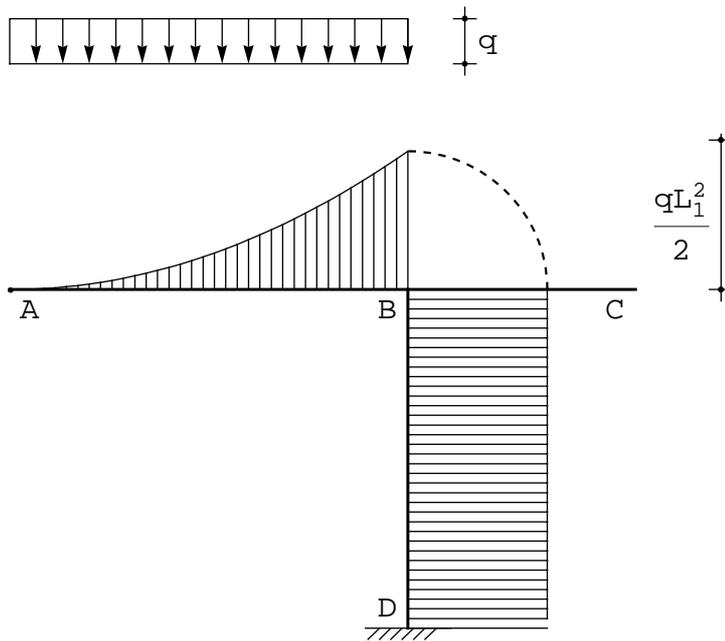


Figura 18 - Lo schema per il calcolo dell'abbassamento in A dovuto al carico  $q$

$$\phi_B = q \frac{L_1^2}{2} \frac{H}{EI} \quad (40)$$

Il tratto AB, riguardato come rigido, subisce questa rotazione, che porta il punto A ad avere uno spostamento pari a  $\phi_B L_1$ , e quindi il richiesto spostamento varra':

$$u_{2A}^{(01)} = q \frac{L_1^4}{8 EI} + q \frac{L_1^3 H}{2 EI} \quad (41)$$

### ■ Calcolo di $u_{2A}^{(02)}$

Analogamente a quanto detto per il caso precedente, il diagramma del momento, presentato in Figura 19, permette di stabilire che lo spostamento del punto A e' dovuto solo alla rotazione del punto B, e che tale rotazione puo' calcolarsi su uno schema a mensola soggetta alla coppia  $FL_2$ . Si ha quindi:

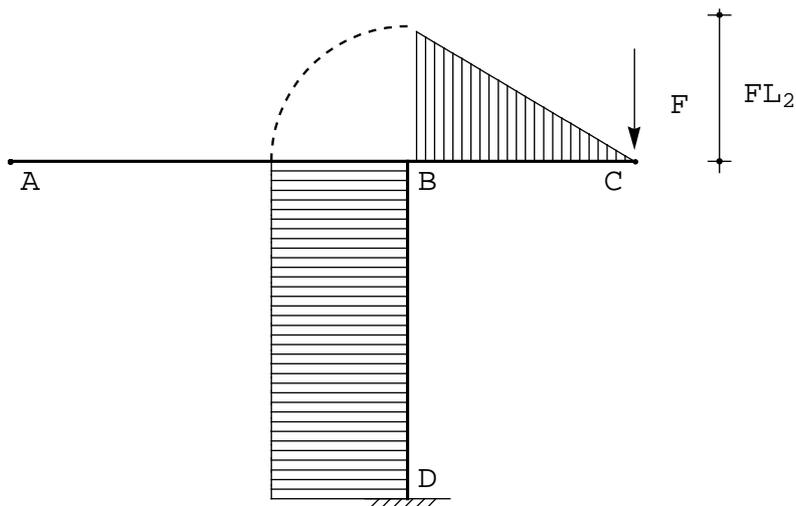


Figura 19 - Lo schema per il calcolo dell'abbassamento in A dovuto alla forza F

$$\phi_B = - F L_2 \frac{H}{EI} \quad (42)$$

$$u_{2A}^{(02)} = - F L_2 \frac{H}{EI} L_1 \quad (43)$$

### ■ Calcolo di $u_{2A}^{(1)}$

Il diagramma del momento di Figura 20 permette di scrivere:

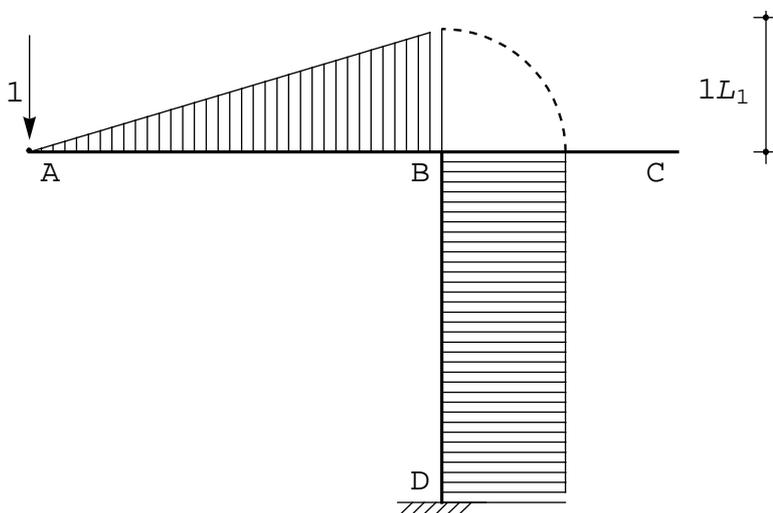


Figura 20 - Lo schema per il calcolo dell'abbassamento in A dovuto ad una incognita iperstatica di valore unitario

$$u_{2A}^{(1)} = \frac{L_1^3}{3EI} + \frac{L_1 H}{EI} L_1 \quad (44)$$

La condizione di congruenza (39) si scrive quindi:

$$q \frac{L_1^4}{8 EI} + q \frac{L_1^3 H}{2 EI} - F L_2 \frac{H}{EI} L_1 + X_1 \left( \frac{L_1^3}{3 EI} + \frac{L_1 H}{EI} L_1 \right) = 0 \quad (45)$$

da cui l' incognita iperstatica :

$$X_1 = - \frac{3 (4 H q L_1^2 + q L_1^3 - 8 F H L_2)}{8 L_1 (3 H + L_1)} \quad (46)$$

## Esempio n .5

Si consideri lo stesso schema dell' Esercizio n .4, ipotizzando pero' una cerniera in A, invece del carrello. Cio' rende ovviamente la struttura due volte iperstatica, e volendosi ricondurre allo stesso schema isostatico dell'esempio precedente occorre rimuovere la cerniera, e sostituirla con le sue due reazioni incognite.

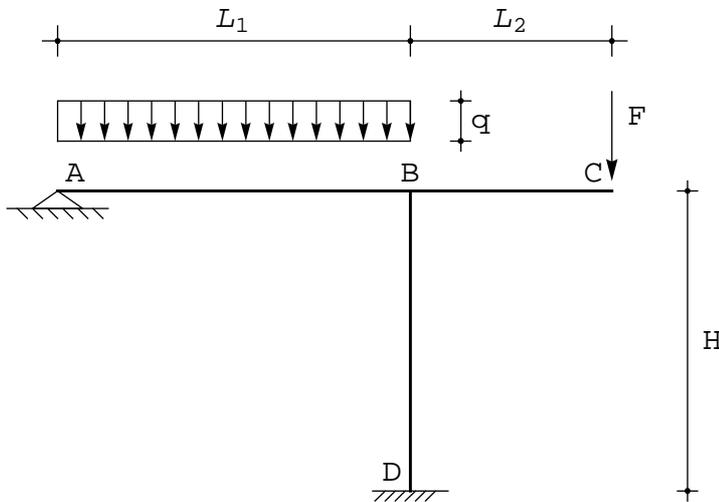


Figura 21 - Un telaio doppiamente iperstatico

Tale scelta presenta il vantaggio di poter utilizzare i risultati gia' ottenuti, e porta al sistema isostatico equivalente di Figura 22. Su di esso occorre imporre le due condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_{2A} &= 0 \\ u_{3A} &= 0 \end{aligned} \quad (47)$$

che per il principio di sovrapposizione degli effetti scriveremo come :

$$\begin{aligned} u_{2A}^{(01)} + u_{2A}^{(02)} + X_1 u_{2A}^{(1)} + X_2 u_{2A}^{(2)} &= 0 \\ u_{3A}^{(01)} + u_{3A}^{(02)} + X_1 u_{3A}^{(1)} + X_2 u_{3A}^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (48)$$

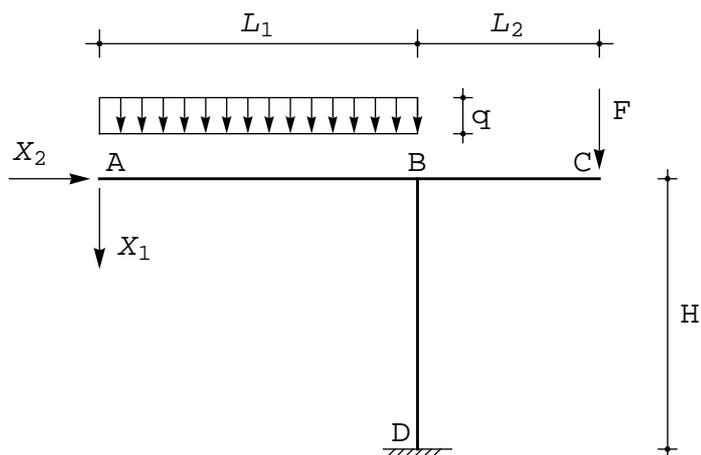


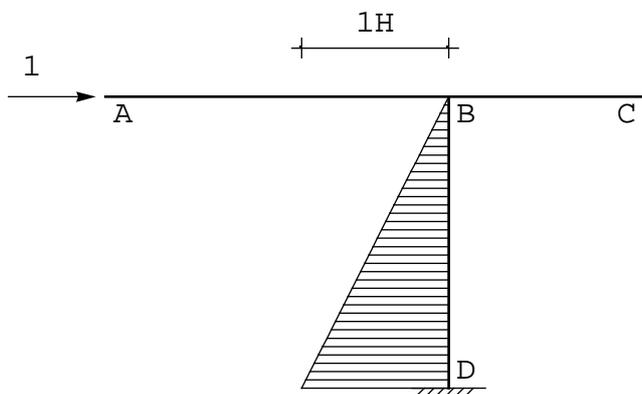
Figura 22 - Un possibile S.I.E. al telaio di Figura 21

Per il calcolo dei coefficienti di queste due equazioni, occorre far riferimento ai tre diagrammi dei momenti già tracciati (vedi Figure 18, 19 e 20) ed al diagramma di Figura 23). Per completare la prima equazione occorre il coefficiente  $u_{2A}^{(2)}$ , che rappresenta lo spostamento verticale del punto A dovuto ad una incognita  $X_2$  unitaria. Dal diagramma di Figura 23 si realizza che il piedritto BD può riguardarsi come una mensola soggetta alla forza trasversale di intensità unitaria, e quindi ruota di una quantità pari a:

$$\phi_B = -1 \frac{H^2}{2 EI} \quad (49)$$

causando uno spostamento in A pari :

$$u_{2A}^{(2)} = -1 \frac{H^2}{2 EI} L_1 \quad (50)$$

Figura 23 - Lo schema  $S_2$  per il calcolo degli spostamenti in A dovuti ad una incognita iperstatica di valore unitario

Su questo stesso schema, è poi immediato calcolare lo spostamento assiale del punto A, pari allo spostamento della mensola BD:

$$u_{3A}^{(2)} = 1 \frac{H^3}{3 EI} \quad (51)$$

Gli altri tre spostamenti assiali, dovuti rispettivamente al carico  $q$ , alla forza  $F$  ed alla incognita iperstatica  $X_1$  assunta unitaria, possono leggersi sui rispettivi schemi, e sono pari a:

$$u_{3A}^{(01)} = -q \frac{L_1^2}{2} \frac{H^2}{2EI} \quad (52)$$

$$u_{3A}^{(02)} = FL_2 \frac{H^2}{2EI} \quad (53)$$

$$u_{3A}^{(1)} = -1 L_1 \frac{H^2}{2EI} \quad (54)$$

Le due equazioni di congruenza si esplicitano allora come :

$$q \frac{L_1^4}{8EI} + q \frac{L_1^3 H}{2EI} - FL_2 \frac{H}{EI} L_1 + X_1 \left( \frac{L_1^3}{3EI} + \frac{L_1 H}{EI} L_1 \right) - X_2 \frac{H^2}{2EI} L_1 = 0 \quad (55)$$

$$-q \frac{L_1^2}{2} \frac{H^2}{2EI} + FL_2 \frac{H^2}{2EI} - X_1 L_1 \frac{H^2}{2EI} + X_2 \frac{H^3}{3EI} = 0$$

con soluzione :

$$X_1 = - \frac{3 H q L_1^2 + 3 q L_1^3 - 6 F H L_2}{6 H L_1 + 8 L_1^2} \quad (56)$$

$$X_2 = \frac{3 q L_1^3 - 24 F L_1 L_2}{12 H^2 + 16 H L_1}$$

## Esempio n. 6

Si ipotizzi ora che lo stesso schema dei due esempi precedenti sia vincolato in A con un incastro, sicche' la struttura risultante di Figura 24 e' tre volte iperstatica.

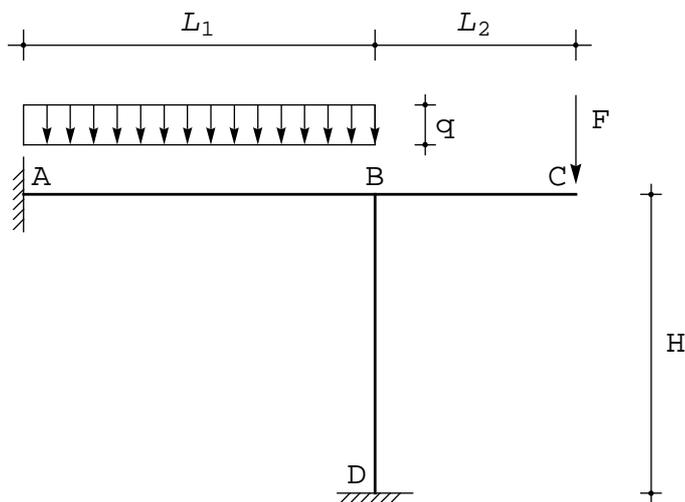


Figura 24 - Un telaio tre volte iperstatico

Una possibile scelta di sistema isostatico equivalente, che permette di sfruttare i risultati dei due esempi precedenti, e' riportato in Figura 25. Su di esso occorre ora imporre le tre equazioni di congruenza:

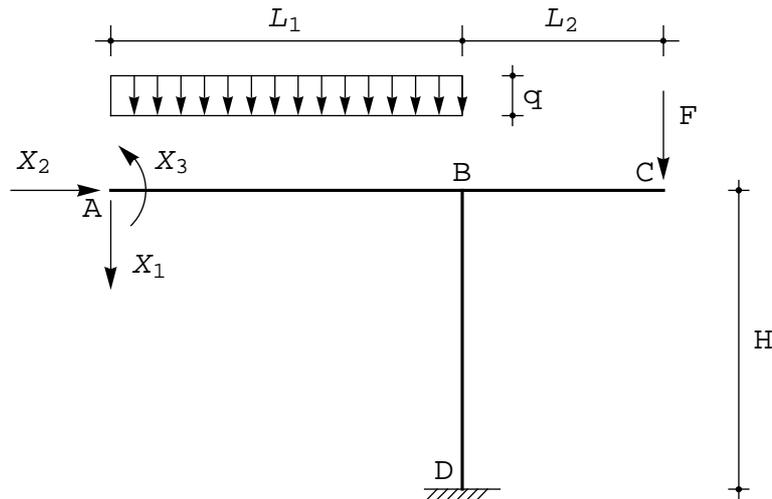


Figura 25 - Un possibile S.I.E. al telaio di Figura 21

$$\begin{aligned} u_{2A} &= 0 \\ u_{3A} &= 0 \\ \phi_A &= 0 \end{aligned} \quad (57)$$

che per il principio di sovrapposizione degli effetti scriveremo come :

$$\begin{aligned} u_{2A}^{(01)} + u_{2A}^{(02)} + X_1 u_{2A}^{(1)} + X_2 u_{2A}^{(2)} + X_3 u_{2A}^{(3)} &= 0 \\ u_{3A}^{(01)} + u_{3A}^{(02)} + X_1 u_{3A}^{(1)} + X_2 u_{3A}^{(2)} + X_3 u_{3A}^{(3)} &= 0 \\ \phi_A^{(01)} + \phi_A^{(02)} + X_1 \phi_A^{(1)} + X_2 \phi_A^{(2)} + X_3 \phi_A^{(3)} &= 0 \end{aligned} \quad (58)$$

I coefficienti non ancora valutati sono le rotazioni  $\phi_A^{(01)}$  e  $\phi_A^{(02)}$ , dovute al carico  $q$  ed alla forza  $F$ , rispettivamente (da calcolare sullo schema  $S_0$  di Figura 18 e 19):

$$\phi_A^{(01)} = \frac{qL_1^2}{2} \frac{H}{EI} + \frac{qL_1^3}{6EI} \quad (59)$$

$$\phi_A^{(02)} = -FL_2 \frac{H}{EI} \quad (60)$$

le rotazioni  $\phi_A^{(1)}$  e  $\phi_A^{(2)}$  dovute alle incognite iperstatiche unitarie  $X_1$  ed  $X_2$  (da calcolare sugli schemi  $S_1$  ed  $S_2$  di Figura 20 e 23):

$$\phi_A^{(1)} = L_1 \frac{H}{EI} + \frac{L_1^2}{2EI} \quad (61)$$

$$\phi_A^{(2)} = -\frac{H^2}{2EI} \quad (62)$$

ed infine gli spostamenti orizzontali  $u_{3A}^{(3)}$ , verticali  $u_{2A}^{(3)}$  e la rotazione  $\phi_A^{(3)}$  del punto A per effetto di una coppia unitaria in A.

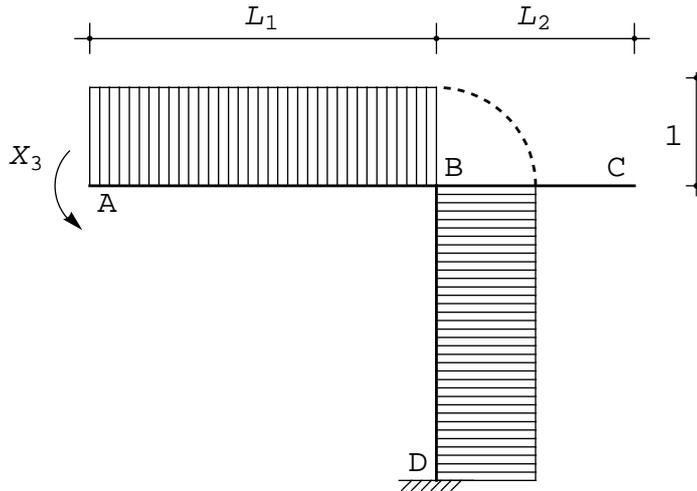


Figura 26 - Lo schema  $S_3$  per il calcolo degli spostamenti in A dovuti ad una incognita iperstatica di valore unitario

Per essi, lo schema di riferimento  $S_3$  e' quello di Figura 26, dove e' riportato anche il diagramma del momento. Utilizzando la composizione degli spostamenti, e quindi guardando il piedritto BD come una mensola soggetta alla coppia unitaria, si ha:

$$\phi_B = 1 \frac{H}{EI} \quad (63)$$

Si ha percio':

$$u_{2A}^{(3)} = \frac{H}{EI} L_1 + \frac{L_1^2}{2EI} \quad (64)$$

$$u_{3A}^{(3)} = -\frac{H^2}{2EI} \quad (65)$$

$$\phi_A^{(3)} = \frac{H}{EI} + \frac{L_1}{EI} \quad (66)$$

## ■ La soluzione del sistema di equazioni di congruenza

Il sistema da risolvere si scrive in definitiva:

$$\begin{aligned} & \alpha \frac{L_1^4}{8EI} + \alpha \frac{L_1^3 H}{2EI} - FL_2 \frac{H}{EI} L_1 + \\ & X_1 \left( \frac{L_1^3}{3EI} + \frac{L_1 H}{EI} L_1 \right) - X_2 \frac{H^2}{2EI} L_1 + X_3 \left( \frac{H}{EI} L_1 + \frac{L_1^2}{2EI} \right) = 0 \\ & -\alpha \frac{L_1^2}{2} \frac{H^2}{2EI} + FL_2 \frac{H^2}{2EI} - X_1 L_1 \frac{H^2}{2EI} + X_2 \frac{H^3}{3EI} - X_3 \frac{H^2}{2EI} = 0 \quad (67) \\ & \alpha \frac{L_1^2}{2} \frac{H}{EI} + \alpha \frac{L_1^3}{6EI} - FL_2 \frac{H}{EI} + \\ & X_1 \left( L_1 \frac{H}{EI} + \frac{L_1^2}{2EI} \right) - X_2 \frac{H^2}{2EI} + X_3 \left( \frac{H}{EI} + \frac{L_1}{EI} \right) = 0 \end{aligned}$$

Riordinando e semplificando si ha :

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{L_1^3}{3 EI} + \frac{L_1 H}{EI} L_1 \right) X_1 - \frac{H^2}{2 EI} L_1 X_2 + \left( \frac{H}{EI} L_1 + \frac{L_1^2}{2 EI} \right) X_3 = \\
 & -\alpha \frac{L_1^4}{8 EI} - \alpha \frac{L_1^3 H}{2 EI} + F L_2 \frac{H}{EI} L_1 \\
 & -L_1 \frac{H^2}{2 EI} X_1 + \frac{H^3}{3 EI} X_2 - \frac{H^2}{2 EI} X_3 = \alpha \frac{L_1^2}{2} \frac{H^2}{2 EI} - F L_2 \frac{H^2}{2 EI} \quad (68) \\
 & \left( L_1 \frac{H}{EI} + \frac{L_1^2}{2 EI} \right) X_1 - \frac{H^2}{2 EI} X_2 + \left( \frac{H}{EI} + \frac{L_1}{EI} \right) X_3 = \\
 & -\frac{\alpha L_1^2}{2} \frac{H}{EI} - \frac{\alpha L_1^3}{6 EI} + F L_2 \frac{H}{EI}
 \end{aligned}$$

o, in forma matriciale :

$$\begin{pmatrix} \frac{L_1^3}{3 EI} + \frac{L_1^2 H}{EI} & -L_1 \frac{H^2}{2 EI} & \frac{H}{EI} L_1 + \frac{L_1^2}{2 EI} \\ -L_1 \frac{H^2}{2 EI} & \frac{H^3}{3 EI} & -\frac{H^2}{2 EI} \\ L_1 \frac{H}{EI} + \frac{L_1^2}{2 EI} & -\frac{H^2}{2 EI} & \frac{H}{EI} + \frac{L_1}{EI} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha \frac{L_1^4}{8 EI} - \alpha \frac{L_1^3 H}{2 EI} + F L_2 \frac{H}{EI} L_1 \\ \alpha \frac{L_1^2}{2} \frac{H^2}{2 EI} - F L_2 \frac{H^2}{2 EI} \\ -\frac{\alpha L_1^2}{2} \frac{H}{EI} - \frac{\alpha L_1^3}{6 EI} + F L_2 \frac{H}{EI} \end{pmatrix} \quad (69)$$

La simmetria della matrice discende dalle proprietà dei teoremi di reciprocità. Risolvendo, si ottengono le tre incognite iperstatiche:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{-5 H \alpha L_1^2 - 4 \alpha L_1^3 + 12 F H L_2}{8 L_1 (H + L_1)} \\
 X_2 &= \frac{\alpha L_1^3 - 12 F L_1 L_2}{8 H^2 + 8 H L_1} \\
 X_3 &= \frac{3 H \alpha L_1^2 + 2 \alpha L_1^3 - 12 F H L_2}{24 (H + L_1)} \quad (70)
 \end{aligned}$$

## Esempio n .7

Si vuole ora studiare il telaio di Figura 26, costituito da due piedritti di altezza disuguale, caricato da una forza concentrata in un punto generico del ritto.

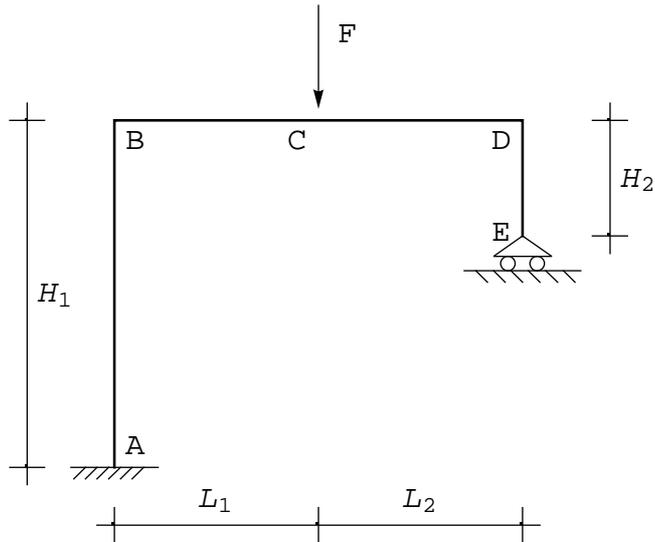


Figura 27 - Un telaio zoppo semplicemente iperstatico

La struttura e' semplicemente isostatica, e come sistema isostatico equivalente puo' scegliersi la mensola di Figura 28.

Su di esso occorre imporre l' equazione di congruenza :

$$u_{2E} = 0 \quad (71)$$

ossia, operando sugli schemi parziali  $S_0$  ed  $S_1$  :

$$u_{2E}^{(0)} + X_1 u_{2E}^{(1)} = 0 \quad (72)$$

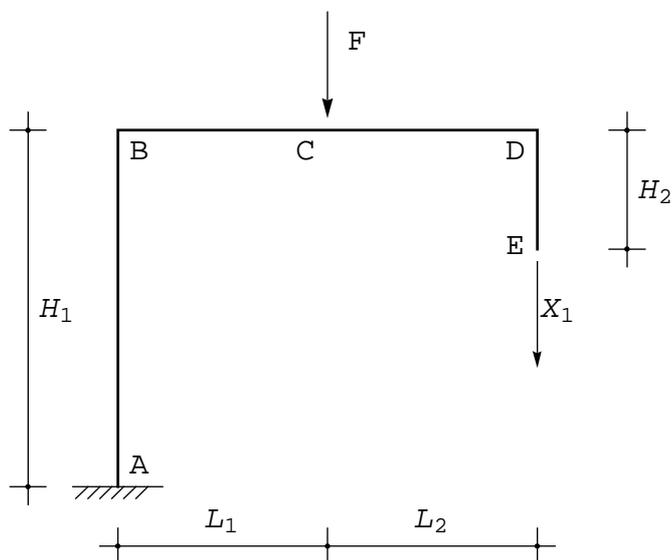
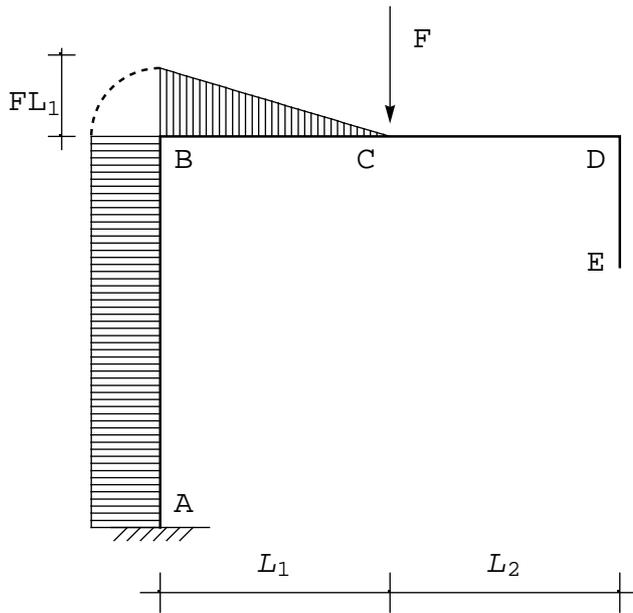


Figura 28 - Un S.I.E. per il telaio zoppo di Figura 27

### ■ Calcolo di $u_{2A}^{(0)}$

Lo schema  $S_0$  e' presentato in Figura 29, insieme al diagramma del momento.

Figura 29 - Lo schema  $S_0$ , per il telaio zoppo di Figura 27

Lo schema  $S_0$  è presentato in Figura 29, insieme al diagramma del momento. Dall'esame del diagramma, si evince che lo spostamento verticale del punto E può pensarsi composto da due aliquote: la prima aliquota si ottiene considerando rigido il tratto BE, e riguardando il piedritto AB come una mensola soggetta alla coppia  $FL_1$ . Ne segue una rotazione in B pari a:

$$\phi_B = -FL_1 \frac{H_1}{EI} \quad (73)$$

che implica lo spostamento di E pari a:

$$u_{2E}^{(0)'} = -\phi_B (L_1 + L_2) = FL_1 \frac{H_1}{EI} (L_1 + L_2) \quad (74)$$

La seconda aliquota si ottiene considerando rigido il piedritto AB, mentre il tratto BC può essere visto come una mensola soggetta alla forza F. Ne segue:

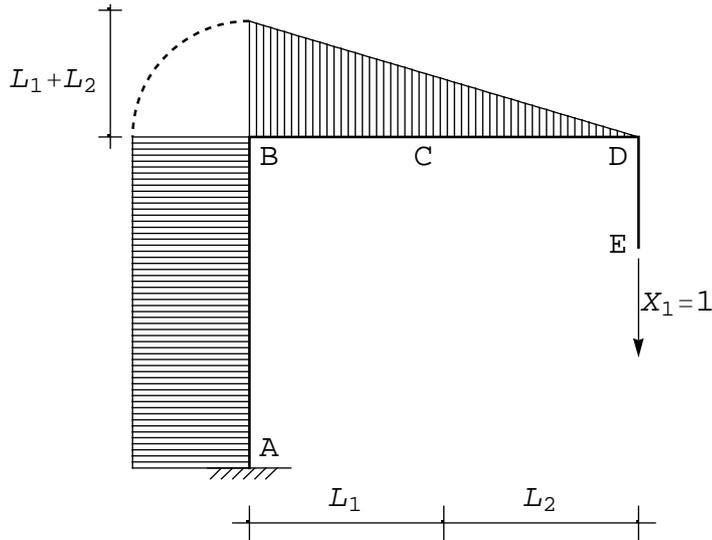
$$u_{2E}^{(0)''} = \frac{FL_1^3}{3EI} + \frac{FL_1^2}{2EI} L_2 \quad (75)$$

ed in definitiva :

$$u_{2E}^{(0)} = FL_1 \frac{H_1}{EI} (L_1 + L_2) + \frac{FL_1^3}{3EI} + \frac{FL_1^2}{2EI} L_2 \quad (76)$$

### ■ Calcolo di $u_{2A}^{(1)}$

Lo schema  $S_1$  è riportato in Figura 30, insieme al diagramma del momento. Considerazioni simili a quelle precedenti portano a scrivere:

Figura 30 - Lo schema  $S_1$  per il telaio zoppo di Figura 27

$$u_{2E}^{(1)} = (L_1 + L_2) \frac{H_1}{EI} (L_1 + L_2) + \frac{(L_1 + L_2)^3}{3 EI} \quad (77)$$

L' incognita iperstatica puo' infine calcolarsi come :

$$X_1 = - \frac{u_{2E}^{(0)}}{u_{2E}^{(1)}} = - \frac{F L_1 (3 H_1 L_1 + L_1^2 + 3 H_1 L_2)}{(L_1 + L_2)^2 (3 H_1 + L_1 + L_2)} \quad (78)$$

## Esempio n .8

Lo stesso telaio zoppo dell' esercizio precedente viene ora reso due volte iperstatico, vincolandolo con una cerniera in E.

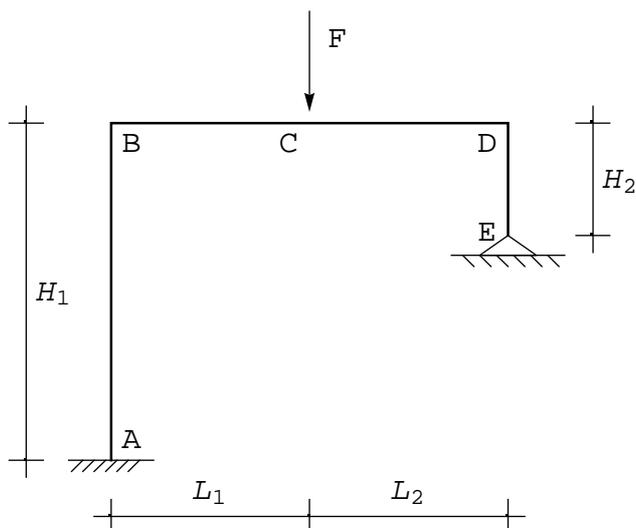


Figura 31 - Un telaio zoppo doppiamente iperstatico

Conviene scegliere il sistema isostatico equivalente di Figura 32, in modo da utilizzare i risultati gia' ottenuti

in precedenza. Su tale schema le equazioni di congruenza sono:

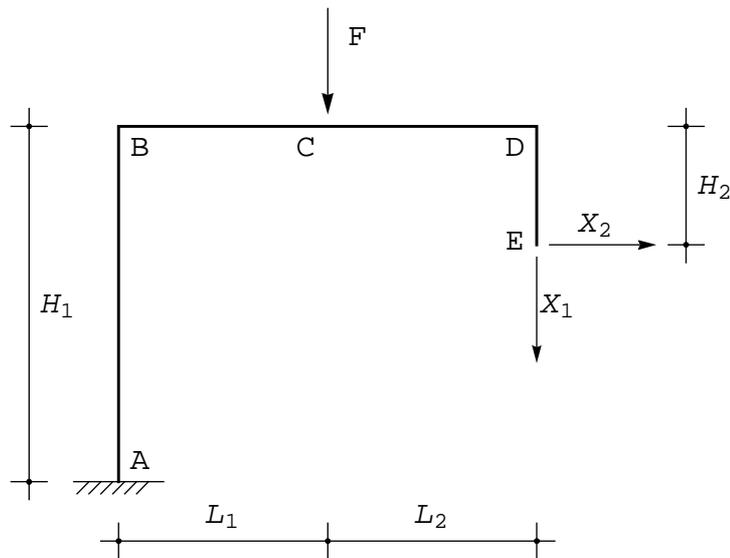


Figura 32 - Un S.I.E. per il telaio zoppo di Figura 27

$$\begin{aligned} u_{2E} &= 0 \\ u_{3E} &= 0 \end{aligned} \quad (79)$$

ossia, operando sugli schemi parziali :

$$\begin{aligned} u_{2E}^{(0)} + X_1 u_{2E}^{(1)} + X_2 u_{2E}^{(2)} &= 0 \\ u_{3E}^{(0)} + X_1 u_{3E}^{(1)} + X_2 u_{3E}^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (80)$$

Il coefficiente  $u_{2E}^{(0)}$  e' gia' stato calcolato, sullo schema  $S_0$  di Figura 29. Su questo stesso schema si puo' calcolare lo spostamento orizzontale di E, calcolando la rotazione in D come somma di due aliquote:

$$\phi_D = F L_1 \frac{H_1}{EI} + \frac{F L_1^2}{2 EI} \quad (81)$$

e quindi :

$$u_{3E}^{(0)} = \phi_D H_2 = F L_1 \frac{H_1}{EI} H_2 + \frac{F L_1^2}{2 EI} H_2 \quad (82)$$

ed in modo totalmente analogo potra' scriversi, a partire dallo schema  $S_1$  :

$$u_{3E}^{(1)} = (L_1 + L_2) \frac{H_1}{EI} H_2 + \frac{(L_1 + L_2)^2}{2 EI} H_2 \quad (83)$$

Gli ultimi due coefficienti devono essere calcolati sullo schema  $S_2$  di Figura 33, e valgono:

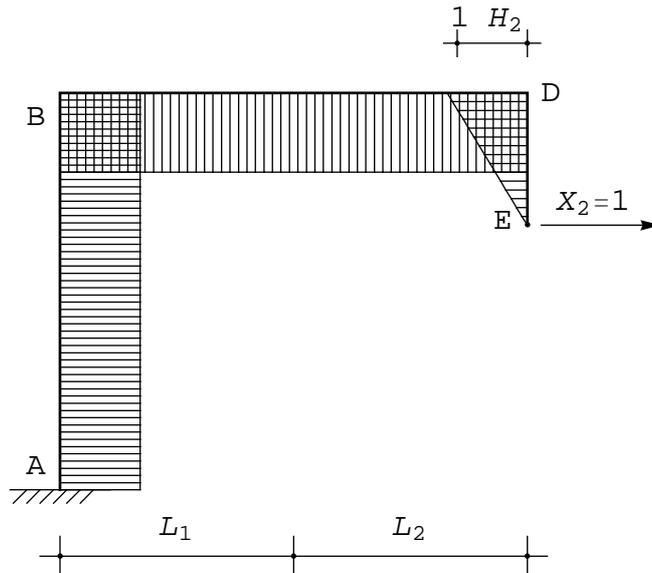


Figura 33 - Lo schema  $S_2$  per il telaio zoppo di Figura 27

$$u_{2E}^{(2)} = H_2 \frac{H_1}{EI} (L_1 + L_2) + H_2 \frac{(L_1 + L_2)^2}{2 EI} \quad (84)$$

$$u_{3E}^{(2)} = H_2 \frac{H_1}{EI} H_2 + H_2 \frac{(L_1 + L_2)}{EI} H_2 + \frac{H_2^3}{3 EI} \quad (85)$$

## ■ L' utilizzo del principio dei lavori virtuali

Attesa la complessità del calcolo dei coefficienti attraverso la composizione degli spostamenti, conviene controllare i risultati utilizzando il principio dei lavori virtuali, che - sebbene computazionalmente più impegnativo - fornisce i risultati in modo più "automatico".

A tal fine, utilizzando i diagrammi dei momenti calcolati in precedenza sugli schemi  $S_0$ ,  $S_1$  ed  $S_2$ , si potrà dedurre il diagramma del momento per la struttura iperstatica. Sarà infatti, per il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$M = M^{(0)} + X_1 M^{(1)} + X_2 M^{(2)} \quad (86)$$

Si scriva ora il principio dei lavori virtuali, assumendo come sistema di forze virtuali il sistema di forze sul sistema  $S_1$ , e come insieme di spostamenti il sistema reale. Si ha:

$$\int_s M^{(1)} M \, dz = 0 \quad (87)$$

ossia, per le (85) :

$$\int_s M^{(1)} M^{(0)} \, dz + X_1 \int_s M^{(1)2} \, dz + X_2 \int_s M^{(1)} M^{(2)} \, dz = 0 \quad (88)$$

Un semplice confronto con la prima equazione di congruenza (80) permette di scrivere:

$$u_{2E}^{(0)} = \int_s M^{(1)} M^{(0)} \, dz$$

$$u_{2E}^{(1)} = \int_s M^{(1)2} dz$$

$$u_{2E}^{(2)} = \int_s M^{(1)} M^{(2)} dz$$

Del tutto analogamente, utilizzando il sistema di forze virtuali agenti su  $S_2$ , si ottiene

$$\int_s M^{(2)} M dz = 0 \quad (90)$$

e quindi gli altri coefficienti della seconda equazione di congruenza :

$$u_{3E}^{(0)} = \int_s M^{(2)} M^{(0)} dz$$

$$u_{3E}^{(1)} = \int_s M^{(2)} M^{(1)} dz \quad (91)$$

$$u_{3E}^{(2)} = \int_s M^{(2)2} dz$$

**Nota 1** - Poiche' si e' utilizzato l'insieme di spostamenti reali, in realta' si sta utilizzando il *principio delle forze virtuali*

**Nota 2** - La simmetria della matrice dei coefficienti e' resa esplicita dall'essere  $u_{2E}^{(2)} = u_{3E}^{(1)}$

#### ■ Il calcolo dei coefficienti

Per calcolare  $u_{2E}^{(0)}$ , occorrera' esplicitare l'espressione di  $M^{(0)}$  ed  $M^{(1)}$ , e calcolare l'integrale (88). Si ha subito, data la semplice legge di variazione dei suddetti momenti:

$$u_{2E}^{(0)} = \frac{FL_1 (L_1 + L_2)}{EI} \int_0^{H_1} dz + \frac{F}{EI} \int_0^{L_1} (L_1 - z) (L_1 + L_2 - z) dz =$$

$$\frac{FL_1 H_1 (L_1 + L_2)}{EI} + \frac{FL_1^3}{3EI} + \frac{F}{2EI} L_1^2 L_2 \quad (92)$$

coincidente con la (76). Analogamente si avra':

$$u_{2E}^{(1)} = \frac{(L_1 + L_2)^2}{EI} \int_0^{H_1} dz + \int_0^{L_1+L_2} (L_1 + L_2 - z)^2 dz =$$

$$H_1 \frac{(L_1 + L_2)^2}{EI} + \frac{1}{3EI} (L_1 + L_2)^3 \quad (93)$$

coincidente con la (77). Si avra' poi ancora:

$$u_{2E}^{(2)} = \frac{(L_1 + L_2) H_2}{EI} \int_0^{H_1} dz + \frac{1}{EI} \int_0^{L_1+L_2} (L_1 + L_2 - z) H_2 dz =$$

$$\frac{1}{2EI} H_2 L_1^2 + \frac{H_2 L_1 L_2}{EI} + \frac{1}{2EI} H_2 L_2^2 + \frac{H_1 H_2 (L_1 + L_2)}{EI} \quad (94)$$

Per la seconda equazione, si avra' :

$$u_{3E}^{(0)} = \frac{FL_1 H_2}{EI} \int_0^{H_1} dz + \frac{F}{EI} \int_0^{L_1} (L_1 - z) H_2 dz = \frac{FL_1 H_1 H_2}{EI} + \frac{F H_2 L_1^2}{2EI} \quad (95)$$

$$u_{3E}^{(2)} = \frac{H_2^2}{EI} \int_0^{H_1} dz + \frac{H_2^2}{EI} \int_0^{L_1+L_2} dz + \frac{1}{EI} \int_0^{H_2} z^2 dz =$$

$$\frac{H_1 H_2^2}{EI} + \frac{H_2^3}{3EI} + \frac{H_2^2 (L_1 + L_2)}{EI}$$

### ■ La soluzione delle equazioni

A partire dalla conoscenza dei coefficienti delle (80) si potrà scrivere :

$$\frac{FL_1 H_1 (L_1 + L_2)}{EI} + \frac{FL_1^3}{3EI} +$$

$$\frac{F}{2EI} L_1^2 L_2 + X_1 \left( H_1 \frac{(L_1 + L_2)^2}{EI} + \frac{1}{3EI} (L_1 + L_2)^3 \right) +$$

$$X_2 \left( \frac{1}{2EI} H_2 L_1^2 + \frac{H_2 L_1 L_2}{EI} + \frac{1}{2EI} H_2 L_2^2 + \frac{H_1 H_2 (L_1 + L_2)}{EI} \right) = 0 \quad (97)$$

$$\frac{FL_1 H_1 H_2}{EI} + \frac{F H_2 L_1^2}{2EI} +$$

$$X_1 \left( \frac{1}{2EI} H_2 L_1^2 + \frac{H_2 L_1 L_2}{EI} + \frac{1}{2EI} H_2 L_2^2 + \frac{H_1 H_2 (L_1 + L_2)}{EI} \right) +$$

$$X_2 \left( \frac{H_1 H_2^2}{EI} + \frac{H_2^3}{3EI} + \frac{H_2^2 (L_1 + L_2)}{EI} \right) = 0$$

la cui soluzione può essere agevolmente ottenuta con un qualsiasi programma di calcolo simbolico. *Mathematica* fornisce:

$$X_1 = \left( F L_1 \left( -6 H_1 \left( 2 L_1 (H_2 + L_1) + 2 (H_2 + 3 L_1) L_2 + 3 L_2^2 \right) - \right. \right. \quad (98)$$

$$\left. \left. L_1 \left( 3 (L_1 + L_2) (L_1 + 3 L_2) + H_2 (4 L_1 + 6 L_2) \right) \right) \right) /$$

$$\left( (L_1 + L_2)^2 (12 H_1 (H_2 + L_1 + L_2) + (L_1 + L_2) (4 H_2 + 3 (L_1 + L_2))) \right)$$

$$X_2 = \frac{3 F L_1 L_2 (L_1 (L_1 + L_2) + 2 H_1 (2 L_1 + L_2))}{H_2 (L_1 + L_2) (12 H_1 (H_2 + L_1 + L_2) + (L_1 + L_2) (4 H_2 + 3 (L_1 + L_2)))} \quad (99)$$

Se la forza agisce in mezzera, ponendo  $L_1 = L_2 = L$  si ha:

$$X_1 = - \frac{F (3 H_1 (11 L + 4 H_2) + L (12 L + 5 H_2))}{8 (3 H_1 (2 L + H_2) + L (3 L + 2 H_2))} \quad (100)$$

$$X_2 = \frac{3 F L (2 L^2 + 6 L H_1)}{2 H_2 (12 H_1 (2 L + H_2) + 2 L (6 L + 4 H_2))} \quad (101)$$

e se i due piedritti hanno altezza uguale,  $H_1 = H_2 = H$ , e le incognite valgono:

$$X_1 = \frac{1}{4} F \left( -2 - \frac{3 H L}{3 H^2 + 8 H L + 3 L^2} \right) \quad (102)$$

$$X_2 = \frac{3 F L^2 (3 H + L)}{4 H (3 H^2 + 8 H L + 3 L^2)} \quad (103)$$

## Figure