
17 - I corollari di Mohr per il calcolo degli spostamenti

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 22 settembre 2012]

Relazioni fondamentali : l' analogia

In questo capitolo si utilizza la teoria dell'analogia di Mohr per il calcolo di spostamenti e rotazioni. Per illustrare tale teoria, si considerino da un lato le due equazioni di *equilibrio*, che collegano momenti, tagli e carico applicato:

$$\frac{dT}{dx_3} = -q \quad (1)$$

$$\frac{dM}{dx_3} = T \quad (2)$$

e si scriva l'equazione che collega direttamente il momento flettente al carico applicato:

$$\frac{d^2 M}{dx_3^2} = -q \quad (3)$$

Dall'altro lato, si considerino le due equazioni di *congruenza e costitutive*:

$$\frac{du_2}{dx_3} = -\phi \quad (4)$$

$$\frac{d\phi}{dx_3} = \frac{M}{EI} \quad (5)$$

e si scriva l'equazione che collega direttamente lo spostamento al momento flettente:

$$\frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = -\frac{M}{EI} \quad (6)$$

Non puo' sfuggire l'analogia tra la (6) e la (3), che induce a definire un carico fittizio:

$$q^* = \frac{M}{EI} \quad (7)$$

ed un momento fittizio:

$$M^* = u_2 \quad (8)$$

ed ad affermare che lo spostamento u_2 puo' riguardarsi come il momento flettente (fittizio) provocato da un carico (fittizio) pari ad $\frac{M}{EI}$. Inoltre, l'analogia tra la (2) e la (4) porta a dire che la rotazione puo' riguardarsi come il taglio fittizio provocato dal carico fittizio q^* :

$$T^* = -\phi \quad (9)$$

La trave fittizia

Si consideri ora una trave soggetta al carico trasversale q , ed a carichi concentrati (forze e coppie), e si ipotizzi di conoscere il diagramma del momento da essi generato. Se la trave è isostatica, tale conoscenza è possibile a partire dalle sole equazioni di equilibrio, ma quanto segue non è limitato all'ipotesi di travi isostatiche.

Le analogie illustrate in precedenza permettono di affermare che la rotazione ϕ e l'abbassamento u_2 si ottengono calcolando il taglio fittizio T^* (cambiato di segno) ed il momento fittizio M^* provocati dal carico fittizio q^* . E' però necessario tramutare le condizioni di vincolo relative alle rotazioni ed agli spostamenti in condizioni sui tagli e sui momenti fittizi, definendo una nuova trave (fittizia), su cui poter compiere un secondo studio di equilibrio. In un incastro, ad esempio, le rotazioni e gli spostamenti sono nulli, mentre sulla trave fittizia occorrerà proibire i tagli ed i momenti: quindi l'incastro reale andrà sostituito con un estremo libero. Inversamente, se la trave reale presenta un estremo libero, in esso andranno permessi spostamenti e rotazioni, e quindi sulla trave fittizia andrà previsto un incastro.

In sintesi, per i vincoli di estremità, la relazione tra vincoli reali e fittizi è fornita da:

incastro \rightarrow estremo libero

appoggio \rightarrow appoggio

bipendolo \rightarrow bipendolo

estremo libero \rightarrow incastro

Per i vincoli intermedi esterni, si consideri prima l'appoggio intermedio: in esso gli spostamenti devono essere nulli, così come le rotazioni relative: sulla trave fittizia, quindi, bisognerà prevedere un vincolo che annulli i momenti flettenti, e per cui non vi sia discontinuità nei tagli, e tale vincolo è una cerniera. Del tutto analogamente, è immediato osservare che un bipendolo esterno si tramuterà in un bipendolo interno:

appoggio intermedio \rightarrow cerniera

bipendolo esterno \rightarrow bipendolo interno

Infine, si considerino i vincoli interni, ossia la cerniera ed il bipendolo interno. La cerniera impone che gli abbassamenti relativi siano nulli, mentre le rotazioni relative sono ammesse: il corrispondente vincolo fittizio non dovrà causare discontinuità nei momenti, mentre l'andamento del taglio dovrà essere discontinuo, e quindi occorrerà introdurre un appoggio (la cui reazione causa la discontinuità del taglio). Analogamente, il bipendolo interno si tramuta in un bipendolo esterno:

cerniera \rightarrow appoggio

bipendolo interno \rightarrow bipendolo esterno

Esercizio n .1

Si consideri la trave appoggiata di luce L , in Figura 1, soggetta ad un carico uniformemente distribuito di intensità q lungo tutta la luce, e si voglia conoscere il diagramma delle rotazioni e dell'abbassamento.

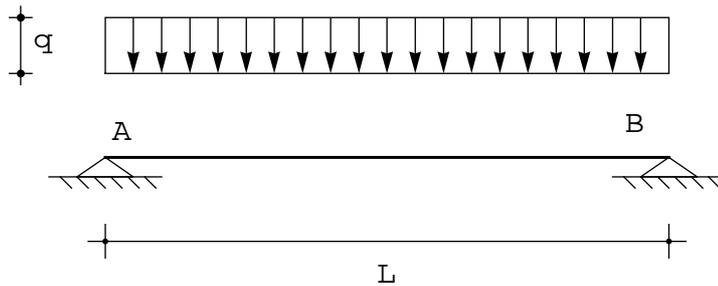


Figura 1 - Lo studio della trave appoggiata soggetta a carico distribuito secondo la teoria di Mohr

Il primo passo per l'applicazione del metodo di Mohr e' il calcolo del diagramma del momento sulla trave di Figura 1. Le reazioni saranno uguali, e pari a:

$$R_A = R_B = -\frac{qL}{2} \quad (10)$$

mentre il diagramma del taglio sara' lineare:

$$T(x_3) = a x_3 + b \quad (11)$$

e poiche'

$$T(0) = -R_A = \frac{qL}{2} \quad (12)$$

$$T\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

si avra' :

$$T(x_3) = q \left(-x_3 + \frac{L}{2} \right) \quad (13)$$

Il momento flettente si ottiene immediatamente, integrando l'espressione precedente:

$$M(x_3) = q \left(-\frac{x_3^2}{2} + \frac{L}{2} x_3 \right) + c_0 \quad (14)$$

e la costante di integrazione c_0 si annulla, in quanto il momento si annulla in $x_3=0$. Ne segue che il carico fittizio puo' scriversi:

$$q^*(x_3) = \frac{q}{2EI} x_3 (L - x_3) \quad (15)$$

La trave fittizia e' ancora la trave appoggiata, e quindi occorre ora calcolare il momento flettente sulla trave di Figura 2. Le reazioni fittizie sono fornite da:

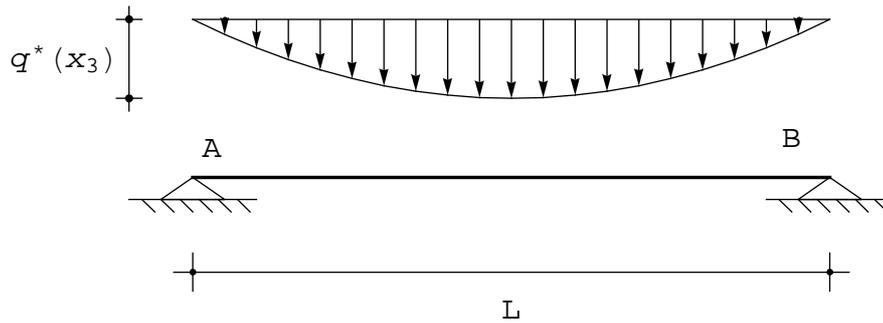


Figura 2 - La trave fittizia

$$R_A^* = R_B^* = -\frac{1}{2} \int_0^L \frac{q}{2EI} x(L-x) dx = -\frac{qL^3}{24EI} \quad (16)$$

Il taglio fittizio e' allora ottenibile integrando la (15) :

$$T^*(x_3) = -\frac{q}{2EI} \left(\frac{Lx_3^2}{2} - \frac{x_3^3}{3} \right) + c_0 \quad (17)$$

e la costante di integrazione si ottiene osservando che $T^*(0) = -R_A^*$. Si ha quindi:

$$T^*(x_3) = -\frac{q}{2EI} \left(\frac{Lx_3^2}{2} - \frac{x_3^3}{3} \right) + \frac{qL^3}{24EI} \quad (18)$$

Infine, un' ulteriore integrazione fornisce il richiesto momento fittizio (la costante di integrazione e' nulla in quanto il momento si annulla in 0):

$$M^*(x_3) = -\frac{q}{2EI} \left(\frac{Lx_3^3}{6} - \frac{x_3^4}{12} \right) + \frac{qL^3}{24EI} x_3 \quad (19)$$

In base alle analogie di Mohr, puo' concludersi :

$$\phi(x_3) = -T^*(x_3) = -\frac{qL^3}{24EI} - \frac{qx_3^2}{2EI} \left(\frac{x_3}{3} - \frac{L}{2} \right) \quad (20)$$

$$u_2(x_3) = M^*(x_3) = \frac{qL^3}{24EI} x_3 - \frac{q}{2EI} \left(\frac{Lx_3^3}{6} - \frac{x_3^4}{12} \right) \quad (21)$$

Nota - Questo esercizio, in cui sono richieste le funzioni rotazione e spostamento, evidenzia la stretta parentela del metodo di Mohr col metodo della doppia integrazione di Saviotti. Tuttavia, il metodo di Mohr e' molto conveniente quando viene richiesta la conoscenza di una rotazione o di un abbassamento in un singolo punto della trave, come si vede dall'esercizio successivo.

Esercizio n .2

Si consideri la trave appoggiata di luce L, in Figura 1, soggetta ad una forza concentrata in mezzeria, e si voglia conoscere il valore dell'abbassamento e della rotazione nella sezione S di figura.

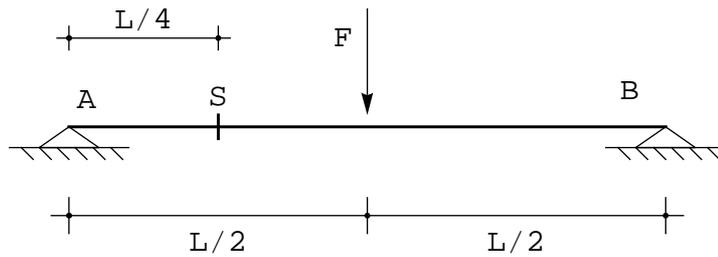


Figura 3 - Trave appoggiata soggetta a carico concentrato: spostamento ad un quarto della luce

Il primo passo per l'applicazione del metodo di Mohr e' il calcolo del diagramma del momento sulla trave di Figura 1. Le reazioni saranno uguali, e pari a:

$$R_A = R_B = -\frac{F}{2} \quad (22)$$

mentre il diagramma del taglio sara' costante da A alla mezzeria, e pari a $F/2$, ed ancora costante dalla mezzeria a B, e pari ad $F/2$.

Il carico fittizio sara' quindi la distribuzione triangolare illustrata in Figura 4.

Occorre ora calcolare il taglio ed il momento flettente ad $L/4$ per questa trave fittizia. Le reazioni fittizie sono fornite da:

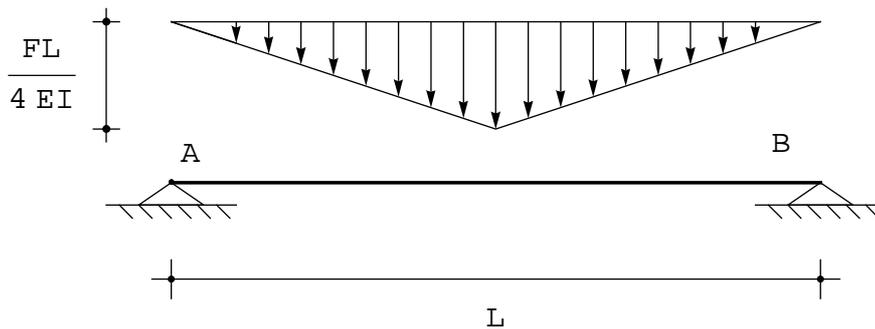


Figura 4 - La trave fittizia

$$R_A^* = R_B^* = -\frac{1}{2} \left(\frac{FL}{4EI} \frac{L}{2} \right) = -\frac{FL^2}{16EI} \quad (23)$$

ed in S il taglio fittizio e' allora immediatamente deducibile dal diagramma delle forze in Figura 5:

$$T^* \left(x_3 = \frac{L}{4} \right) = -R_A^* - \frac{1}{2} F \frac{L}{8EI} \frac{L}{4} = \frac{3FL^2}{64EI} \quad (24)$$

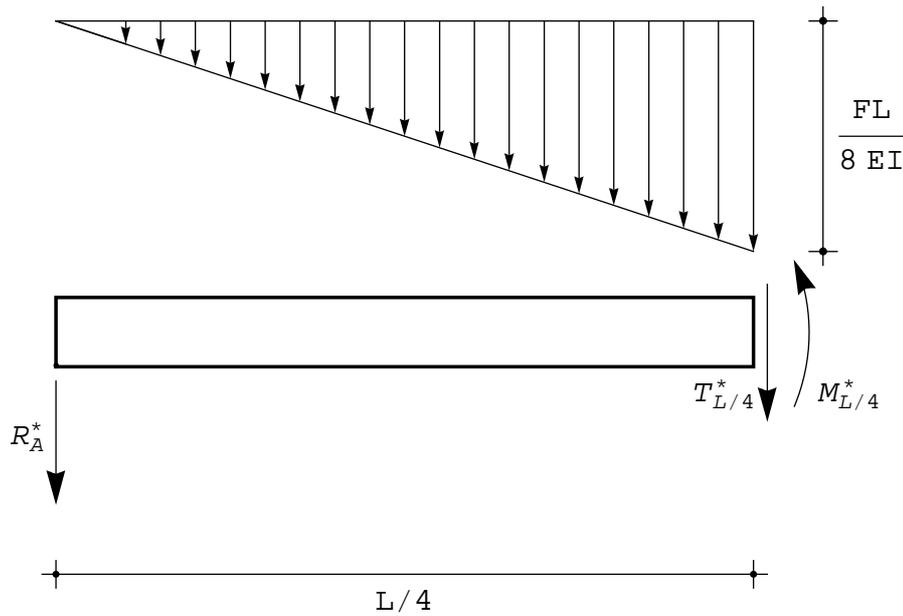


Figura 5 - Il diagramma delle forze per il calcolo del momento flettente in $L/4$

Analogamente si ha il momento fittizio:

$$M^* \left(x_3 = \frac{L}{4} \right) = - R_A^* \frac{L}{4} - \frac{1}{2} F \frac{L}{8 EI} \frac{L}{4} \frac{L}{12} = \frac{11 F L^3}{768 EI} \quad (25)$$

In base alle analogie di Mohr, puo' concludersi :

$$\phi \left(x_3 = \frac{L}{4} \right) = - \frac{3 F L^2}{64 EI} \quad (26)$$

$$u_2 \left(x_3 = \frac{L}{4} \right) = \frac{11 F L^3}{768 EI} \quad (27)$$

Esercizio n.3

Si consideri ancora la trave appoggiata di Figura 6, caricata con una coppia applicata a distanza L_1 dall'estremo di sinistra. Si voglia conoscere l'abbassamento in corrispondenza della coppia.

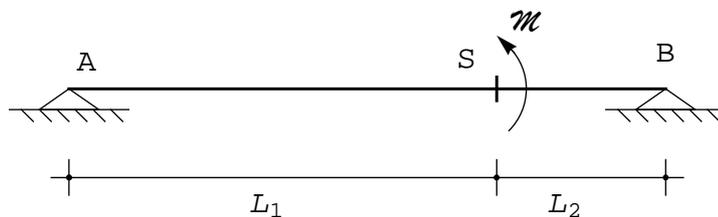


Figura 6 - Una trave appoggiata soggetta ad una coppia concentrata

Le reazioni sono uguali e contrarie, e pari a:

$$R_A = - R_B = - \frac{M}{L_1 + L_2} \quad (28)$$

Il diagramma del momento deve essere nullo in A ed in B, e deve variare linearmente da A ad S con pendenza pari al taglio in A, giungendo quindi in A con valore:

$$M_{\text{sin}} (x_3 = L_1) = \frac{\mathcal{M}}{L_1 + L_2} L_1 \quad (29)$$

Nel secondo tratto, il diagramma deve annullarsi in B e variare linearmente con pendenza pari al taglio in B, sicché giunge in S con valore:

$$M_{\text{des}} (x_3 = L_1) = - \frac{\mathcal{M}}{L_1 + L_2} L_2 \quad (30)$$

Si noti che la discontinuità del diagramma è pari al valore della coppia, e che il carico sarà positivo (diretto verso il basso) sulla prima luce, e negativo (diretto verso l'alto) sulla seconda luce:

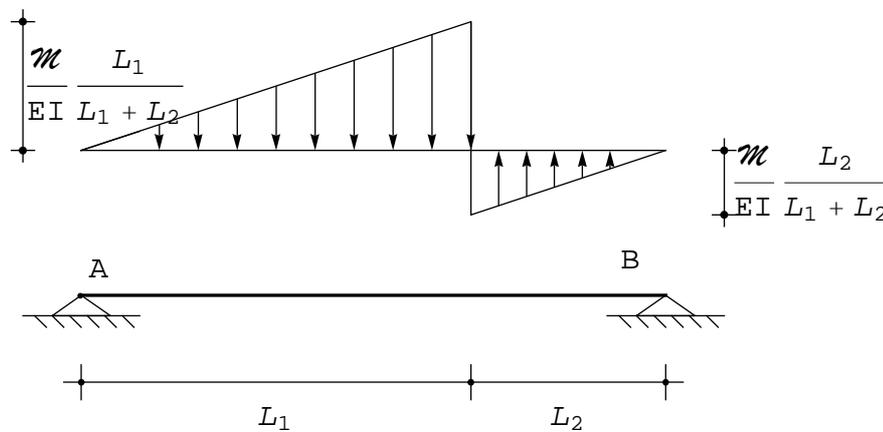


Figura 7 - La trave fittizia corrispondente alla trave di Figura 6

Per il calcolo del momento in S, sulla trave ausiliaria, si inizi a calcolare la reazione R_A^* , scrivendo l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno al punto B:

$$R_A^* (L_1 + L_2) + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{L_1}{L_1 + L_2} L_1 \left(L_2 + \frac{L_1}{3} \right) - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{L_2}{L_1 + L_2} L_2 \frac{2}{3} L_2 = 0 \quad (31)$$

da cui subito :

$$R_A^* = - \frac{\mathcal{M} (L_1^2 + 2 L_1 L_2 - 2 L_2^2)}{6 EI (L_1 + L_2)} \quad (32)$$

Il momento fittizio in S si ottiene allora scrivendo :

$$R_A^* L_1 + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{L_1}{L_1 + L_2} L_1 \frac{L_1}{3} + M_S^* = 0 \quad (33)$$

da cui il richiesto spostamento :

$$u_2 (x_3 = L_1) = \frac{\mathcal{M} L_1 L_2 (L_1 - L_2)}{3 EI (L_1 + L_2)} \quad (34)$$

Si noti che il punto si abbassa se appartenente alla semiluce di destra, dove $L_1 > L_2$, si alza se appartenente alla semiluce di sinistra, dove $L_1 < L_2$, e non si sposta se in mezzera.

Esempio n. 4

Si vuol conoscere l'abbassamento in corrispondenza della forza per la trave di Figura 8:

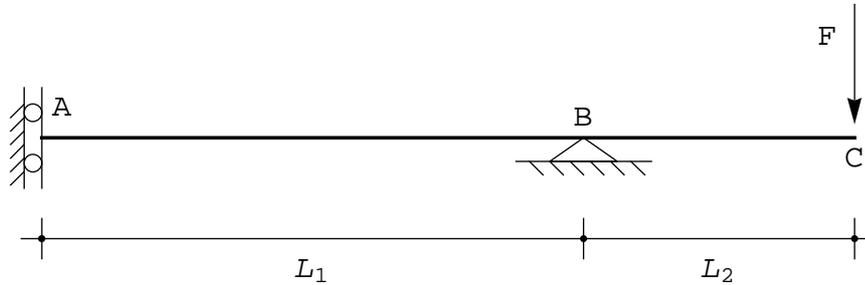


Figura 8 - Una trave con bipendolo ed appoggio caricata su uno sbalzo

Il diagramma del momento è costante, e pari ad $-FL_2$, dal bipendolo fino all'appoggio, per poi crescere linearmente, fino ad annullarsi in corrispondenza della forza. La trave fittizia prevede una cerniera al posto dell'appoggio, ed un incastro al posto dell'estremo libero, sicché occorre studiare la trave di Figura 9, e su di essa calcolare la reazione dell'incastro.

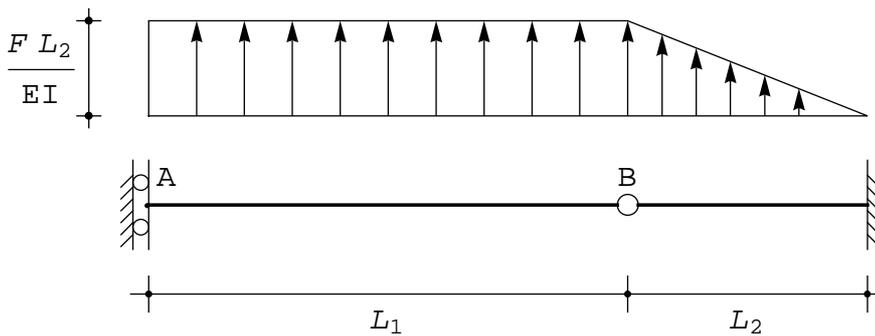


Figura 9 - La trave fittizia ed il carico fittizio corrispondente alla trave di Figura 8

A ciò fare, si osservi che il taglio in B può agevolmente calcolarsi dall'equilibrio alla traslazione del primo tratto:

$$T_B^* = \frac{F L_2}{EI} L_1 \quad (35)$$

e quindi l'equilibrio alla rotazione del secondo tratto implica :

$$-T_B^* L_2 - \frac{1}{2} \frac{F L_2}{EI} L_2 \frac{2}{3} L_2 + \mathcal{M}_{rC}^* = 0 \quad (36)$$

e quindi :

$$u_2 (L_1 + L_2) = \frac{F L_2^2}{EI} \left(L_1 + \frac{L_2}{3} \right) \quad (37)$$

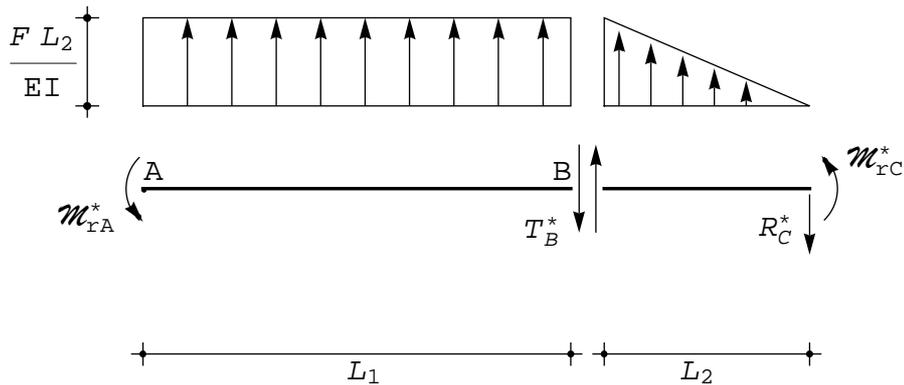


Figura 10 - Il diagramma delle forze per il calcolo del momento

Esempio n .5

Per la struttura di Figura 11, si vuole conoscere l'abbassamento della cerniera in B, e la rotazione relativa tra le sue due facce

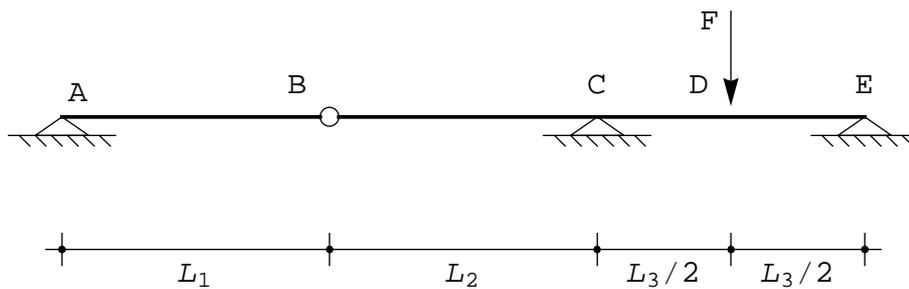


Figura 11 - Una trave su tre appoggi e cerniera

E' immediato realizzare che il diagramma del momento si limita al tratto CE, ed e' distribuito con legge lineare secondo lo schema di Figura 12.

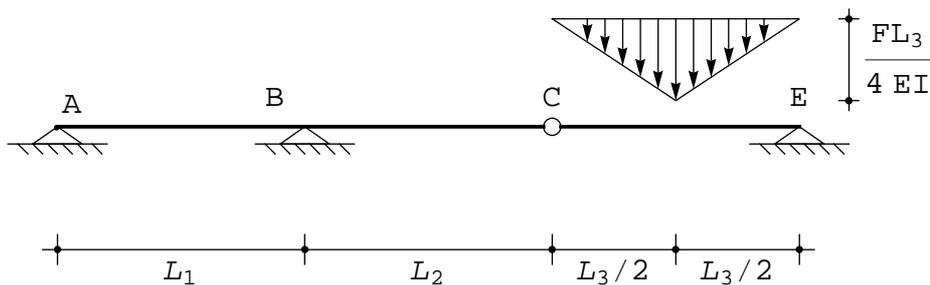


Figura 12 - La trave fittizia corrispondente alla Figura 11

Le equazioni di equilibrio per i due tratti di Figura si scrivono:

$$\begin{aligned} R_A^* + R_B^* + T_C^* &= 0 \\ R_A^* L_1 - T_C^* L_2 &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

$$-T_C^* + R_E^* + \frac{1}{2} \frac{FL_3}{4EI} L_3 = 0$$

$$-T_C^* - R_E^* = 0$$

avendo scelto come poli il punto B ed il punto D, rispettivamente per il primo e secondo tratto. Risolvendo si ha:

$$T_C^* = \frac{FL_3^2}{16EI} \quad (40)$$

$$R_A^* = \frac{FL_3^2}{16EI} \frac{L_2}{L_1} \quad (41)$$

$$R_B^* = -T_C^* - R_A^* = -\frac{FL_3^2}{16EI} \left(1 + \frac{L_2}{L_1}\right) \quad (42)$$

Ora e' immediato realizzare, equilibrando il concio elementare in B, che la reazione fittizia dell'appoggio e' pari alla richiesta variazione angolare:

$$R_A^* = T_{sin}^* - T_{des}^* = \phi_{des} - \phi_{sin} = \Delta\phi \quad (43)$$

e quindi :

$$\Delta\phi_B = -\frac{FL_3^2}{16EI} \left(1 + \frac{L_2}{L_1}\right) \quad (44)$$

Il momento in B e' poi facilmente deducibile come:

$$M_B^* = -R_A^* L_1 = -\frac{FL_3^2 L_2}{16EI} \quad (45)$$

Si puo' quindi concludere che la cerniera in B subisce un innalzamento pari a:

$$u_{2B} = -\frac{FL_3^2 L_2}{16EI} \quad (46)$$

Esempio n .6

Per la trave di Figura 13, si calcoli l' abbassamento e la rotazione in corrispondenza della coppia applicata:

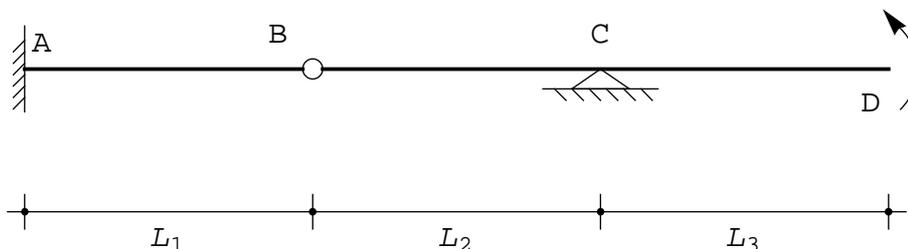


Figura 13 - Una trave con sbalzo e coppia applicata

Il diagramma del momento sara' costante lungo lo sbalzo, per poi variare linearmente fino all'incastro, passando per la cerniera B, dove si annulla. Ne segue che la trave fittizia si presentera' come:

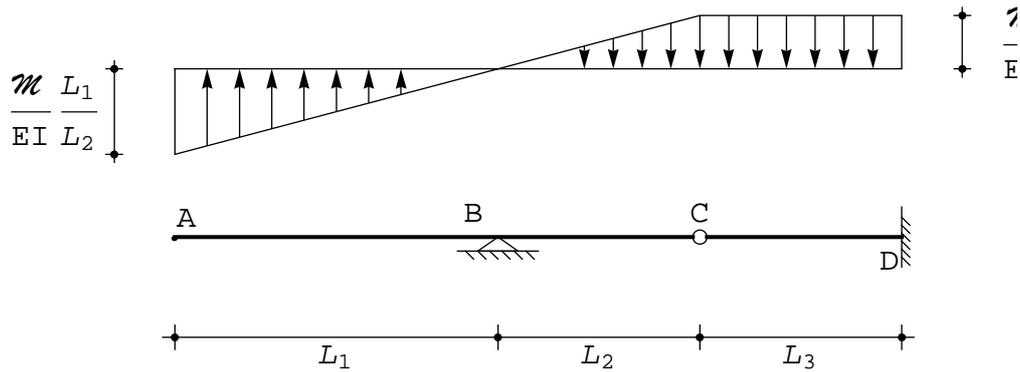


Figura 14 - La trave fittizia corrispondente alla Figura 13

Le equazioni di equilibrio dei due tratti si possono scrivere come :

$$R_B^* + T_C^* - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{L_1}{L_2} L_1 + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{EI} L_2 = 0 \quad (47)$$

$$-T_C^* L_2 - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{L_1}{L_2} L_1 \frac{L_1}{3} - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{EI} L_2 \frac{L_2}{3} = 0 \quad (48)$$

$$-T_C^* + R_D^* + \frac{\mathcal{M}}{EI} L_3 = 0 \quad (49)$$

$$\mathcal{M}_{xD}^* - R_D^* L_3 - \frac{\mathcal{M}}{EI} L_3 \frac{L_3}{2} = 0 \quad (50)$$

Dalla (48) si ha subito il taglio fittizio in C :

$$T_C^* = -\frac{1}{3} \frac{\mathcal{M}}{EI} \left(\frac{L_1^3}{L_2^2} + L_2 \right) \quad (51)$$

e poi le richieste reazioni fittizie nell' incastro :

$$R_D^* = -\frac{\mathcal{M}}{EI} \left(L_3 + \frac{1}{3} \left(\frac{L_1^3}{L_2^2} + L_2 \right) \right) \quad (52)$$

$$\mathcal{M}_{xD}^* = -\frac{\mathcal{M} L_3}{EI} \left(\frac{L_3}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{L_1^3}{L_2^2} + L_2 \right) \right) \quad (53)$$

Infine, poiche' la reazione e la coppia reattiva, nell'incastro, coincidono con il taglio ed il momento, rispettivamente, si potra' affermare che:

$$\phi_D = \frac{\mathcal{M}}{EI} \left(L_3 + \frac{1}{3} \left(\frac{L_1^3}{L_2^2} + L_2 \right) \right) \quad (54)$$

$$u_{2D} = -\frac{\mathcal{M} L_3}{EI} \left(\frac{L_3}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{L_1^3}{L_2^2} + L_2 \right) \right) \quad (55)$$

Esempio n .7

Si consideri ora la mensola parzialmente caricata di Figura 15, e per essa si voglia conoscere lo spostamento e la rotazione all'estremo libero.

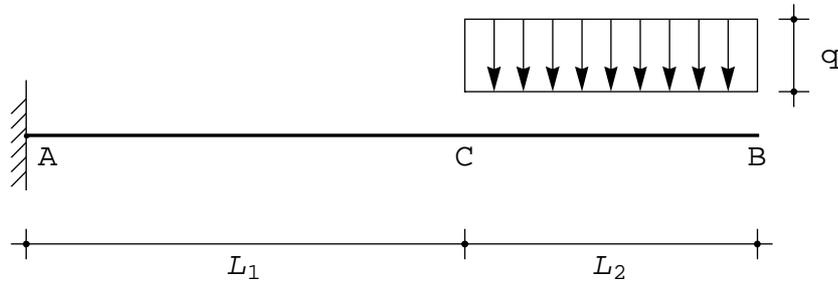


Figura 15 - Una trave a mensola parzialmente caricata

La reazione verticale nell'incastro, e la coppia reattiva, sono immediatamente deducibili come:

$$\begin{aligned} R_A &= -qL_2 \\ \mathcal{M}_{xA} &= qL_2 \left(L_1 + \frac{L_2}{2} \right) \end{aligned} \quad (56)$$

Il diagramma del taglio e' costante da 0 ad L_1 , dove la trave e' scarica, ed e' pari a $-R_A = qL_2$. Poi decresce linearmente fino ad annullarsi in B.

Il diagramma del momento varia con legge lineare nel tratto scarico, crescendo da $-\mathcal{M}_{xA}$ fino a $-qL_2^2/2$, per poi crescere con legge quadratica, ed annullarsi in B assieme alla sua derivata. Analiticamente, quindi, nel tratto scarico sara':

$$M(x_3) = -qL_2 \left(L_1 + \frac{L_2}{2} \right) + qL_2 x_3 \quad (57)$$

mentre sulla restante parte di trave si avra' (adottando un sistema di riferimento con origine in C):

$$M(x'_3) = -\frac{qL_2^2}{2} + qL_2 x'_3 - \frac{q}{2} x_3'^2 \quad (58)$$

Ne segue il carico fittizio di Figura 16, e la necessita' di calcolare le reazioni fittizie dell'incastro in B:

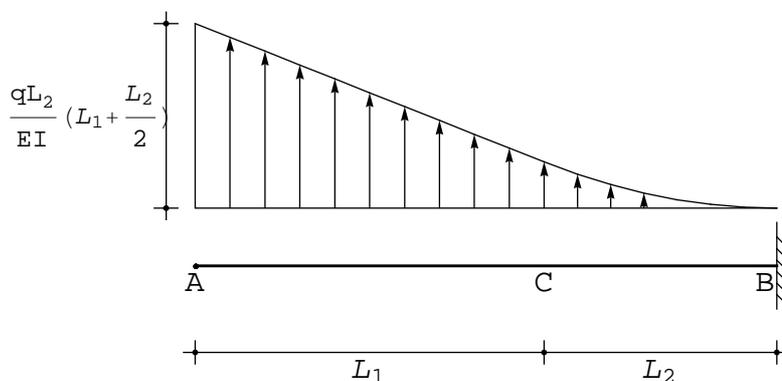


Figura 16 - La trave fittizia per l'esempio di Figura 15

$$R_B^* + \frac{1}{EI} \int_0^{L_1} M(x_3) dx_3 + \frac{1}{EI} \int_0^{L_2} M(x_3') dx_3' = 0 \quad (59)$$

da cui :

$$R_B^* = \frac{qL_2}{2EI} \left(L_1^2 + L_1 L_2 + \frac{L_2^2}{3} \right) \quad (60)$$

$$M_{rB}^* = \frac{1}{EI} \int_0^{L_1} M(x_3) (L_1 + L_2 - x_3) dx_3 + \frac{1}{EI} \int_0^{L_2} M(x_3') (L_2 - x_3') dx_3' = \frac{qL_2}{24EI} (8L_1^3 + 18L_1^2 L_2 + 12L_1 L_2^2 + 3L_2^3) \quad (61)$$

Infine :

$$\phi_B = -\frac{qL_2}{2EI} \left(L_1^2 + L_1 L_2 + \frac{L_2^2}{3} \right) \quad (62)$$

$$u_{2B} = \frac{qL_2}{24EI} (8L_1^3 + 18L_1^2 L_2 + 12L_1 L_2^2 + 3L_2^3) \quad (63)$$

Esempio n .8

Si consideri la trave di Figura 17, caricata da due forze concentrate F ed F_1 nella mezziera del primo e dell'ultimo tratto. Si vuole conoscere la rotazione relativa nella cerniera in C

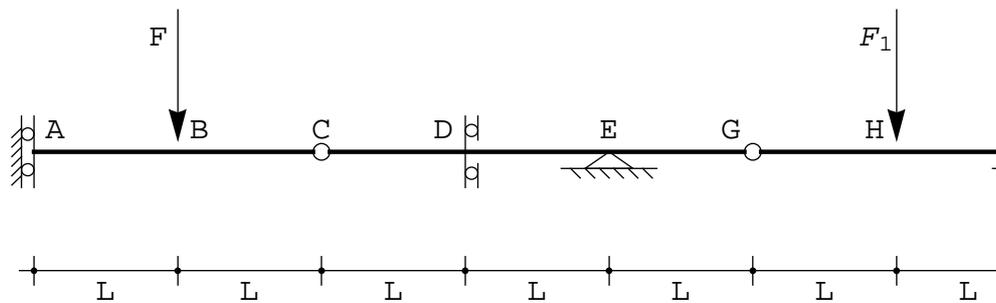


Figura 17 - Una trave composta da tre tratti, soggetta a due forze indipendenti

Le sei equazioni di equilibrio per i tre tratti della trave si scrivono :

$$\begin{aligned} F + T_C &= 0 \\ M_{rA} + FL &= 0 \\ -T_C + R_E + T_G &= 0 \\ -T_C 3L + M_{rD} + R_E L &= 0 \\ -T_G + F_1 + R_I &= 0 \\ -T_G 2L + F_1 L &= 0 \end{aligned} \quad (64)$$

con soluzione :

$$\begin{aligned}
 T_C &= -F \\
 \mathcal{M}_{rA} &= -FL \\
 R_I &= -\frac{F_1}{2} \\
 T_G &= \frac{F_1}{2} \\
 R_E &= T_C - T_G = -F - \frac{F_1}{2} \\
 \mathcal{M}_{rD} &= -R_E L + 3 L T_C = F_1 \frac{L}{2} - 2 FL
 \end{aligned}$$

Con questi valori, il diagramma del momento puo' essere tracciato abbastanza facilmente: esso sara' costante da A a B, e pari ad FL, per poi decrescere linearmente fino ad incontrare il bipendolo esterno, e passando per il punto di nullo in corrispondenza della cerniera C. Ne segue che il momento nella sezione a sinistra del bipendolo sara' pari a - FL. In D il diagramma del momento presenta una discontinuita', dovuta alla coppia reattiva del vincolo, e quindi nella sezione a destra del bipendolo esso varra' $-F_1 L/2 + FL$.

Analizzando ora l'ultima campata, si puo' dedurre che il diagramma del momento dovra' essere nullo sia in G che in I, mentre in corrispondenza della forza vale $F_1 L/2$. Cio' permette il tracciamento del diagramma da I fino all'appoggio in E, e non resta che collegare i diagrammi per ottenere il carico fittizio di Figura 18, dove non e' stato indicato, per esigenze di chiarezza, il valore del carico a destra del bipendolo, pari a:

$$M_{Ddes}^* = -\frac{F_1 L}{2 EI} + \frac{F L}{EI} \quad (66)$$

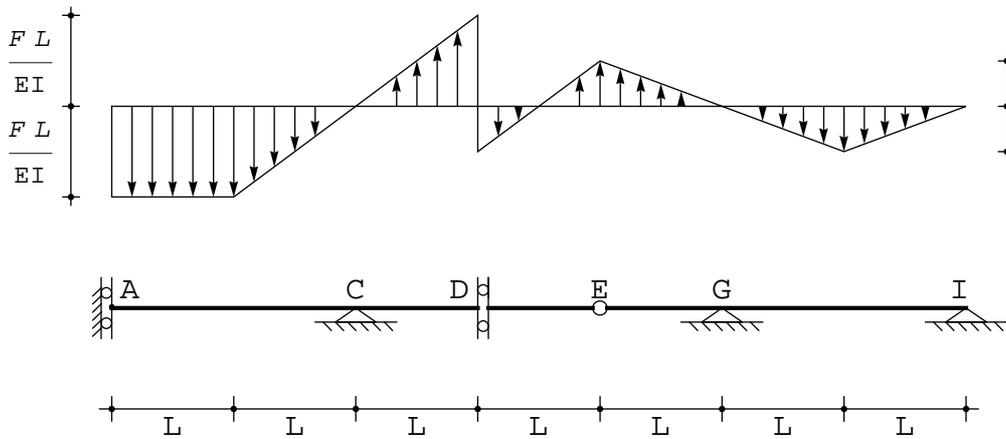


Figura 18 - La trave fittizia per l'esempio di Figura 17

L'equazione di equilibrio per la traslazione verticale del primo tratto porta a scrivere :

$$R_C^* + \frac{FL}{EI} L = 0 \quad (67)$$

e quindi la richiesta rotazione relativa e' pari :

$$\Delta\phi_C = -\frac{FL^2}{EI} \quad (68)$$

Figure