

# 19 - La composizione degli spostamenti

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 1 aprile 2012]

## L'utilizzo dei risultati fondamentali

E' spesso possibile, per calcolare uno spostamento o una rotazione, utilizzare i risultati fondamentali, dedotti per via analitica su schemi elementari, combinando i cinematicismi di tratti parziali di struttura. Un esempio classico e' riportato in Figura 1, dove una trave a mensola di luce  $L$  e' caricata da una forza verticale agente ad un'ascissa generica  $L_1$

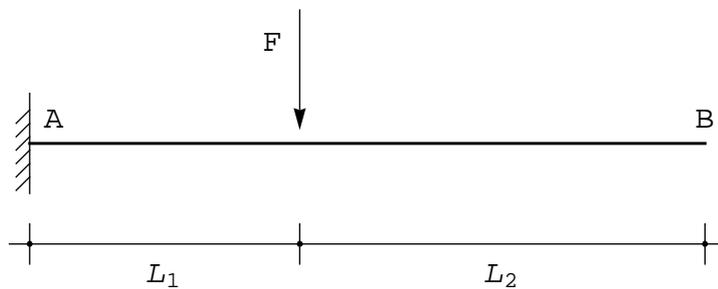


Figura 1 - Uno schema elementare per la composizione degli spostamenti

Lo spostamento nell'estremo libero puo' calcolarsi riguardandolo come la somma di due contributi: l'abbassamento del punto di applicazione della forza, piu' un'aliquota dovuta alla rotazione dello stesso punto di applicazione, moltiplicato per la distanza  $L_2$ . Per questo secondo contributo, infatti, il tratto BC ruota rigidamente, non essendo soggetto a nessuna forza:

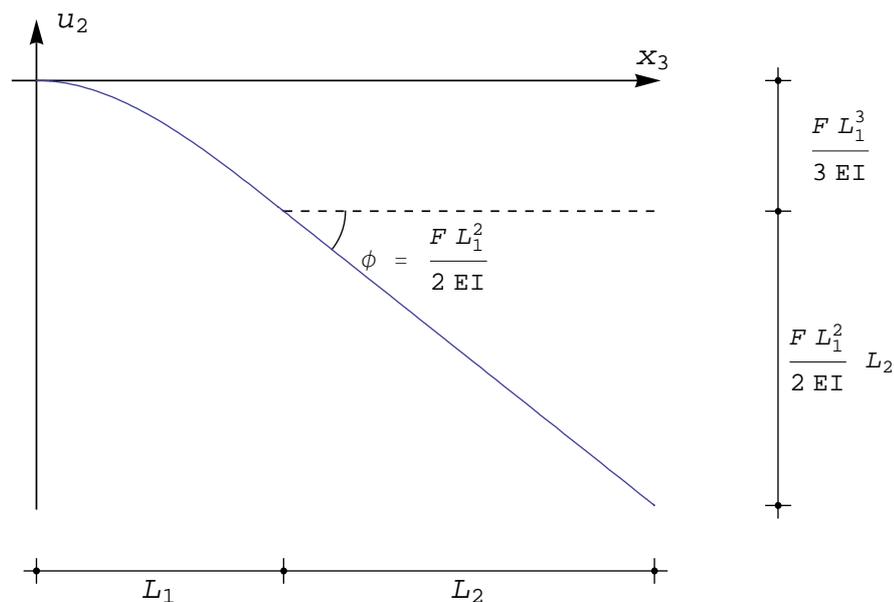


Figura 2 - Lo spostamento all'estremo libero come somma del contributo elastico e del cinematicismo rigido

Si ha pertanto:

$$u_2(x_3 = L_1 + L_2) = u_2(x_3 = L_1) + \phi(x_3 = L_1) L_2 \quad (1)$$

e conoscendo i risultati fondamentali relativi alla trave a mensola :

$$u_2(x_3 = L_1 + L_2) = \frac{FL_1^3}{3EI} + \frac{FL_1^2}{2EI} L_2 \quad (2)$$

Il resto del capitolo e' dedicato all'applicazione di questa idea ad esempi via via piu' complessi.

## Esempio n .1

Si consideri la struttura a mensola, soggetta ad un carico uniformemente distribuito su una porzione di trave, come illustrato in Figura 3. Se si intende conoscere lo spostamento e la rotazione dell'estremo libero, puo' operarsi una composizione degli spostamenti:

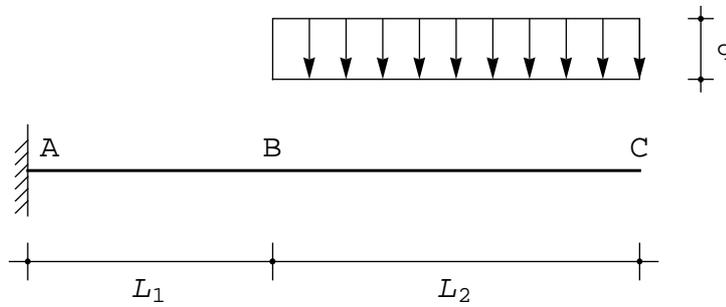


Figura 3 - Calcolo di spostamenti e rotazioni nell'estremo libero

1. in un primo passo, la parte AB viene considerata fissa, e la restante parte BC si comporta come una mensola di luce  $L_2$  soggetta ad un carico distribuito su tutta la luce. Si ottiene una prima aliquota di risultati:

$$u_{2C}^{(1)} = \frac{qL_2^4}{8EI} \quad (3)$$

$$\phi_C^{(1)} = -\frac{qL_2^3}{6EI}$$

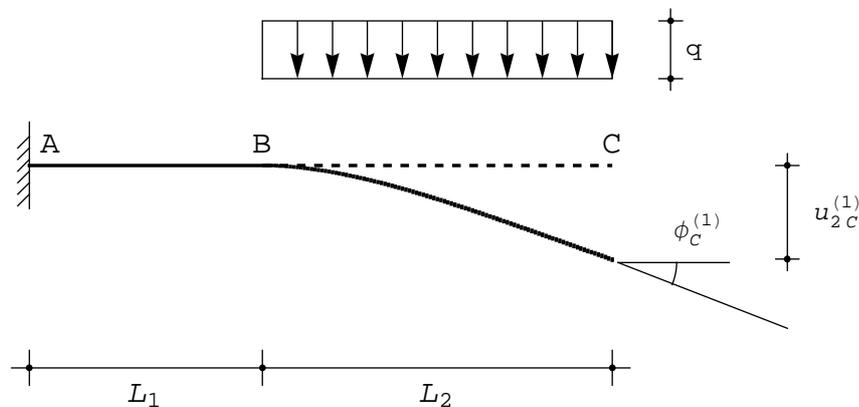


Figura 4 - Il tratto AB e' rigido, BC e' una mensola di luce  $L_2$

2. in un secondo passo, si studia la mensola AB, soggetta allo sforzo di taglio ed al momento flettente in B,

ossia alla forza  $T_B$  diretta verso il basso, ed alla coppia flettente  $M_B$  antioraria:

$$\begin{aligned} T_B &= qL_2 \\ M_B &= -\frac{qL_2^2}{2} \end{aligned} \quad (4)$$

Per questa struttura, si hanno in B gli spostamenti e le rotazioni :

$$\begin{aligned} u_{2B} &= qL_2 \frac{L_1^3}{3EI} + \frac{qL_2^2}{2} \frac{L_1^2}{2EI} \\ \phi_B &= -qL_2 \frac{L_1^2}{2EI} - \frac{qL_2^2}{2} \frac{L_1}{EI} \end{aligned} \quad (5)$$

In questa fase, la parte BC deve essere considerata rigida, e si ha quindi la seconda aliquota di spostamenti e rotazioni in C:

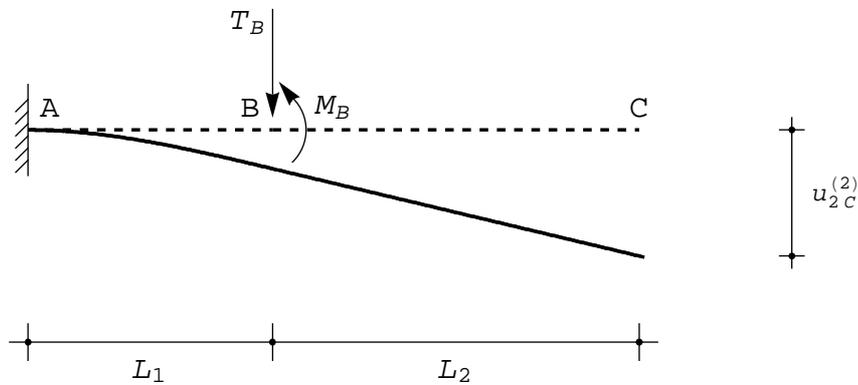


Figura 5 - Il tratto BC e' rigido, AB e' soggetto al taglio ed al moimento flettente

$$\begin{aligned} u_{2C}^{(2)} &= u_{2B} - \phi_B L_2 = qL_2 \frac{L_1^3}{3EI} + \frac{qL_2^2}{2} \frac{L_1^2}{2EI} + qL_2^2 \frac{L_1^2}{2EI} + \frac{qL_2^3}{2} \frac{L_1}{EI} \\ \phi_C^{(2)} &= \phi_B = -qL_2 \frac{L_1^2}{2EI} - \frac{qL_2^2}{2} \frac{L_1}{EI} \end{aligned} \quad (6)$$

3. infine, gli spostamenti e le rotazioni sono la somma di quanto ottenuto nei due passi precedenti:

$$\begin{aligned} u_{2C} &= \frac{qL_2^4}{8EI} + qL_2 \frac{L_1^3}{3EI} + \frac{qL_2^2}{2} \frac{L_1^2}{2EI} + qL_2^2 \frac{L_1^2}{2EI} + \frac{qL_2^3}{2} \frac{L_1}{EI} \\ \phi_C^{(1)} &= -\frac{qL_2^3}{6EI} - qL_2 \frac{L_1^2}{2EI} - \frac{qL_2^2}{2} \frac{L_1}{EI} \end{aligned} \quad (7)$$

Se il carico si estende a meta' luce, allora  $L_1 = L_2 = L/2$ , si ha:

$$\begin{aligned} u_{2C} &= \frac{41}{384} \frac{qL^4}{EI} \\ \phi_C^{(1)} &= -\frac{7}{48} \frac{qL^3}{EI} \end{aligned} \quad (8)$$

## Esempio n .2

Si voglia ora calcolare le rotazioni agli estremi per la trave semplicemente appoggiata di Figura 6

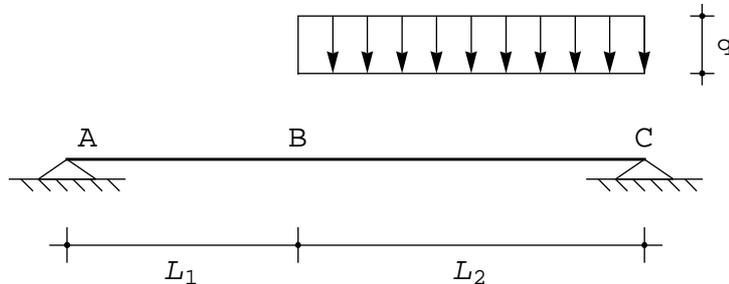


Figura 6 - Una trave appoggiata soggetta ad un carico parziale

Le reazioni possono essere calcolate come:

$$R_A = - \frac{q}{2} \frac{L_2^2}{(L_1 + L_2)}$$

$$R_C = - \frac{q}{2} \frac{L_2 (2 L_1 + L_2)}{(L_1 + L_2)}$$
(9)

e quindi in B si hanno le caratteristiche :

$$T_B = -R_A = \frac{q}{2} \frac{L_2^2}{(L_1 + L_2)}$$

$$M_B = -R_A L_1 = \frac{q}{2} \frac{L_1 L_2^2}{(L_1 + L_2)}$$
(10)

Cio' premesso, per utilizzare la composizione degli spostamenti, si operi secondo i seguenti passi:

1. si consideri incastrato e rigido il tratto AB, mentre il tratto BC, deformabile, e' soggetto al carico distribuito  $q$ , ed alla reazione dell'appoggio  $R_C$ . In questa fase si genera uno spostamento  $u_{2C}^{(1)}$  ed una rotazione  $\phi_C^{(1)}$  in C

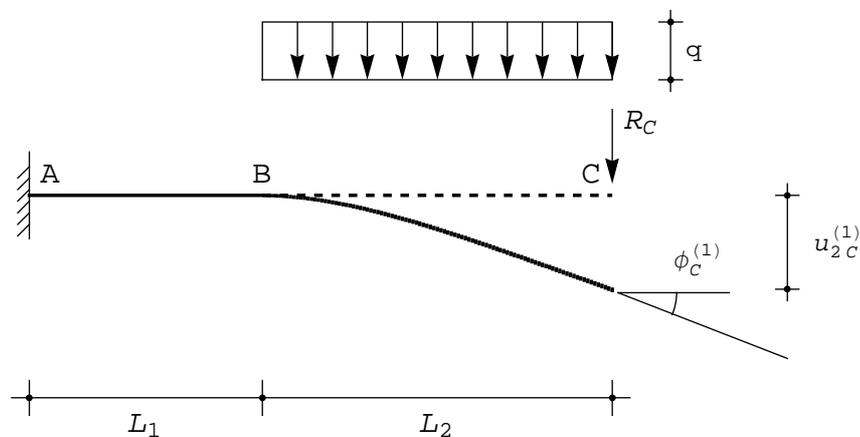


Figura 7 - Fase 1 - Il tratto AB e' rigido e vincolato con un incastro, BC e' una mensola soggetta al carico ed alla reazione

2. si considera il tratto AB come deformabile, e soggetto al taglio  $T_B$  ed al momento  $M_B$ , mentre il tratto BC e' considerato rigido. Si ha in C uno spostamento  $u_{2C}^{(2)}$  ed una rotazione  $\phi_C^{(2)}$ .

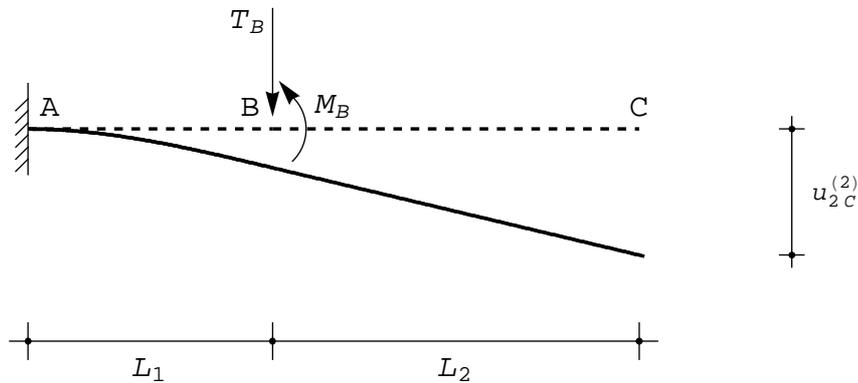


Figura 8 - Fase 2 - Il tratto BC e' rigido, AB e' soggetto al taglio ed al momento flettente, ed e' ancora vincolato con un incastro

3. lo spostamento totale in C e' quindi pari alla somma dei due contributi precedenti:

$$\begin{aligned} u_{2C}^{(3)} &= u_{2C}^{(1)} + u_{2C}^{(2)} \\ \phi_C^{(3)} &= \phi_C^{(1)} + \phi_C^{(2)} \end{aligned} \quad (11)$$

4. si ripristina la congruenza, riportando a zero lo spostamento dell'appoggio C. A cio' fare, basta assegnare alla trave AC, rigida, una rotazione intorno ad A, pari a:

$$\phi_A = \frac{u_{2C}^{(3)}}{(L_1 + L_2)} \quad (12)$$

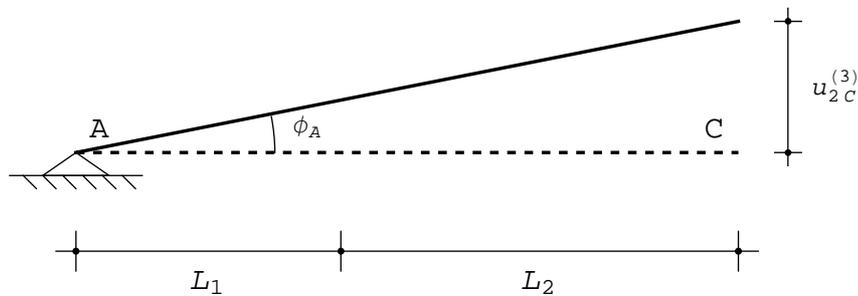


Figura 9 - Fase 3 - L'intera trave e' rigida, si ripristina la congruenza in C

5. Infine, la rotazione in C sara':

$$\phi_C = \phi_C^{(3)} + \phi_A \quad (13)$$

Si noti che tutte queste operazioni sono condotte su schemi elementari, per cui i valori numerici sono immediatamente deducibili. Nel passo 1, si ha:

$$\begin{aligned} u_{2C}^{(1)} &= \frac{q L_2^4}{8 EI} + R_C \frac{L_2^3}{3 EI} \\ \phi_C^{(1)} &= -\frac{q L_2^3}{6 EI} - R_C \frac{L_2^2}{2 EI} \end{aligned} \quad (14)$$

Nel passo 2, si calcolano prima abbassamenti e rotazioni in B, dovuti a  $T_B$  ed  $M_B$ :

$$u_{2B}^{(2)} = T_B \frac{L_1^3}{3 EI} - M_B \frac{L_1^2}{2 EI}$$

$$\phi_B^{(2)} = - T_B \frac{L_1^2}{2 EI} + M_B \frac{L_1}{EI}$$

da cui possono dedursi abbassamenti e rotazioni in C :

$$u_{2C}^{(2)} = u_{2B}^{(2)} + \phi_B^{(2)} L_2 = T_B \frac{L_1^3}{3 EI} - M_B \frac{L_1^2}{2 EI} + T_B \frac{L_1^2}{2 EI} L_2 - M_B \frac{L_1}{EI} L_2$$

$$\phi_C^{(2)} = \phi_B^{(2)} = - T_B \frac{L_1^2}{2 EI} + M_B \frac{L_1}{EI}$$
(16)

Nella fase 3 si giunge agli spostamenti :

$$u_{2C}^{(3)} = \frac{\alpha L_2^4}{8 EI} + R_C \frac{L_2^3}{3 EI} + T_B \frac{L_1^3}{3 EI} - M_B \frac{L_1^2}{2 EI} + T_B \frac{L_1^2}{2 EI} L_2 - M_B \frac{L_1}{EI} L_2$$

$$\phi_C^{(3)} = - \frac{\alpha L_2^3}{6 EI} - R_C \frac{L_2^2}{2 EI} - T_B \frac{L_1^2}{2 EI} + M_B \frac{L_1}{EI}$$
(17)

e sostituendo i valori di reazioni e caratteristiche :

$$u_{2C}^{(3)} = - \frac{\alpha L_2^2 (2 L_1^2 + 4 L_1 L_2 + L_2^2)}{24 EI}$$

$$\phi_C^{(3)} = \frac{\alpha L_2^2 (3 L_1 + L_2)}{12 EI}$$
(18)

L' ultimo passo porta a scrivere le richieste rotazioni:

$$\phi_A = \frac{u_{2C}^{(3)}}{(L_1 + L_2)} = - \frac{\alpha L_2^2 (2 L_1^2 + 4 L_1 L_2 + L_2^2)}{24 EI (L_1 + L_2)}$$
(19)

$$\phi_C = \phi_C^{(3)} + \phi_A = \frac{\alpha L_2^2 (2 L_1 + L_2)^2}{24 EI (L_1 + L_2)}$$
(20)

Se il carico si estende per meta' luce, si puo' porre  $L_1 = L_2 = L/2$ , e le rotazioni valgono:

$$\phi_A = - \frac{7}{384} \frac{\alpha L^3}{EI}$$
(21)

$$\phi_C = \frac{9}{384} \frac{\alpha L^3}{EI}$$
(22)

### Esempio n. 3

Si consideri la struttura di Figura 9, e si voglia conoscere l'abbassamento del punto di applicazione della forza.

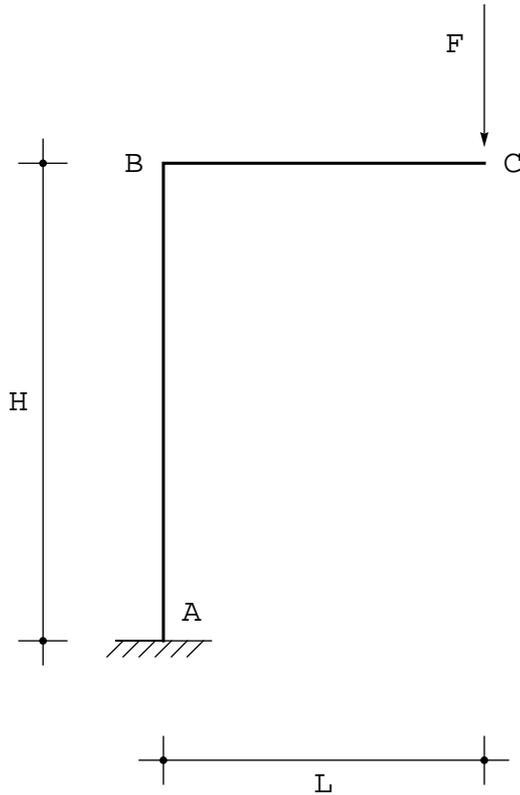


Figura 10 - La "forca"

Il diagramma del momento e' immediatamente tracciabile, in quanto esso dovra' annullarsi in corrispondenza della forza, e variare linearmente fino al punto B, dove assumerà il valore  $FL$ . Tale valore, poi, rimane costante lungo tutto il ritto  $AB$ . Ne segue che il ritto  $AB$  puo' riguardarsi come una mensola soggetta alla coppia  $FL$  in sommita', e quindi la rotazione del punto  $B$  e' immediatamente calcolabile:

$$\phi_B = FL \frac{H}{EI} \quad (23)$$

Per effetto di tale rotazione, il traverso  $BC$ , *considerato rigido*, subira' degli abbassamenti, ed in particolare il punto  $C$  si abbassera' di:

$$u_{2C}^{(1)} = \phi_B L = FL^2 \frac{H}{EI} \quad (24)$$

A tale abbassamento bisogna aggiungere l'aliquota dovuta al traverso  $BC$ , *considerato deformabile*, e riguardato come incastrato in  $B$ :

$$u_{2C}^{(2)} = \frac{FL^3}{3EI} \quad (25)$$

In definitiva, il richiesto spostamento vale :

$$u_{2C} = \frac{FL^3}{3EI} + FL^2 \frac{H}{EI} = \frac{FL^2}{EI} \left( \frac{L}{3} + H \right) \quad (26)$$

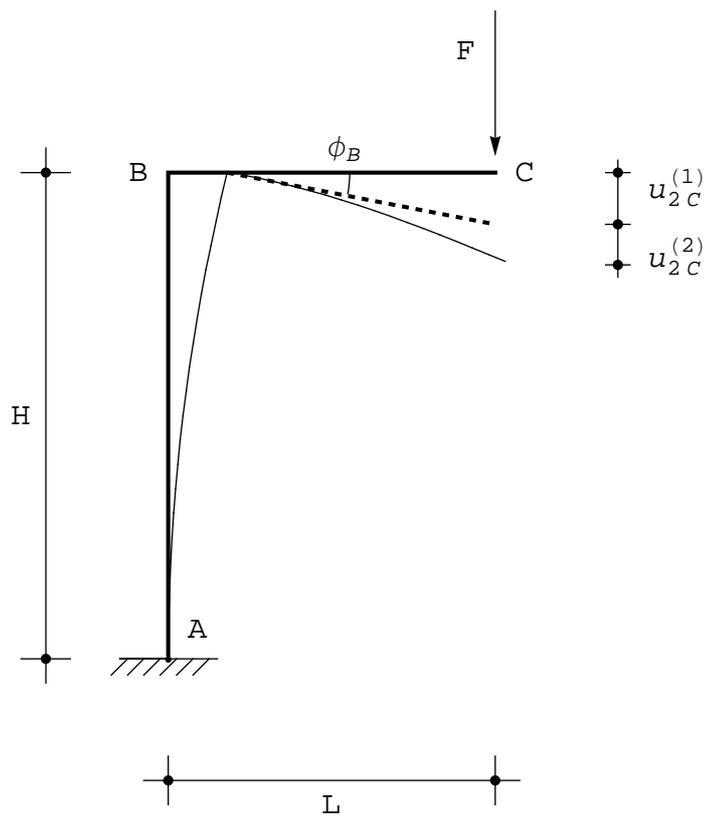


Figura 11 - Lo spostamento del punto di applicazione della forza secondo il metodo delle composizioni

**Figure**