
16 - Il metodo della doppia integrazione, o di Saviotti

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 23 marzo 2012]

In questo capitolo si calcolano i tagli, i momenti, le rotazioni e gli abbassamenti per travi *isostatiche* utilizzando il metodo della doppia integrazione, o di Saviotti.

A base di tale teoria, vi e' la constatazione che in una trave isostatica deve essere possibile calcolare le caratteristiche della sollecitazione interna sfruttando solo le equazioni di equilibrio

$$\frac{dT}{dx_3} = -q \quad (1)$$

$$\frac{dM}{dx_3} = T \quad (2)$$

e solo successivamente si ricavano le rotazioni e gli abbassamenti, utilizzando le equazioni costitutive e di congruenza:

$$\frac{d\phi}{dx_3} = \frac{M}{EI} \quad (3)$$

$$\frac{du_2}{dx_3} = -\phi \quad (4)$$

Esercizio n .1

Si consideri la trave appoggiata di luce L , in Figura 1, soggetta ad un carico uniformemente distribuito di intensita' q_0 lungo tutta la luce, e si voglia conoscere il diagramma delle rotazioni e dell'abbassamento.

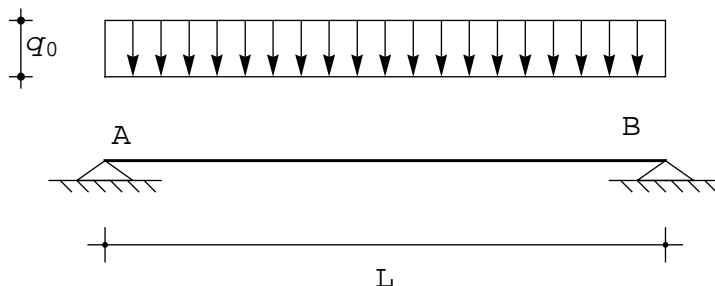


Figura 1 - Lo studio della trave appoggiata soggetta a carico distribuito secondo la teoria di Mohr

Poiche' il carico e' costante, la (1) fornisce l'espressione del taglio, che ovviamente risulta lineare:

$$T(x_3) = - \int q_0 dx_3 = -q_0 x_3 + T_0 \quad (5)$$

e la (2) indica una distribuzione quadratica del momento:

$$M(x_3) = \int T dx_3 = -q_0 \frac{x_3^2}{2} + T_0 x_3 + M_0 \quad (6)$$

Le due costanti di integrazione, T_0 ed M_0 , si calcolano imponendo le due *condizioni di equilibrio* ai due estremi della trave:

$$\begin{aligned} M(0) = 0 &\rightarrow M_0 = 0 \\ M(L) = 0 &\rightarrow T_0 = q_0 \frac{L}{2} \end{aligned} \quad (7)$$

e quindi:

$$T(x_3) = q_0 \left(\frac{L}{2} - x_3 \right) \quad (8)$$

$$M(x_3) = q_0 \left(-\frac{x_3^2}{2} + \frac{L}{2} x_3 \right) \quad (9)$$

Si noti che le due costanti di integrazione sono fisicamente interpretabili come il taglio ed il momento nell'estremo di sinistra.

La prima parte del procedimento di Saviotti e' conclusa, e si puo' passare al calcolo di rotazioni e spostamenti. A partire dalla (3) si puo' scrivere:

$$\phi(x_3) = \int \frac{M}{EI} dx_3 = -q_0 \frac{x_3^3}{6EI} + q_0 \frac{L}{4EI} x_3^2 + \phi_0 \quad (10)$$

e dalla (4):

$$u_2(x_3) = -\int \phi dx_3 = q_0 \frac{x_3^4}{24EI} - q_0 \frac{L}{12EI} x_3^3 - \phi_0 x_3 + u_{20} \quad (11)$$

Infine, le due costanti di integrazione, ϕ_0 ed u_{20} si calcolano imponendo le due *condizioni di congruenza* agli estremi della trave:

$$\begin{aligned} u_2(0) = 0 &\rightarrow u_{20} = 0 \\ u_2(L) = 0 &\rightarrow \phi_0 = q_0 \frac{L^3}{24EI} - q_0 \frac{L^3}{12EI} = -q_0 \frac{L^3}{24EI} \end{aligned} \quad (12)$$

Puo' concludersi:

$$\phi(x_3) = -q_0 \frac{x_3^3}{6EI} + q_0 \frac{L}{4EI} x_3^2 - q_0 \frac{L^3}{24EI} \quad (13)$$

$$u_2(x_3) = q_0 \frac{x_3^4}{24EI} - q_0 \frac{L}{12EI} x_3^3 + q_0 \frac{L^3}{24EI} x_3 \quad (14)$$

Le due costanti di integrazione, in questa seconda fase del procedimento, possono interpretarsi come la rotazione e l'abbassamento nell'estremo di sinistra.

■ I valori notevoli

In seguito, assumeranno notevole importanza alcune quantita', che conviene evidenziare fin da ora:

1. rotazione agli estremi per trave appoggiata-appoggiata soggetta a carico costante q_0 :

$$\phi(0) = -\alpha_0 \frac{L^3}{24 EI}$$

$$\phi(L) = \alpha_0 \frac{L^3}{24 EI}$$

1. abbassamento in mezzeria per trave appoggiata-appoggiata soggetta a carico costante q_0 :

$$u_2\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{q_0 L^4}{EI} \quad (16)$$

Esercizio n .2

Si consideri la trave appoggiata di luce complessiva $L_1 + L_2$, in Figura 2, soggetta ad una forza concentrata in una sezione generica a distanza L_1 dalla base di sinistra. Si vogliono conoscere il taglio, il momento, la rotazione e l'abbassamento utilizzando il metodo di Saviotti

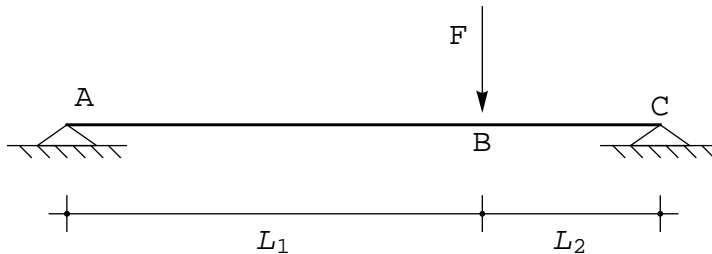


Figura 2 - Trave appoggiata soggetta a carico concentrato in una sezione generica

■ La prima integrazione per i tagli ed i momenti

In una prima fase si risolve il problema statico, deducendo le caratteristiche. Poiché il carico distribuito è assente, il taglio sarà costante, ed il momento lineare. Tuttavia in corrispondenza della forza F il taglio vedrà una discontinuità, ed il momento flettente una discontinuità angolare. Per tener conto della presenza di tale discontinuità, si scriveranno due espressioni del taglio, e due espressioni del momento flettente, valide a sinistra della forza e a destra della forza, rispettivamente. Sarà quindi:

$$\begin{aligned} T^{(AB)} &= T_0 \\ M^{(AB)} &= T_0 x_3 + M_0 \\ T^{(BC)} &= T_1 \\ M^{(BC)} &= T_1 x_3 + M_1 \end{aligned} \quad (17)$$

Le quattro costanti di integrazione hanno l'immediato significato fisico di tagli e momenti in A, ed immediatamente a destra di B. Si noti inoltre che si sono scelti due sistemi di riferimento, con origine in A e B, rispettivamente, per esprimere tagli e momenti nei due tratti. Le condizioni di equilibrio che permettono il calcolo delle costanti sono:

$$\begin{aligned} M^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0 \\ M^{(AB)}(x_3 = L_1) &= M^{(BC)}(x_3 = 0) \\ T^{(AB)}(x_3 = L_1) &= T^{(BC)}(x_3 = 0) + F \\ M^{(BC)}(x_3 = L_2) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

ossia :

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 \\ T_0 L_1 + M_0 &= M_1 \\ T_0 &= T_1 + F \\ T_1 L_2 + M_1 &= 0 \end{aligned}$$

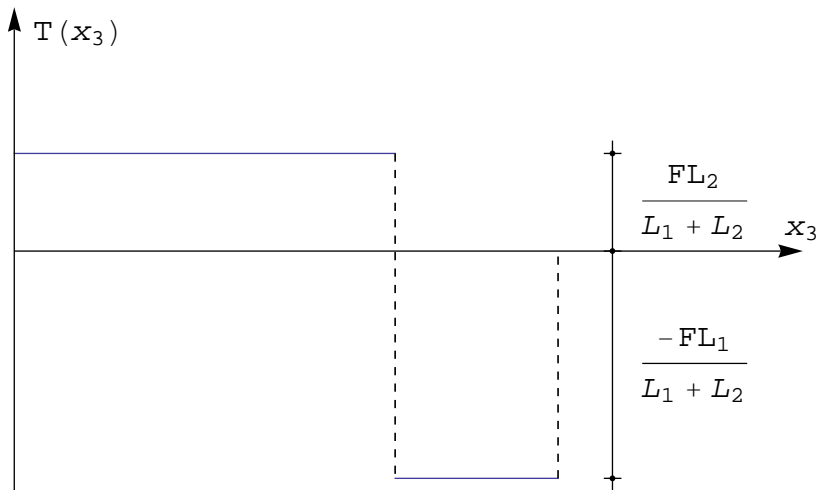
con soluzione :

$$\begin{aligned} T_0 &= F \frac{L_2}{L_1 + L_2} \\ T_1 &= -F \frac{L_1}{L_1 + L_2} \\ M_0 &= 0 \\ M_1 &= F \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \end{aligned} \quad (20)$$

Infine, tagli e momenti possono scriversi come :

$$\begin{aligned} T^{(AB)} &= F \frac{L_2}{L_1 + L_2} \\ M^{(AB)} &= F \frac{L_2}{L_1 + L_2} x_3 \\ T^{(BC)} &= -F \frac{L_1}{L_1 + L_2} \\ M^{(BC)} &= -F \frac{L_1}{L_1 + L_2} x_3 + F \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \end{aligned} \quad (21)$$

I relativi diagrammi non presentano difficoltà, si noti solo che il momento cresce nella prima semiluce, laddove il taglio è positivo, per poi decrescere a destra della forza, dove il taglio diviene negativo.



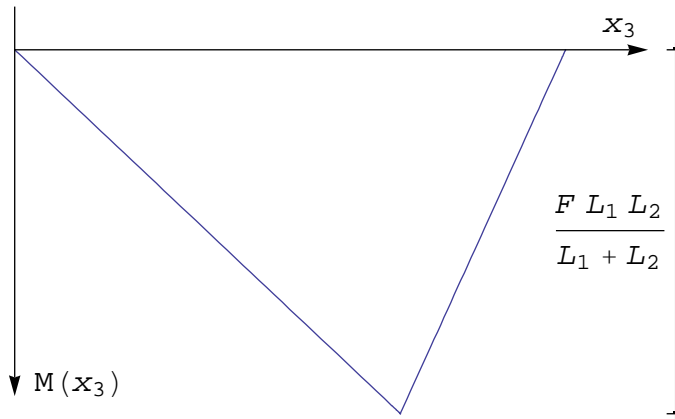


Figura 3 - I diagrammi delle c.s.i. per la trave appoggiata soggetta a carico concentrato in una sezione generica

■ La seconda integrazione per rotazioni ed abbassamenti

Si potrà scrivere, per i due tratti :

$$\phi^{(AB)}(x_3) = \int \frac{M^{(AB)}}{EI} dx_3 = \frac{F}{EI} \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{x_3^2}{2} + \phi_0 \quad (22)$$

$$\phi^{(BC)}(x_3) = \int \frac{M^{(BC)}}{EI} dx_3 = -\frac{F}{EI} \frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{x_3^2}{2} + \frac{F}{EI} \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} x_3 + \phi_1 \quad (23)$$

ed ancora :

$$u_2^{(AB)}(x_3) = -\int \phi^{(AB)} dx_3 = -\frac{F}{EI} \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{x_3^3}{6} - \phi_0 x_3 + u_{20} \quad (24)$$

$$u_2^{(BC)}(x_3) = -\int \phi^{(BC)} dx_3 = \frac{F}{EI} \frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{x_3^3}{6} - \frac{F}{EI} \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{x_3^2}{2} - \phi_1 x_3 + u_{21} \quad (25)$$

e le quattro costanti di integrazione si ottengono imponendo le quattro condizioni di congruenza :

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0 \\ u_2^{(AB)}(x_3 = L_1) &= u_2^{(BC)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(AB)}(x_3 = L_1) &= \phi^{(BC)}(x_3 = 0) \\ u_2^{(BC)}(x_3 = L_2) &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Queste quattro condizioni si tramutano nelle equazioni :

$$\begin{aligned} u_{20} &= 0 \\ -\frac{F}{EI} \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{L_1^3}{6} - \phi_0 L_1 + u_{20} &= u_{21} \\ \frac{F}{EI} \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{L_1^2}{2} + \phi_0 &= \phi_1 \\ \frac{F}{EI} \frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{L_2^3}{6} - \frac{F}{EI} \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{L_2^2}{2} - \phi_1 L_2 + u_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

con soluzione :

$$u_{20} = 0$$

$$u_{21} = \frac{F L_1^2 L_2^2}{3 EI (L_1 + L_2)}$$

$$\phi_0 = -\frac{F L_1 L_2 (L_1 + 2 L_2)}{6 EI (L_1 + L_2)}$$

$$\phi_1 = \frac{F L_1 (L_1 - L_2) L_2}{3 EI (L_1 + L_2)}$$

Le rotazioni e gli abbassamenti possono allora scriversi come :

$$\phi^{(AB)}(x_3) = \frac{F}{EI} \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{x_3^2}{2} - \frac{F L_1 L_2 (L_1 + 2 L_2)}{6 EI (L_1 + L_2)} \quad (29)$$

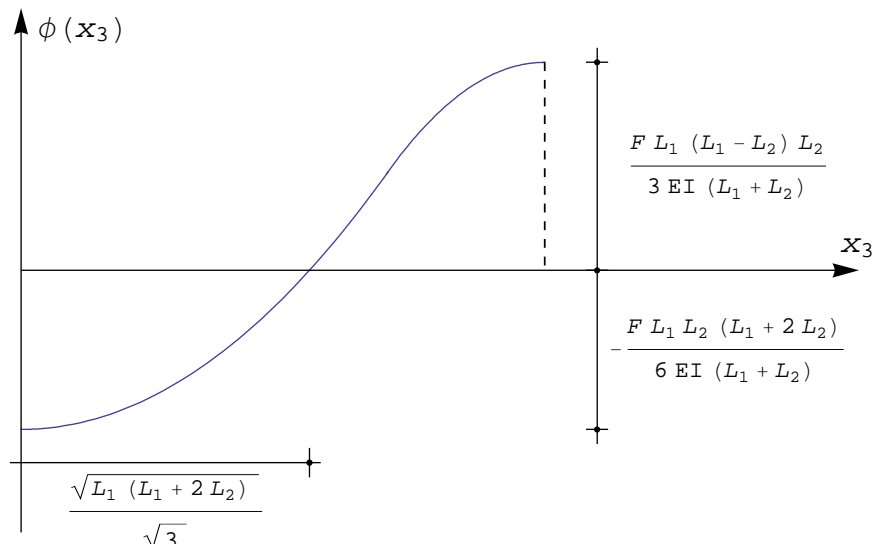
$$\phi^{(BC)}(x_3) = -\frac{F}{EI} \frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{x_3^2}{2} + \frac{F}{EI} \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} x_3 + \frac{F L_1 (L_1 - L_2) L_2}{3 EI (L_1 + L_2)} \quad (30)$$

$$u_2^{(AB)}(x_3) = -\frac{F}{EI} \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{x_3^3}{6} + \frac{F L_1 L_2 (L_1 + 2 L_2)}{6 EI (L_1 + L_2)} x_3 \quad (31)$$

$$u_2^{(BC)}(x_3) = \frac{F}{EI} \frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{x_3^3}{6} - \frac{F L_1 L_2 (L_1 + 2 L_2)}{6 EI (L_1 + L_2)} x_3 + \frac{F L_1^2 L_2^2}{3 EI (L_1 + L_2)} \quad (32)$$

$$\frac{F}{EI} \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{x_3^2}{2} - \frac{F L_1 (L_1 - L_2) L_2}{3 EI (L_1 + L_2)} x_3 + \frac{F L_1^2 L_2^2}{3 EI (L_1 + L_2)}$$

I relativi diagrammi sono presentati in Figura 4.



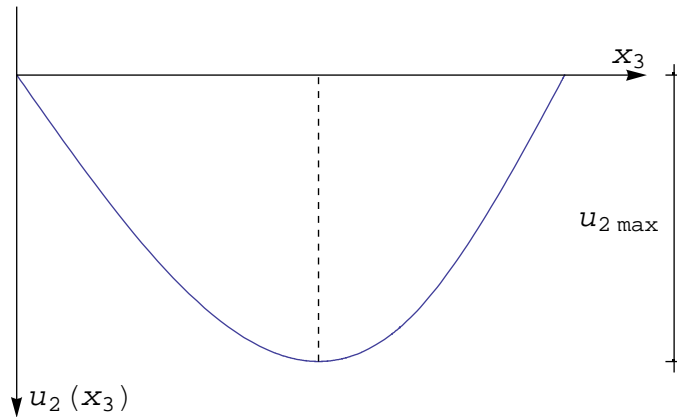


Figura 4 - I diagrammi di rotazioni e spostamenti per la trave appoggiata soggetta a carico concentrato in una sezione generica

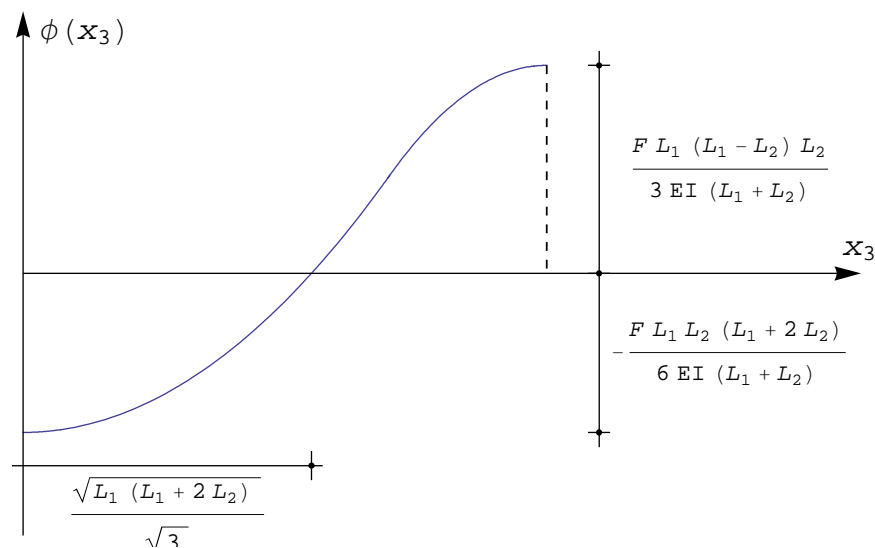
Per il loro tracciamento, si è considerato che le rotazioni si annullano all'ascissa:

$$x_3^* = \frac{\sqrt{L_1 (L_1 + 2 L_2)}}{\sqrt{3}} \quad (33)$$

e che a tale ascissa si verifica quindi lo spostamento massimo :

$$u_{2 \max} = u_2 (x_3 = x_3^*) = \frac{F L_2 (L_1 (L_1 + 2 L_2))^{3/2}}{9 \sqrt{3} EI (L_1 + L_2)} \quad (34)$$

Si osservi inoltre che la pendenza del diagramma delle rotazioni agli estremi deve essere nulla, in quanto nulli sono i momenti ai due estremi, e che la curvatura del diagramma degli spostamenti non si annulla.



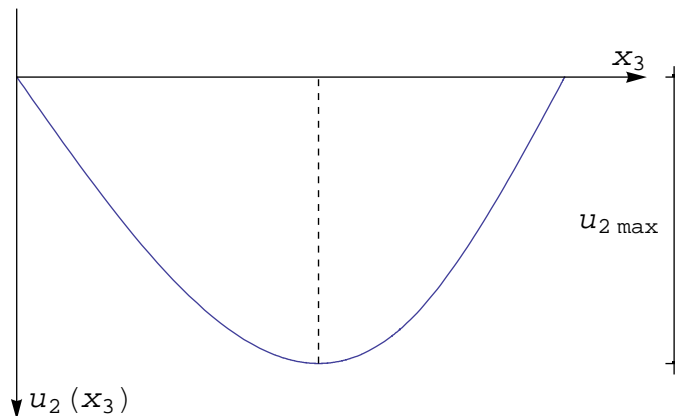


Figura 4 - I diagrammi di rotazioni e spostamenti per la trave appoggiata soggetta a carico concentrato in una sezione generica

■ I valori notevoli

Anche in questo caso sono da segnalare i valori delle rotazioni agli estremi e l'abbassamento in corrispondenza della forza:

1. rotazione agli estremi per trave appoggiata-appoggiata soggetta a forza all'ascissa generica:

$$\begin{aligned}\phi(0) &= -\frac{F L_1 L_2 (L_1 + 2 L_2)}{6 EI (L_1 + L_2)} \\ \phi(L) &= \frac{F L_1 L_2 (2 L_1 + L_2)}{6 EI (L_1 + L_2)}\end{aligned}\quad (35)$$

1. abbassamento in corrispondenza della forza per trave appoggiata-appoggiata soggetta a forza all'ascissa generica:

$$u_2\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{F L_1^2 L_2^2}{3 EI (L_1 + L_2)} \quad (36)$$

Nel caso particolare di forza in mezzera si ha, posto $L_1 = L_2 = L/2$:

$$\phi(0) = -\frac{F L^2}{16 EI}; \quad \phi(L) = \frac{F L^2}{16 EI} \quad (37)$$

ed infine:

$$u_2\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{F L^3}{48 EI} \quad (38)$$

Esempio n. 3

Si vuol studiare la trave di Figura 5, dove uno sbalzo di luce L_2 e' sollecitato da una stesa triangolare di carico.

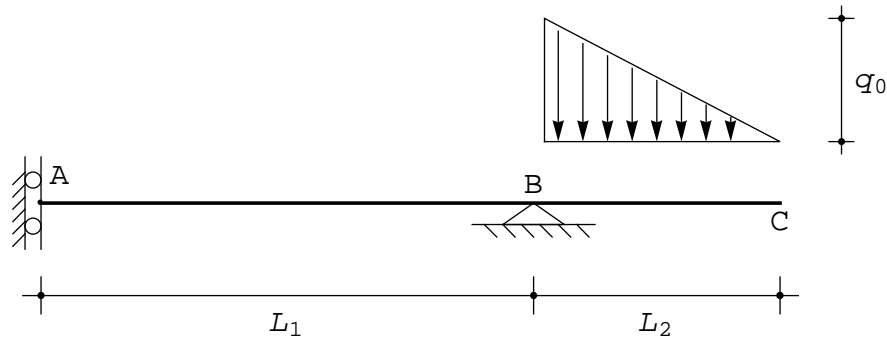


Figura 5 - Una trave con bispodolo ed appoggio caricata su uno sbalzo

Occorre preliminarmente esprimere analiticamente il carico, che essendo lineare, ed avendo i due valori prefissati q_0 in B e zero in C potrà scriverci come:

$$q(x_3) = q_0 \left(1 - \frac{x_3}{L_2} \right) \quad (39)$$

■ La prima integrazione per i tagli ed i momenti

L'utilizzo delle relazioni di equilibrio fornisce:

$$\begin{aligned} T^{(AB)} &= T_0 \\ T^{(BC)} &= -q_0 \left(x_3 - \frac{x_3^2}{2 L_2} \right) + T_1 \end{aligned} \quad (40)$$

ed ancora:

$$\begin{aligned} M^{(AB)} &= T_0 x_3 + M_0 \\ M^{(BC)} &= -q_0 \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{x_3^3}{6 L_2} \right) + T_1 x_3 + M_1 \end{aligned} \quad (41)$$

Le quattro condizioni di equilibrio, che consentiranno il calcolo delle quattro costanti di integrazione, sono:

$$\begin{aligned} T^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0 \\ M^{(AB)}(x_3 = L_1) &= M^{(BC)}(x_3 = 0) \\ T^{(BC)}(x_3 = L_2) &= 0 \\ M^{(BC)}(x_3 = L_2) &= 0 \end{aligned} \quad (42)$$

ossia:

$$\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ T_0 L_1 + M_0 &= M_1 \\ -q_0 \left(\frac{L_2}{2} \right) + T_1 &= 0 \\ -q_0 \frac{L_2^2}{3} + T_1 L_2 + M_1 &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

con soluzione:

$$T_0 = 0$$

$$T_1 = q_0 \frac{L_2}{2}$$

$$M_0 = -\frac{1}{6} q_0 L_2^2$$

$$M_1 = -\frac{1}{6} q_0 L_2^2$$

I tagli ed i momenti sono quindi forniti da :

$$T^{(AB)} = 0$$

$$T^{(BC)} = -q_0 \left(x_3 - \frac{x_3^2}{2 L_2} \right) + q_0 \frac{L_2}{2} \quad (45)$$

$$M^{(AB)} = -\frac{1}{6} q_0 L_2^2$$

$$M^{(BC)} = -q_0 \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{x_3^3}{6 L_2} \right) + q_0 \frac{L_2}{2} x_3 - \frac{1}{6} q_0 L_2^2 = \frac{q_0 (x_3 - L_2)^3}{6 L_2} \quad (46)$$

I diagrammi sono illustrati in Figura 6 : si noti che poiche' il carico si annulla nell'estremo di destra, ivi il taglio giungera' con pendenza orizzontale, cosi' come il momento, che vede annullarsi in quel punto sia la sua derivata prima che la sua derivata seconda.

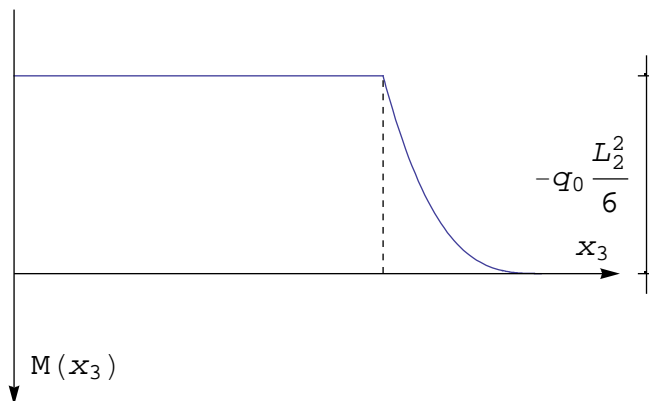
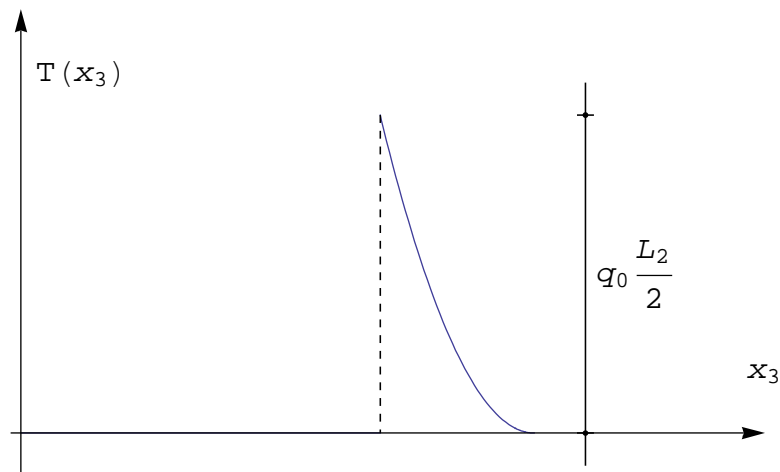


Figura 6 - I diagrammi delle c.s.i. per la trave di Figura 5

La seconda integrazione per le rotazioni e gli abbassamenti

Dai momenti si possono trarre le espressioni delle rotazioni :

$$\phi^{(AB)}(x_3) = \int \frac{M^{(AB)}}{EI} dx_3 = -\frac{1}{6} \varrho_0 L_2^2 x_3 + \phi_0 \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(BC)}(x_3) = \\ \int \frac{M^{(BC)}}{EI} dx_3 = -\varrho_0 \left(\frac{x_3^3}{6} - \frac{x_3^4}{24 L_2} \right) + \varrho_0 \frac{L_2}{2} \frac{x_3^2}{2} - \frac{1}{6} \varrho_0 L_2^2 x_3 + \phi_1 \end{aligned} \quad (48)$$

ed integrando ancora una volta si ottengono gli abbassamenti :

$$u_2^{(AB)}(x_3) = \frac{1}{12} \varrho_0 L_2^2 x_3^2 - \phi_0 x_3 + u_{20} \quad (49)$$

$$u_2^{(BC)}(x_3) = \varrho_0 \left(\frac{x_3^4}{24} - \frac{x_3^5}{120 L_2} \right) - \varrho_0 \frac{L_2}{12} x_3^3 + \frac{1}{12} \varrho_0 L_2^2 \frac{x_3^2}{2} - \phi_1 x_3 + u_{21} \quad (50)$$

Questa volta occorrerà utilizzare le equazioni di congruenza, che si scrivono :

$$\begin{aligned} \phi^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0 \\ u_2^{(AB)}(x_3 = L_1) &= 0 \\ u_2^{(BC)}(x_3 = 0) &= 0 \\ \phi^{(AB)}(x_3 = L_1) &= \phi^{(BC)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (51)$$

ossia :

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 0 \\ \frac{1}{12} \varrho_0 L_2^2 L_1^2 - \phi_0 L_1 + u_{20} &= 0 \\ u_{21} &= 0 \\ -\frac{1}{6} \varrho_0 L_2^2 L_1 + \phi_0 &= \phi_1 \end{aligned} \quad (52)$$

da cui subito :

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 0 \\ \phi_1 &= -\frac{1}{6} \varrho_0 L_2^2 L_1 \\ u_{20} &= -\frac{1}{12} \varrho_0 L_2^2 L_1^2 \\ u_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (53)$$

In definitiva, le rotazioni e gli abbassamenti saranno forniti da :

$$\phi^{(AB)}(x_3) = -\frac{1}{6 EI} \varrho_0 L_2^2 x_3 \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(BC)}(x_3) = \\ -\frac{\varrho_0}{EI} \left(\frac{x_3^3}{6} - \frac{x_3^4}{24 L_2} \right) + \frac{\varrho_0}{EI} \frac{L_2}{2} \frac{x_3^2}{2} - \frac{1}{6} \frac{\varrho_0}{EI} L_2^2 x_3 - \frac{1}{6 EI} \varrho_0 L_2^2 L_1 \end{aligned} \quad (55)$$

$$u_2^{(AB)}(x_3) = \frac{1}{12 EI} q_0 L_2^2 x_3^2 - \frac{1}{12 EI} q_0 L_2^2 L_1^2 = \frac{q_0 (x_3^2 - L_1^2) L_2^2}{12 EI} \quad (56)$$

$$u_2^{(BC)}(x_3) = \frac{q_0}{EI} \left(\frac{x_3^4}{24} - \frac{x_3^5}{120 L_2} \right) - q_0 \frac{L_2}{12 EI} x_3^3 + \frac{1}{12 EI} q_0 L_2^2 x_3^2 + \frac{1}{6 EI} q_0 L_2^2 L_1 x_3 \quad (57)$$

I relativi diagrammi sono riportati in Figura 7, i valori estremi dell'abbassamento sono attinti agli estremi, e valgono:

$$u_{2 \min} = u_2^{(AB)}(x_3 = 0) = -\frac{q_0}{12 EI} L_2^2 L_1^2 \quad (58)$$

$$u_{2 \max} = u_2^{(BC)}(x_3 = L_2) = \frac{q_0}{30 EI} L_2^3 (5 L_1 + L_2) \quad (59)$$

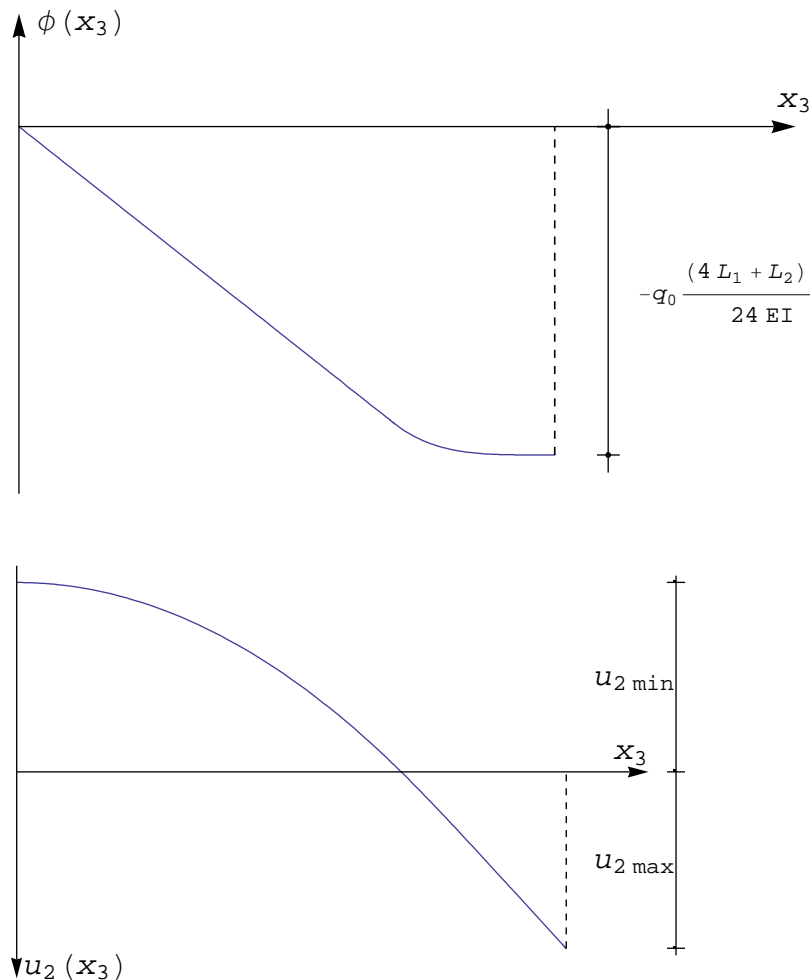


Figura 7 - I diagrammi di rotazioni e spostamenti per la trave di Figura 5

Esempio n .4

Per la struttura di Figura 8, si vuole applicare il metodo di Saviotti, per ottenere il diagramma delle rotazioni e degli spostamenti

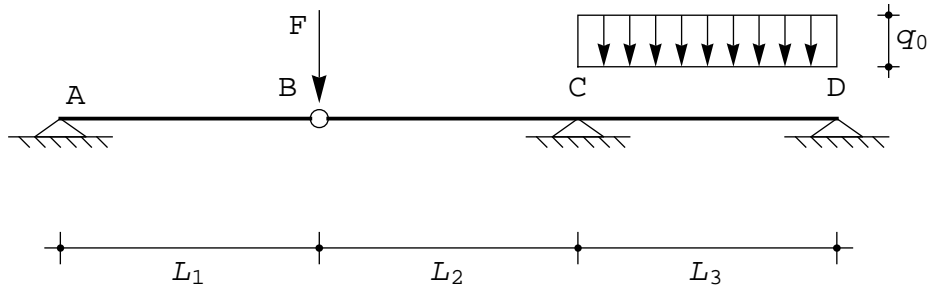


Figura 8 - Una trave su tre appoggi e cerniera

In una prima fase, si scrivono le espressioni dei tagli e dei momenti nelle tre campate. In base alle relazioni di equilibrio, potrà porsi:

$$\begin{aligned}
 T^{(AB)} &= T_0 \\
 M^{(AB)} &= T_0 x_3 + M_0 \\
 T^{(BC)} &= T_1 \\
 M^{(BC)} &= T_1 x_3 + M_1 \\
 T^{(CD)} &= -q_0 x_3 + T_2 \\
 M^{(CD)} &= -q_0 \frac{x_3^2}{2} + T_2 x_3 + M_2
 \end{aligned} \tag{60}$$

Per il calcolo delle sei costanti di integrazione, si scrivano le equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 M^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 M^{(AB)}(x_3 = L_1) &= 0 \\
 M^{(BC)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 T^{(AB)}(x_3 = L_1) &= T^{(BC)}(x_3 = 0) + F \\
 M^{(BC)}(x_3 = L_2) &= M^{(CD)}(x_3 = 0) \\
 M^{(CD)}(x_3 = L_3) &= 0
 \end{aligned} \tag{61}$$

e valutandole attraverso le (60) :

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 0 \\
 T_0 L_1 + M_0 &= 0 \\
 M_1 &= 0 \\
 T_0 &= T_1 + F \\
 T_1 L_2 + M_1 &= M_2 \\
 -q_0 \frac{L_3^2}{2} + T_2 L_3 + M_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{62}$$

con soluzione :

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 0 \\
 T_0 &= 0 \\
 M_1 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= -F \\ M_2 &= -F L_2 \\ T_2 &= q_0 \frac{L_3}{2} + F \frac{L_2}{L_3} \end{aligned}$$

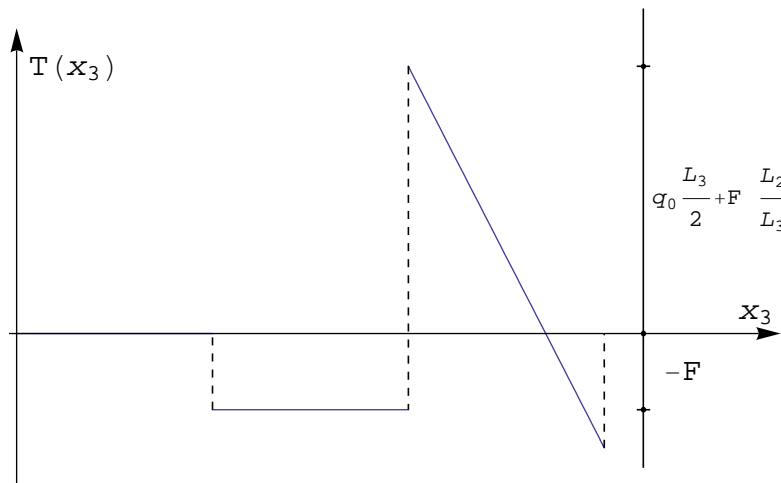
Le caratteristiche saranno quindi fornite da :

$$\begin{aligned} T^{(AB)} &= 0 \\ M^{(AB)} &= 0 \\ T^{(BC)} &= -F \\ M^{(BC)} &= -F x_3 \\ T^{(CD)} &= -q_0 x_3 + q_0 \frac{L_3}{2} + F \frac{L_2}{L_3} \\ M^{(CD)} &= -q_0 \frac{x_3^2}{2} + \left(q_0 \frac{L_3}{2} + F \frac{L_2}{L_3} \right) x_3 - F L_2 \end{aligned} \quad (64)$$

I diagrammi sono riportati in Figura 9, e non presentano particolari difficoltà. Si noti solo che il momento flettente raggiunge il suo valore massimo in terza campata, laddove il taglio si annulla, ossia all'ascissa:

$$x_3 = L_1 + L_2 + \frac{2 F L_2 + L_3^2 q_0}{2 L_3 q_0} \quad (65)$$

In base ai valori di F e q, tale ascissa può anche non ricadere nella terza campata, nel qual caso il taglio non si annulla, ed il momento cresce fino all'appoggio in D.



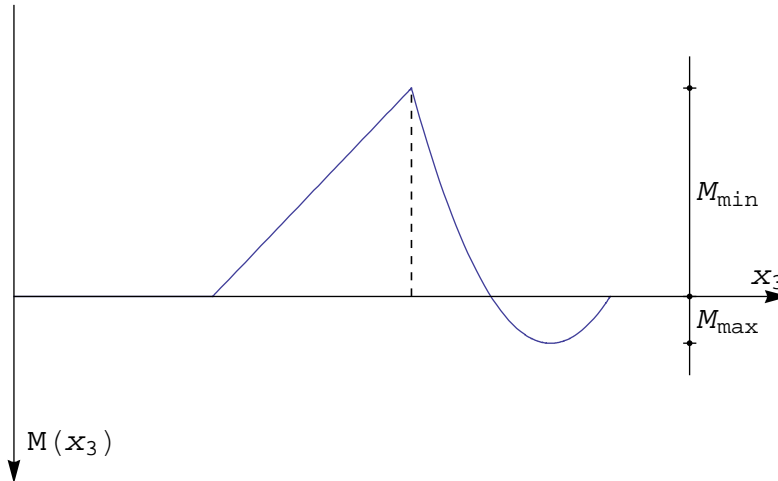


Figura 9 - I diagrammi delle c.s.i. per la trave di Figura 8

■ La seconda integrazione per le rotazioni e gli abbassamenti

Dai momenti si possono trarre le espressioni delle rotazioni :

$$\phi^{(AB)}(x_3) = \int \frac{M^{(AB)}}{EI} dx_3 = \phi_0 \quad (66)$$

$$\phi^{(BC)}(x_3) = \int \frac{M^{(BC)}}{EI} dx_3 = -F \frac{x_3^2}{2EI} + \phi_1 \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(CD)}(x_3) = \\ \int \frac{M^{(CD)}}{EI} dx_3 = -\alpha_0 \frac{x_3^3}{6EI} + \left(\alpha_0 \frac{L_3}{2EI} + \frac{F}{EI} \frac{L_2}{L_3} \right) \frac{x_3^2}{2} - \frac{F}{EI} L_2 x_3 + \phi_2 \end{aligned} \quad (68)$$

ed integrando ancora una volta si ottengono gli abbassamenti :

$$u_2^{(AB)}(x_3) = -\phi_0 x_3 + u_{20} \quad (69)$$

$$u_2^{(BC)}(x_3) = F \frac{x_3^3}{6EI} - \phi_1 x_3 + u_{21} \quad (70)$$

$$u_2^{(CD)}(x_3) = \alpha_0 \frac{x_3^4}{24EI} - \left(\alpha_0 \frac{L_3}{2EI} + \frac{F}{EI} \frac{L_2}{L_3} \right) \frac{x_3^3}{6} + \frac{F}{EI} L_2 \frac{x_3^2}{2} - \phi_2 x_3 + u_{31} \quad (71)$$

Questa volta occorrerà utilizzare le equazioni di congruenza, che si scrivono :

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0 \\ u_2^{(AB)}(x_3 = L_1) &= u_2^{(BC)}(x_3 = 0) \\ u_2^{(BC)}(x_3 = L_2) &= 0 \\ u_2^{(CD)}(x_3 = 0) &= 0 \\ \phi^{(BC)}(x_3 = L_2) &= \phi^{(CD)}(x_3 = 0) \\ u_2^{(CD)}(x_3 = L_3) &= 0 \end{aligned} \quad (72)$$

da cui il sistema di equazioni :

$$\begin{aligned}
u_{20} &= 0 \\
-\phi_0 L_1 + u_{20} &= u_{21} \\
F \frac{L_2^3}{6 EI} - \phi_1 L_2 + u_{21} &= 0 \\
u_{31} &= 0 \\
-F \frac{L_2^2}{2 EI} + \phi_1 &= \phi_2 \\
\varrho_0 \frac{L_3^4}{24 EI} - \left(\varrho_0 \frac{L_3}{2 EI} + \frac{F}{EI} \frac{L_2}{L_3} \right) \frac{L_3^3}{6} + \frac{F}{EI} L_2 \frac{L_3^2}{2} - \phi_2 L_3 + u_{31} &= 0
\end{aligned}$$

con soluzione :

$$\begin{aligned}
u_{20} &= 0 \\
\phi_0 &= - \frac{8 F L_2^3 + 8 F L_2^2 L_3 - L_2 L_3^3 \varrho_0}{24 EI L_1} \\
u_{21} &= \frac{1}{24 EI} L_2 (8 F L_2^2 + 8 F L_2 L_3 - L_3^3 \varrho_0) \\
\phi_1 &= \frac{1}{24 EI} (12 F L_2^2 + 8 F L_2 L_3 - L_3^3 \varrho_0) \\
u_{31} &= 0 \\
\phi_2 &= - \frac{1}{24 EI} L_3 (-8 F L_2 + L_3^2 \varrho_0)
\end{aligned} \tag{74}$$

In definitiva, le rotazioni sono fornite da :

$$\phi^{(AB)}(x_3) = - \frac{8 F L_2^3 + 8 F L_2^2 L_3 - L_2 L_3^3 \varrho_0}{24 EI L_1} \tag{75}$$

$$\phi^{(BC)}(x_3) = -F \frac{x_3^2}{2 EI} + \frac{1}{24 EI} (12 F L_2^2 + 8 F L_2 L_3 - L_3^3 \varrho_0) \tag{76}$$

$$\begin{aligned}
\phi^{(CD)}(x_3) &= -\varrho_0 \frac{x_3^3}{6 EI} + \left(\varrho_0 \frac{L_3}{2 EI} + \frac{F}{EI} \frac{L_2}{L_3} \right) \frac{x_3^2}{2} - \\
&\frac{F}{EI} L_2 x_3 - \frac{1}{24 EI} L_3 (-8 F L_2 + L_3^2 \varrho_0)
\end{aligned} \tag{77}$$

e gli abbassamenti da :

$$u_2^{(AB)}(x_3) = \frac{8 F L_2^3 + 8 F L_2^2 L_3 - L_2 L_3^3 \varrho_0}{24 EI L_1} x_3 \tag{78}$$

$$\begin{aligned}
u_2^{(BC)}(x_3) &= F \frac{x_3^3}{6 EI} - \left(\frac{1}{24 EI} (12 F L_2^2 + 8 F L_2 L_3 - L_3^3 \varrho_0) \right) x_3 + \\
&\frac{1}{24 EI} L_2 (8 F L_2^2 + 8 F L_2 L_3 - L_3^3 \varrho_0)
\end{aligned} \tag{79}$$

$$u_2^{(CD)}(x_3) = \alpha_0 \frac{x_3^4}{24 EI} - \left(\alpha_0 \frac{L_3}{2 EI} + \frac{F}{EI} \frac{L_2}{L_3} \right) \frac{x_3^3}{6} + \frac{F}{EI} L_2 \frac{x_3^2}{2} + \left(\frac{1}{24 EI} L_3 (-8 F L_2 + L_3^2 \alpha_0) \right) x_3 \quad (80)$$

I diagrammi sono riportati in Figura 10. Si noti la discontinuità delle rotazioni in corrispondenza della cerniera.

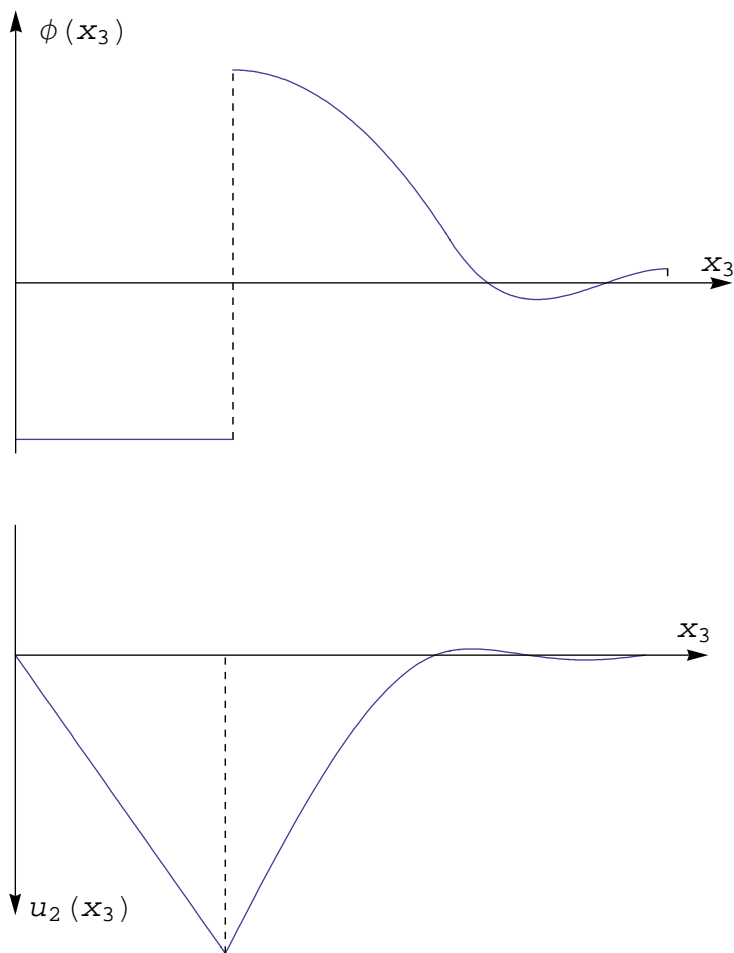


Figura 10 - I diagrammi di rotazioni e spostamenti per la trave di Figura 8

Figure