

15 - Vincoli imperfetti e variazioni termiche

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 8 aprile 2012]

In questo capitolo si studiano le travi con vincoli cedevoli, elasticamente ed anelastamente, e si introducono le variazioni termiche, assiale e flessionali.

Si ricorda, a tal proposito, che ci si limita alle variazioni termiche alla Volterra, in cui si conserva l'ipotesi di 'planeita' delle sezioni rette, e quindi una trave potrà essere soggetta ad una variazione termica *uniforme* ΔT , oppure ad una variazione termica alla Navier ΔT . Nel primo caso si genera uno spostamento assiale relativo tra i punti della trave, e sorge quindi una distorsione assiale pari a:

$$\lambda = -\alpha \Delta t \quad (1)$$

dove α e' il *coefficiente di dilatazione termica lineare*, esprimibile in 1/Celsius, e caratteristico del materiale. Esso rappresenta l'allungamento di un elemento di lunghezza unitaria per un incremento di un grado di temperatura. In Tabella 1 si riporta il valore di α per i piu' comuni materiali ingegneristici. Si noti che l'acciaio ed il calcestruzzo hanno lo stesso coefficiente di dilatazione termica lineare, rendendo possibile la tecnologia del cemento armato.

Acciaio	0.000012
Calcestruzzo	0.000012
Alluminio	0.000024
Mattoni	0.000006
Piombo	0.000029
Porcellana	0.000004
Legno (secondo le fibre)	0.000004
Legno (trasversalmente alle fibre)	0.000058
Ferro	0.000012
Ghisa	0.000010
Grafite	0.000003

Tabella 1 - Valori del coefficiente α per i materiali piu' comuni

Nel caso di variazione termica alla Navier, invece, si ha una differenza di temperatura ΔT tra l'estradosso e l'intradosso, che produce tra le due sezioni a distanza unitaria una rotazione relativa pari:

$$\frac{d\phi}{ds} = \alpha \frac{T_s}{h_s} = \alpha \frac{T_i}{h_i} = \alpha \frac{T_s - T_i}{h_s - h_i} = \alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (2)$$

dove $\Delta T = T_s - T_i$ e' la differenza di temperatura tra il bordo superiore ed il bordo inferiore della sezione retta, alta h . Sorge quindi la distorsione flessionale:

$$\mu = -\alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (3)$$

che rappresenta una curvatura flessionale aggiuntiva, sicche' si scrivera':

$$\chi = \frac{d\phi}{dx_3} = \frac{M}{EI} - \mu \quad (4)$$

e per le travi di Eulero - Bernoulli :

$$M = -EI \frac{d^2 u_2}{dx_3^2} + EI \mu \quad (5)$$

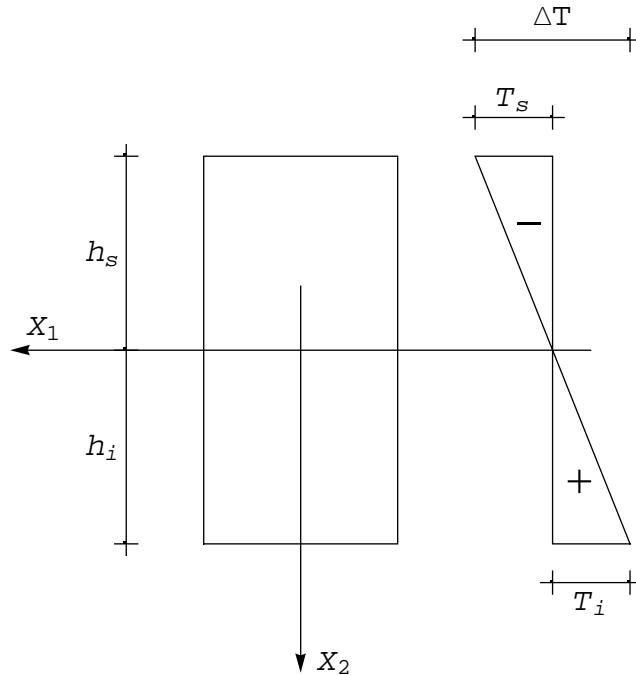


Figura 1 - La distorsione termica flessionale (alla Navier)

Esempio n.1

Si consideri la trave su tre appoggi di Figura 2, il cui appoggio di destra subisca un cedimento anelastico verticale pari a v_0 , e si vogliono conoscere gli spostamenti e le caratteristiche della sollecitazione interna generate dal cedimento.

A ciò fare, si potranno scrivere le due equazioni differenziali della linea elastica:

$$u_2'''' = 0 \quad (6)$$

in AB, e

$$v_2'''' = 0 \quad (7)$$

in BC. Si hanno quindi le soluzioni generali:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\ v_2(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 + d_2 x_3^2 + d_3 x_3^3 \end{aligned} \quad (8)$$

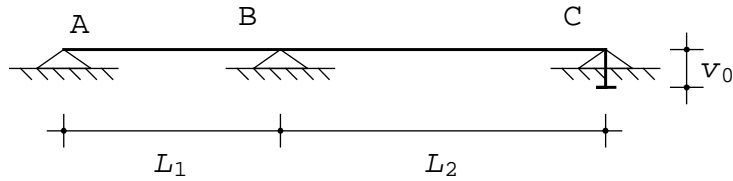


Figura 2 - Una trave su tre appoggi soggetta a cedimento anelastico di uno dei tre appoggi

e le otto costanti di integrazione possono calcolarsi imponendo le condizioni ai limiti :

$$\begin{aligned}
 u_2(x_3 = 0) &= 0 \\
 u_2'(x_3 = 0) &= 0 \\
 u_2(x_3 = L_1) &= 0 \\
 v_2(x_3 = 0) &= 0 \\
 u_2'(x_3 = L_1) &= v_2'(x_3 = 0) \\
 u_2''(x_3 = L_1) &= v_2''(x_3 = 0) \\
 v_2(x_3 = L_2) &= v_0 \\
 v_2'(x_3 = L_2) &= 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

Lo spostamento sarà allora fornito da :

$$u_2(x_3) = \frac{x_3 (x_3^2 - L_1^2)}{2 L_1 L_2 (L_1 + L_2)} v_0 \tag{10}$$

$$v_2(x_3) = \frac{x_3 (-x_3^2 + (3 x_3 + 2 L_1) L_2)}{2 L_2^2 (L_1 + L_2)} v_0 \tag{11}$$

e quindi, in cascata, si possono ottenere rotazioni, momenti e tagli :

$$\phi^{(1)}(x_3) = \frac{L_1^2 - 3 x_3^2}{2 L_1 L_2 (L_1 + L_2)} v_0 \tag{12}$$

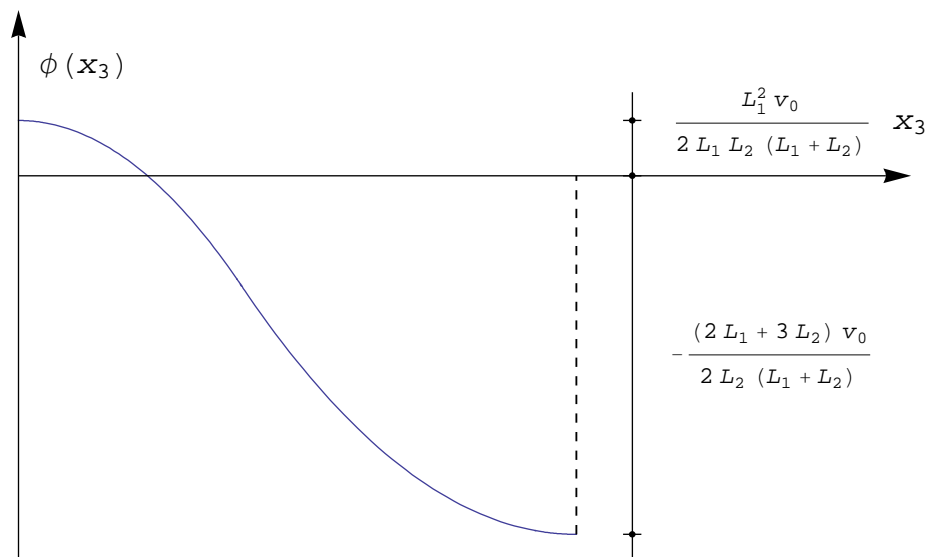
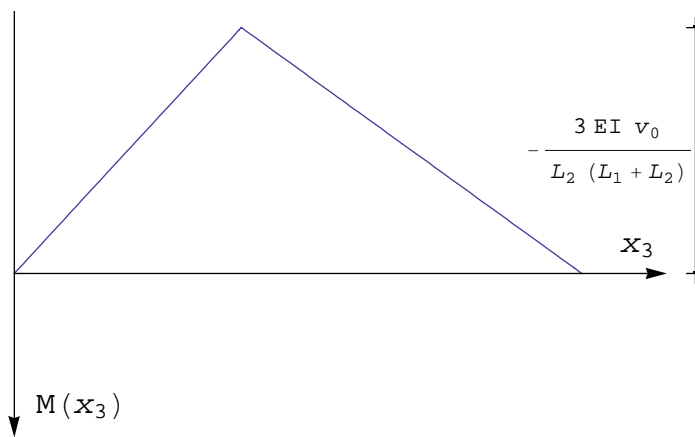
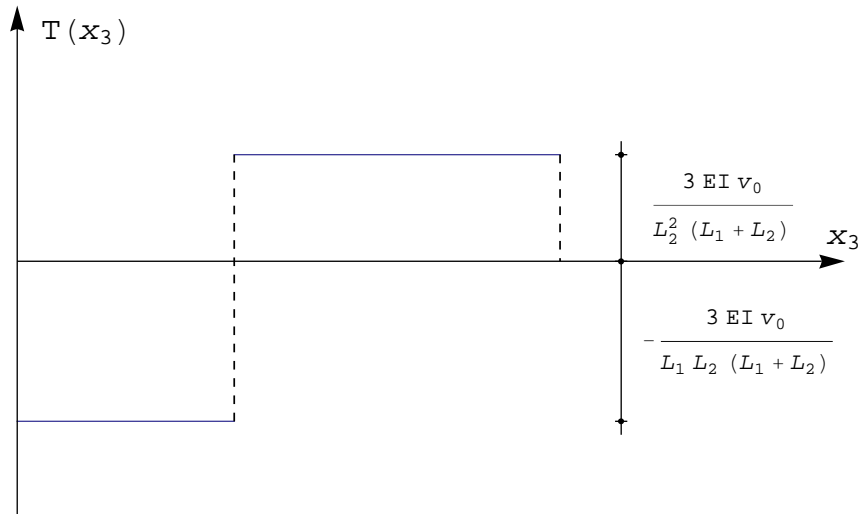
$$\phi^{(2)}(x_3) = \frac{3 x_3^2 - 2 (3 x_3 + L_1) L_2}{2 L_2^2 (L_1 + L_2)} v_0 \tag{13}$$

$$M^{(1)}(x_3) = - \frac{3 EI x_3}{L_1 L_2 (L_1 + L_2)} v_0 \tag{14}$$

$$M^{(2)}(x_3) = \frac{3 EI (x_3 - L_2)}{L_2^2 (L_1 + L_2)} v_0 \tag{15}$$

$$T^{(1)}(x_3) = - \frac{3 EI}{L_1 L_2 (L_1 + L_2)} v_0 \tag{16}$$

$$T^{(2)}(x_3) = \frac{3 EI}{L_2^2 (L_1 + L_2)} v_0 \tag{17}$$



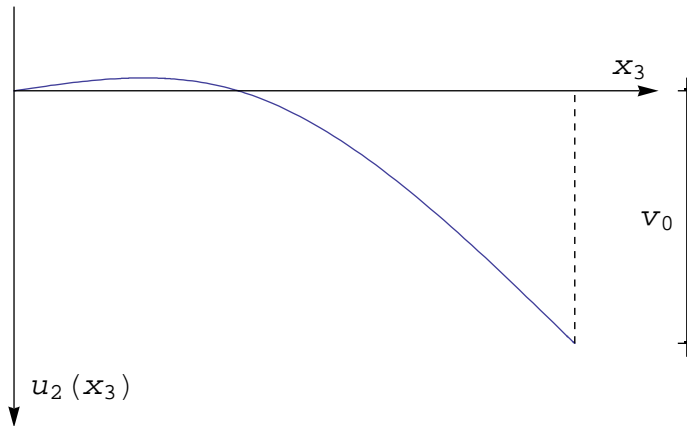


Figura 3 - Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per la trave di Figura 2

Nota - L'esempio appena trattato schematizza la colonna di cui parla Galileo nei "Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali":

"Era una grossissima Colonna di marmo distesa, e posata, presso alle sue estremita', sopra due pezzi di trave; cadde in pensiero dopo un certo tempo ad un Mecanico che fusse bene, per maggiormente assicurarsi che gravata dal proprio peso non si rompesse nel mezzo, supporgli anco in questa parte un terzo simile sostegno: parve il consiglio generalmente molto oportuno, ma l'esito lo dimostro' essere stato tutto l'opposito, atteso che non passarono molti mesi che la colonna si trovo' fessa e rotta, giusto sopra il nuovo appoggio di mezzo [...] Depositi in piana terra i deu pezzi della Colonna, si vedde che l'uno de i travi, su'l quale appoggiava una delle testate, si era, per la lunghezza del tempo, infracidato ed avvallato, e, restando quel di mezzo durissimo e forte, fu causa che la meta' della Colonna restasse in aria, abbandonata dall'estremo sostegno". Sull'argomento, vedi anche E. Benvenuto, "La Scienza delle Costruzioni ed il suo sviluppo storico", Sansoni, Firenze, pag.107-108

Esempio n.2 - La matrice di rigidezza

Si vuole ora introdurre il concetto di *matrice di rigidezza* di un elemento strutturale, prendendo a riferimento una trave di luce L in regime flesso-tagliante. A tal fine, si definiscano il vettore \mathbf{d} dei possibili spostamenti degli estremi della trave:

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} u_{2A} \\ \phi_A \\ u_{2B} \\ \phi_B \end{pmatrix} \quad (18)$$

ed il vettore \mathbf{F} delle forze agenti agli estremi:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_A \\ \mathcal{M}_A \\ F_B \\ \mathcal{M}_B \end{pmatrix} \quad (19)$$

Potra' scriversi la relazione lineare

$$\begin{pmatrix} F_A \\ \mathcal{M}_A \\ F_B \\ \mathcal{M}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2A} \\ \phi_A \\ u_{2B} \\ \phi_B \end{pmatrix} \quad (20)$$

che lega ciascuna forza ai quattro possibili spostamenti. La matrice \mathbf{k} e' la richiesta matrice di rigidezza, e per esplicitarla occorre eseguire i seguenti passi:

1. ricavare la linea elastica di una trave soggetta ai cedimenti anelastici agli estremi:

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = 0) &= u_{2A} \\ u_2'(x_3 = 0) &= -\phi_A \\ u_2(x_3 = L) &= u_{2B} \\ u_2'(x_3 = L) &= -\phi_B \end{aligned} \quad (21)$$

2. dedurre la distribuzione di momenti e tagli:

$$\begin{aligned} M(x_3) &= -EI u_2''(x_3) \\ T(x_3) &= -EI u_2'''(x_3) \end{aligned} \quad (22)$$

3. dedurre le forze nodali :

$$\begin{aligned} F_A &= -T(0) \\ \mathcal{M}_A &= -M(0) \\ F_B &= T(L) \\ \mathcal{M}_B &= M(L) \end{aligned} \quad (23)$$

■ Passo 1 e 2 - Deduzione della linea elastica

In assenza di forze distribuite, la deformata della trave sara' esprimibile come una equazione cubica:

$$u_2(x_3) = c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \quad (24)$$

e le quattro costanti di integrazione si determinano soddisfacendo le condizioni (19). Si avra' infine:

$$u_2(x_3) = N_1(x_3) v_A + N_2(x_3) \phi_A + N_3(x_3) v_B + N_4(x_3) \phi_B \quad (25)$$

avendo definito le quattro *funzioni di forma* :

$$\begin{aligned} N_1(x_3) &= 1 - 3 \frac{x_3^2}{L^2} + 2 \frac{x_3^3}{L^3} \\ N_2(x_3) &= -x_3 + 2 \frac{x_3^2}{L} - \frac{x_3^3}{L^2} \\ N_3(x_3) &= 3 \frac{x_3^2}{L^2} - 2 \frac{x_3^3}{L^3} \\ N_4(x_3) &= \frac{x_3^2}{L} - \frac{x_3^3}{L^2} \end{aligned} \quad (26)$$

I momenti ed i tagli sono allora forniti da :

$$M(x_3) = -EI \left(N_1''(x_3) v_A + N_2''(x_3) \phi_A + N_3''(x_3) v_B + N_4''(x_3) \phi_B \right) \quad (27)$$

$$\begin{aligned} T(x_3) &= \\ &= -EI \left(N_1'''(x_3) v_A + N_2'''(x_3) \phi_A + N_3'''(x_3) v_B + N_4'''(x_3) \phi_B \right) \end{aligned} \quad (28)$$

Passo 3 - Deduzione delle forze nodali e della matrice di rigidezza

In base alle (21) si ottiene :

$$\begin{aligned}
 F_A &= EI \left(N_1''''(0) v_A + N_2''''(0) \phi_A + N_3''''(0) v_B + N_4''''(0) \phi_B \right) \\
 \mathcal{M}_A &= EI \left(N_1'''(0) v_A + N_2'''(0) \phi_A + N_3'''(0) v_B + N_4'''(0) \phi_B \right) \\
 F_B &= -EI \left(N_1''''(L) v_A + N_2''''(L) \phi_A + N_3''''(L) v_B + N_4''''(L) \phi_B \right) \\
 \mathcal{M}_B &= -EI \left(N_1'''(L) v_A + N_2'''(L) \phi_A + N_3'''(L) v_B + N_4'''(L) \phi_B \right)
 \end{aligned} \quad (29)$$

e quindi la matrice di rigidezza si scrivera', in base alla (18):

$$\mathbf{k} = EI \begin{pmatrix} N_1''''(0) & N_2''''(0) & N_3''''(0) & N_4''''(0) \\ N_1'''(0) & N_2'''(0) & N_3'''(0) & N_4'''(0) \\ -N_1''''(L) & -N_2''''(L) & -N_3''''(L) & -N_4''''(L) \\ -N_1'''(L) & -N_2'''(L) & -N_3'''(L) & -N_4'''(L) \end{pmatrix} \quad (30)$$

oppure, esplicitando :

$$\mathbf{k} = EI \begin{pmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{pmatrix} \quad (31)$$

Si noti la simmetria della matrice, dovuta ai teoremi di reciprocita'

Esempio n.3 - I corollari di Mohr in presenza di distorsioni

Si consideri la trave di Figura 4, soggetta ad una variazione termica ΔT alla Navier lungo la campata di destra. Si vogliono lo spostamento e la rotazione relativa tra le due facce della cerniera in B.

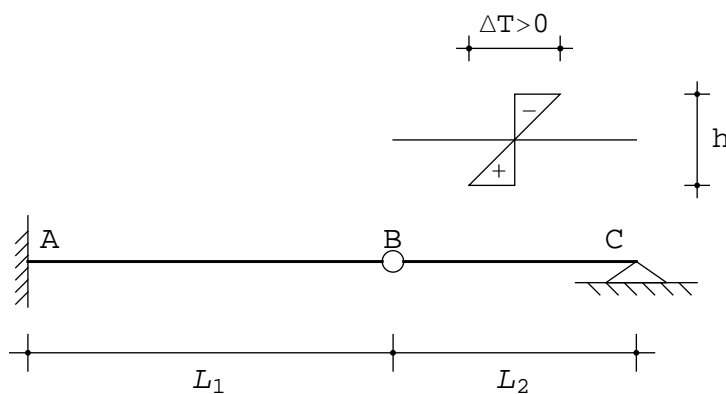


Figura 4 - Una trave isostatica soggetta a variazione termica

Si osservi, preliminarmente, che per applicare i corollari di Mohr in presenza della distorsione μ occorre utilizzare l'espressione (5), e quindi sfruttare l'analogia tra le due formule:

$$\frac{d^2 M}{dx_3^2} = -q \quad (32)$$

$$\frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = -\frac{M}{EI} + \mu \quad (33)$$

Il carico fittizio diviene quindi:

$$q^* = \frac{M}{EI} - \mu = \frac{M}{EI} + \frac{\alpha\Delta T}{h} \quad (34)$$

ossia, nella fattispecie, si riduce ad una stesa di carico uniforme sulla campata di destra, di intensita' pari a $-\mu$. Si ha cosi' la trave ausiliaria di Figura 5, soggetta al carico fittizio uniforme di Figura.

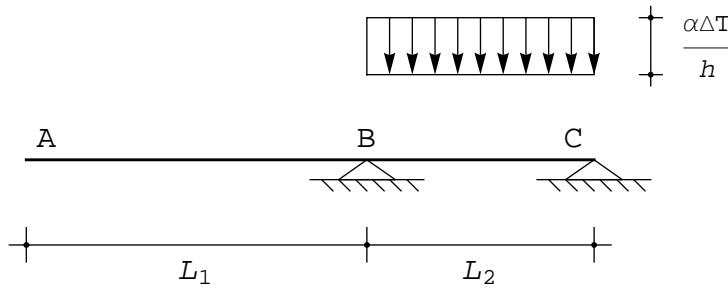


Figura 5 - La trave ausiliaria per la trave di Figura 4

Su di essa e' immediato calcolare la reazione dell'appoggio in B, ed il momento corrispondente:

$$R_B^* = -q^* \frac{L_2}{2} = -\frac{\alpha\Delta T}{2h} L_2 \quad (35)$$

$$M_B^* = 0 \quad (36)$$

da cui :

$$\Delta\phi_B = -\frac{\alpha\Delta T}{2h} L_2 \quad (37)$$

$$u_{2B} = 0 \quad (38)$$

Esempio n.4 - La linea elastica in presenza di distorsioni

Si voglia risolvere lo stesso esempio precedente con il metodo della linea elastica. A tal fine, si premette che in presenza di distorsioni μ di tipo flessionale si avra'

$$M = -EI u_2'' + EI \mu \quad (39)$$

e quindi, derivando due volte, ed utilizzando la legge:

$$M'' = -p \quad (40)$$

si giunge all'equazione differenziale del quarto ordine in presenza di distorsioni μ :

$$EI u_2'''' = \frac{p}{EI} + \mu'' \quad (41)$$

Infine, continuando a valere la legge di equilibrio che impone al taglio di essere pari alla derivata del momento, potra' scriversi:

$$T = -EI u_2'''' + EI \mu' \quad (42)$$

Cio' premesso, per la trave di Figura 4 si ha una distorsione μ costante, e quindi potra' scriversi:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\ v_2(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 + d_2 x_3^2 + d_3 x_3^3 \end{aligned} \quad (43)$$

rispettivamente per la prima e la seconda campata. Le otto condizioni ai limiti, che permettono il calcolo delle otto costanti di integrazione, sono:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2'(0) &= 0 \\ u_2(L_1) &= v_2(0) \\ u_2''(L_1) &= 0 \\ -EI v_2''(0) + EI \mu &= 0 \\ u_2'''(L_1) &= v_2'''(0) \\ v_2(L_2) &= 0 \\ -EI v_2''(L) + EI \mu &= 0 \end{aligned} \quad (44)$$

e risolvendo :

$$\begin{aligned} c_0 &= c_1 = c_2 = c_3 = 0 \\ d_0 &= 0 \\ d_1 &= \frac{\alpha \Delta T L_2}{2h} \\ d_2 &= -\frac{\alpha \Delta T}{2h} \\ d_3 &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

La prima linea elastica e' quindi identicamente nulla, la seconda si scrive:

$$v_2(x_3) = \frac{\alpha \Delta T L_2}{2h} x_3 - \frac{\alpha \Delta T}{2h} x_3^2 \quad (46)$$

da cui subito :

$$\phi^{(2)}(x_3) = -\frac{\alpha \Delta T L_2}{2h} + \frac{\alpha \Delta T}{h} x_3 \quad (47)$$

$$M^{(2)}(x_3) = -EI u_2'' + EI \mu = EI \frac{\alpha \Delta T}{h} - EI \frac{\alpha \Delta T}{h} = 0 \quad (48)$$

$$T^{(2)}(x_3) = 0 \quad (49)$$

confermando i risultati dell'esercizio precedente.

Esempio n.5 - La trave continua in presenza di variazioni termiche

Si consideri la trave continua a quattro luci uguali di Figura 6, e si supponga che la seconda e quarta luce siano soggette ad una variazione termica flessionale:

$$\mu = -\alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (50)$$

Si vogliono dedurre i diagrammi di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli.

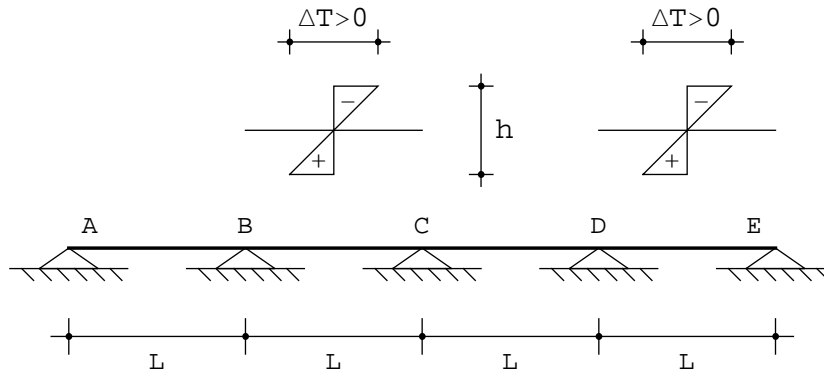


Figura 6 - Una trave continua soggetta a variazione termica su due campate

Poiché la struttura è (tre volte) iperstatica, ed è richiesto lo studio completo del suo comportamento statico-cinematico, conviene affrontare la struttura con il metodo della scrittura di opportune linee elastiche. Sarà quindi necessario risolvere le quattro equazioni differenziali del quarto ordine:

$$\begin{aligned}
 EI u_2'''' &= 0 \\
 EI v_2'''' &= \mu'' \\
 EI w_2'''' &= 0 \\
 EI z_2'''' &= \mu''
 \end{aligned}
 \tag{51}$$

valide da A a B, da B a C, da C a D, e da D ad E, rispettivamente. Poiché si assume che la variazione termica sia costante, si hanno le soluzioni cubiche:

$$\begin{aligned}
 u_2(x_3) &= a_1 + a_2 x_3 + a_3 x_3^2 + a_4 x_3^3 \\
 v_2(x_3) &= b_1 + b_2 x_3 + b_3 x_3^2 + b_4 x_3^3 \\
 w_2(x_3) &= c_1 + c_2 x_3 + c_3 x_3^2 + c_4 x_3^3 \\
 z_2(x_3) &= d_1 + d_2 x_3 + d_3 x_3^2 + d_4 x_3^3
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

Le sedici costanti di integrazione si calcolano imponendo le condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned}
 u_2(0) &= 0 \\
 -u_2'(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{53}$$

nell'appoggio in A,

$$\begin{aligned}
 u_2(L) &= 0 \\
 v_2(0) &= 0 \\
 u_2'(L) &= v_2'(0) \\
 -u_2''(L) &= -v_2''(0) + \mu
 \end{aligned}
 \tag{54}$$

nell'appoggio intermedio B,

$$\begin{aligned}
 v_2(L) &= 0 \\
 w_2(0) &= 0 \\
 v_2'(L) &= w_2'(0) \\
 -v_2''(L) + \mu &= -w_2''(0)
 \end{aligned}
 \tag{55}$$

nell'appoggio intermedio C,

$$\begin{aligned}
w_2(L) &= 0 \\
z_2(0) &= 0 \\
w_2'(L) &= z_2'(0) \\
-w_2''(L) &= -z_2''(0) + \mu
\end{aligned} \tag{56}$$

nell' appoggio intermedio D, ed infine:

$$\begin{aligned}
z_2(L) &= 0 \\
-EI z_2''(L) + \mu &= 0
\end{aligned} \tag{57}$$

nell' appoggio E, all' estrema destra.

Il sistema di sedici equazioni si scrive allora :

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0 \\
2 a_3 &= 0 \\
a_1 + L a_2 + L^2 a_3 + L^3 a_4 &= 0 \\
b_1 &= 0 \\
a_2 + 2 L a_3 + 3 L^2 a_4 - b_2 &= 0 \\
\frac{\alpha \Delta T}{h} - (2 a_3 + 6 L a_4) + 2 b_3 &= 0 \\
b_1 + L b_2 + L^2 b_3 + L^3 b_4 &= 0 \\
c_1 &= 0 \\
b_2 + 2 L b_3 + 3 L^2 b_4 - c_2 &= 0 \\
-\frac{\alpha \Delta T}{h} - (2 b_3 + 6 L b_4) + 2 c_3 &= 0 \\
c_1 + L c_2 + L^2 c_3 + L^3 c_4 &= 0 \\
d_1 &= 0 \\
c_2 + 2 L c_3 + 3 L^2 c_4 - d_2 &= 0 \\
\frac{\alpha \Delta T}{h} - (2 c_3 + 6 L c_4) + 2 d_3 &= 0 \\
d_1 + L d_2 + L^2 d_3 + L^3 d_4 &= 0 \\
-\frac{\alpha \Delta T}{h} - (2 d_3 + 6 L d_4) &= 0
\end{aligned} \tag{58}$$

e, semplificando ed ordinando si ottiene il sistema di undici equazioni in undici incognite, caratterizzato da una matrice dei coefficienti a banda molto stretta:

$$\begin{pmatrix}
 1 & L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 3L^2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 6L & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & L & L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & 6L & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L & L^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6L & 0 & -2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L & L^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6L
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 a_2 \\
 a_4 \\
 b_2 \\
 b_3 \\
 b_4 \\
 c_2 \\
 c_3 \\
 c_4 \\
 d_2 \\
 d_3 \\
 d_4
 \end{pmatrix}
 =$$

(59)

$$\frac{\alpha \Delta T}{h}
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 1 \\
 0 \\
 0 \\
 -1 \\
 0 \\
 0 \\
 1 \\
 0 \\
 -1
 \end{pmatrix}$$

La soluzione e' facilmente ottenibile come:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= b_1 = c_1 = d_1 = 0 \\
 a_2 &= -\frac{3L\alpha\Delta T}{28h}; \quad a_3 = 0; \quad a_4 = \frac{3\alpha\Delta T}{28hL} \\
 b_2 &= \frac{3L\alpha\Delta T}{14h}; \quad b_3 = -\frac{5\alpha\Delta T}{28h}; \quad b_4 = -\frac{\alpha\Delta T}{28hL} \\
 c_2 &= -\frac{L\alpha\Delta T}{4h}; \quad c_3 = \frac{3\alpha\Delta T}{14h}; \quad c_4 = \frac{\alpha\Delta T}{28hL} \\
 d_2 &= \frac{2L\alpha\Delta T}{7h}; \quad d_3 = -\frac{5\alpha\Delta T}{28h}; \quad d_4 = -\frac{3\alpha\Delta T}{28hL}
 \end{aligned}$$

(60)

e quindi infine gli spostamenti sono ottenibili come :

$$u_2(x_3) = \frac{3}{28} \frac{x_3(x_3^2 - L^2)}{L} \alpha \frac{\Delta T}{h}$$

(61)

$$v_2(x_3) = \frac{x_3(6L^2 - 5Lx_3 - x_3^2)}{28L} \alpha \frac{\Delta T}{h}$$

(62)

$$w_2(x_3) = \frac{x_3(-7L^2 + 6Lx_3 + x_3^2)}{28L} \alpha \frac{\Delta T}{h}$$

(63)

$$z_2(x_3) = \frac{x_3(8L^2 - 5Lx_3 - 3x_3^2)}{28L} \alpha \frac{\Delta T}{h}$$

(64)

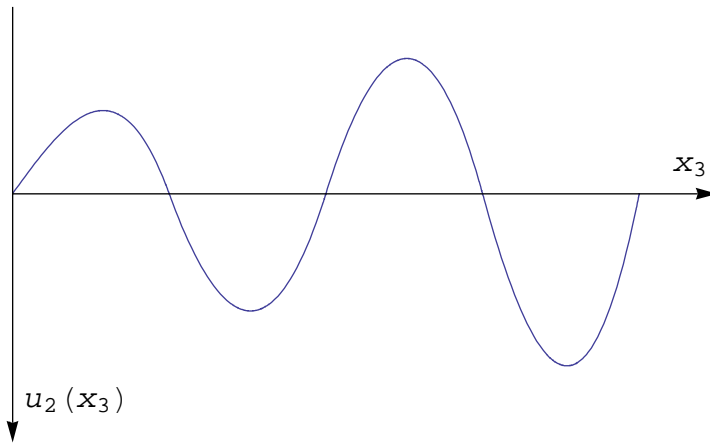


Figura 7 - Il diagramma degli spostamenti per la trave continua

Le rotazioni si ottengono immediatamente, tramite derivazione :

$$\phi^{(1)}(x_3) = -\frac{3}{28} \frac{(3x_3^2 - L^2)}{L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (65)$$

$$\phi^{(2)}(x_3) = -\frac{(6L^2 - 10Lx_3 - 3x_3^2)}{28L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (66)$$

$$\phi^{(3)}(x_3) = -\frac{(-7L^2 + 12Lx_3 + 3x_3^2)}{28L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (67)$$

$$\phi^{(4)}(x_3) = -\frac{(8L^2 - 10Lx_3 - 9x_3^2)}{28L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (68)$$

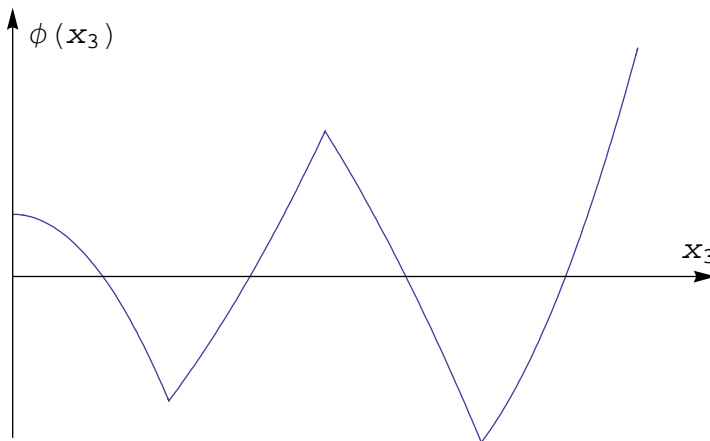


Figura 8 - Il diagramma delle rotazioni per la trave continua

mentre per ottenere i momenti flettenti occorre utilizzare la (39) nella seconda e quarta campata

$$M^{(1)}(x_3) = -\frac{9EI}{14} \frac{x_3}{L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (69)$$

$$M^{(2)}(x_3) = EI \frac{5L + 3x_3}{14L} \alpha \frac{\Delta T}{h} - EI \alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (70)$$

$$M^{(3)}(x_3) = -EI \frac{(6L + 3x_3)}{14L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (71)$$

$$M^{(4)}(x_3) = EI \frac{(5L + 9x_3)}{14L} \alpha \frac{\Delta T}{h} - EI \alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (72)$$

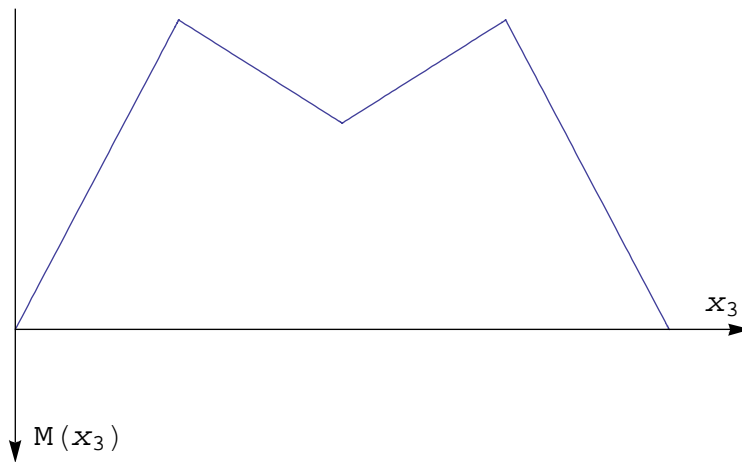


Figura 9 - Il diagramma dei momenti per la trave continua

I tagli, infine, sono costanti su ciascuna luce, e valgono :

$$T^{(1)}(x_3) = -\frac{9EI}{14L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (73)$$

$$T^{(2)}(x_3) = \frac{3EI}{14L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (74)$$

$$T^{(3)}(x_3) = -\frac{3EI}{14L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (75)$$

$$T^{(4)}(x_3) = \frac{9EI}{14L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (76)$$

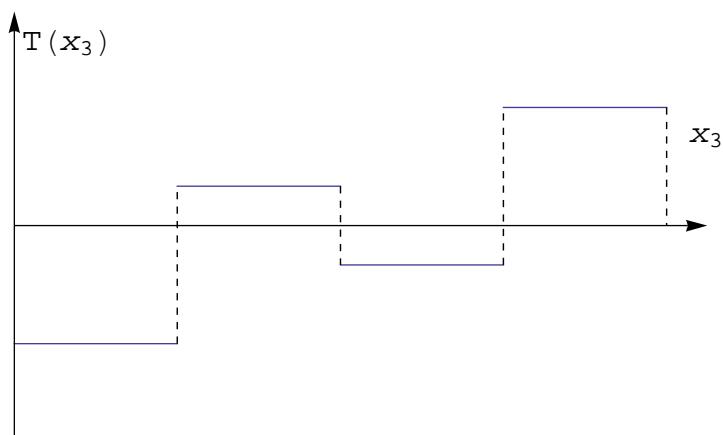


Figura 10 - Il diagramma dei tagli per la trave continua

Esempio n. 6 - Il principio dei lavori virtuali in presenza di variazioni termiche

Si consideri la trave di Figura 11, soggetta ad una variazione termica alla Navier lungo il tratto terminale di destra. Essa e' manifestamente una volta iperstatica, si sceglie la mensola quale struttura isostatica equivalente, e si applica il principio dei lavori virtuali al fine di esplicitare la condizione di congruenza:

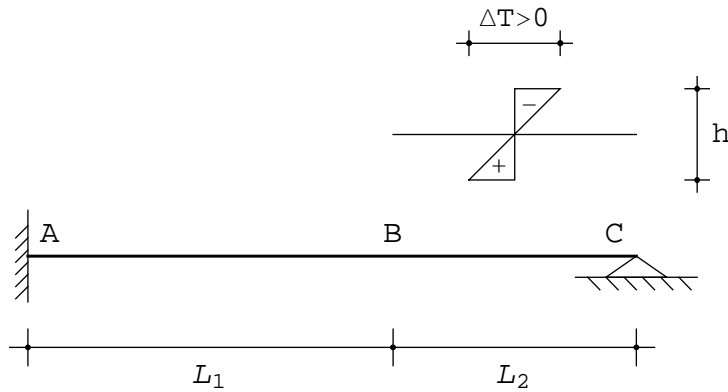


Figura 11 - Una trave iperstatica soggetta a variazione termica

$$u_{2C} = 0 \quad (77)$$

A tal fine, si ricorda che in presenza di distorsioni flessionali μ , il p.l.v. si scrive (limitandosi ai soli effetti flessionali):

$$\int_s M^{(1)} \frac{M}{EI} ds - \int_s M^{(1)} \mu ds = 0 \quad (78)$$

leggendo, come usuale, gli spostamenti sul sistema reale (o meglio, sul sistema isostatico equivalente di Figura 12), e le forze sul sistema virtuale di Figura 13.

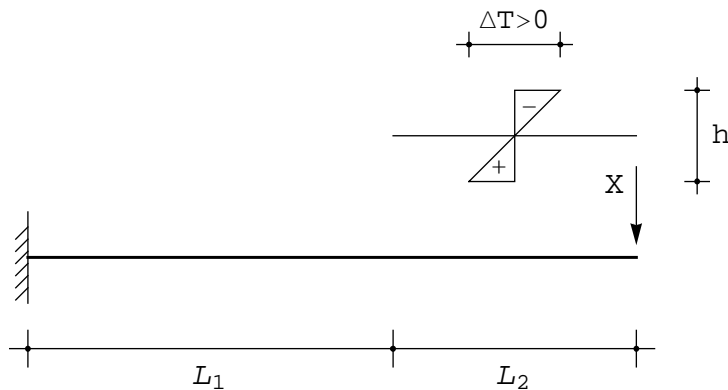


Figura 12 - Il S.I.E. per la trave di Figura 11: su di esso si calcola il momento M

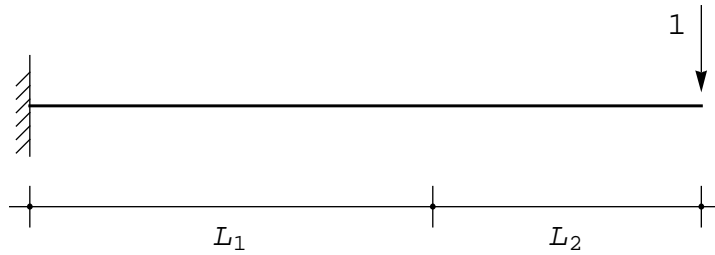


Figura 13 - Il sistema di forze virtuali per la trave di Figura 11: su di esso si calcola il momento $M^{(1)}$

Il calcolo del momento M sul sistema isostatico equivalente è immediato, in quanto la variazione termica non provoca caratteristiche, e quindi M risulta dovuto alla sola incognita X :

$$M(x_3) = (L_1 + L_2 - x_3) X \quad (79)$$

mentre il momento M' , in modo del tutto analogo, è fornito da :

$$M'(x_3) = (L_1 + L_2 - x_3) \quad (80)$$

La (78) si scriverà allora :

$$\frac{X}{EI} \int_0^{L_1+L_2} (L_1 + L_2 - x_3)^2 dx_3 + \frac{\alpha \Delta T}{h} \int_{L_1}^{L_1+L_2} (L_1 + L_2 - x_3) dx_3 = 0 \quad (81)$$

da cui subito:

$$X = - \frac{3 EI}{2} \frac{\alpha \Delta T}{h} \frac{L_2^2}{(L_1 + L_2)^3} \quad (82)$$

Se la variazione termica si estende sulla mezziera della trave, si avrà $L_1 = L_2 = L/2$, e:

$$X = - \frac{3 EI \alpha \Delta T}{8 h L} \quad (83)$$

Esempio n .7

Si consideri il telaio di Figura 14, costituito da due tratti incernierati al suolo e collegati tra loro da una cerniera. Esiste inoltre un pendolo che collega i due tratti nel modo illustrato. Si vuol conoscere lo sforzo normale nel pendolo, causato da una variazione termica agente sulla semiluce di destra del traverso.

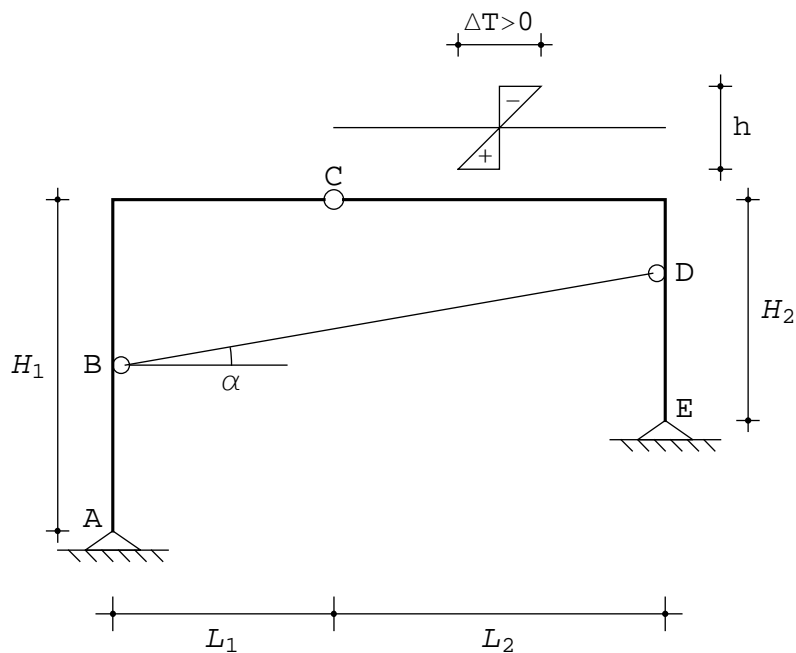


Figura 14 - Un telaio a tre cerniere con pendolo interno

La struttura e' una volta iperstatica, e quale incognita iperstatica X conviene assumere proprio la reazione nel pendolo. Il sistema isostatico equivalente e' quindi quello di Figura 15, ed e' assunto come sistema su cui calcolare gli spostamenti.

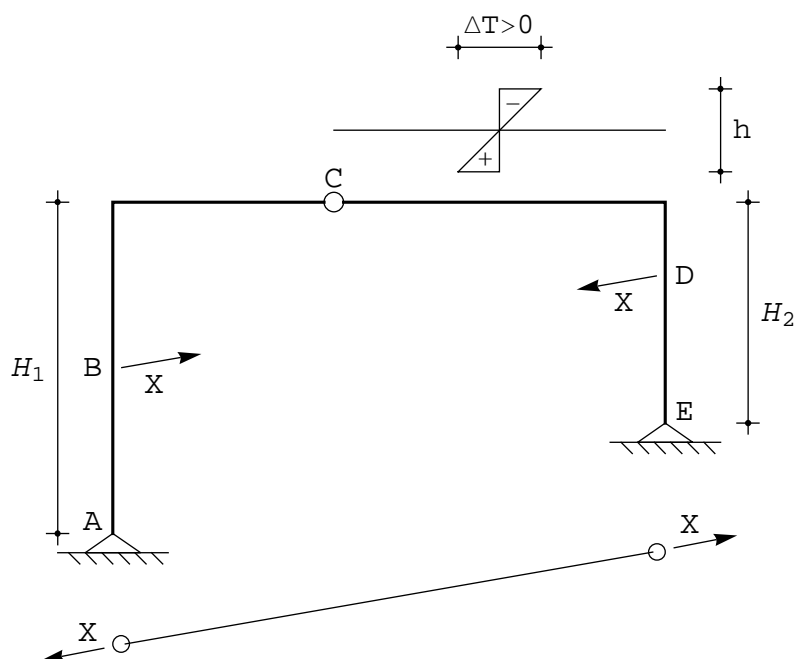


Figura 15 - Il S.I.E. al telaio di Figura 14

Il sistema di forze virtuali, invece, sara' invece quello di Figura 16, ossia e' costituito da due forze unitarie, uguali e contrarie, agenti in B e D secondo la retta del pendolo soppresso.

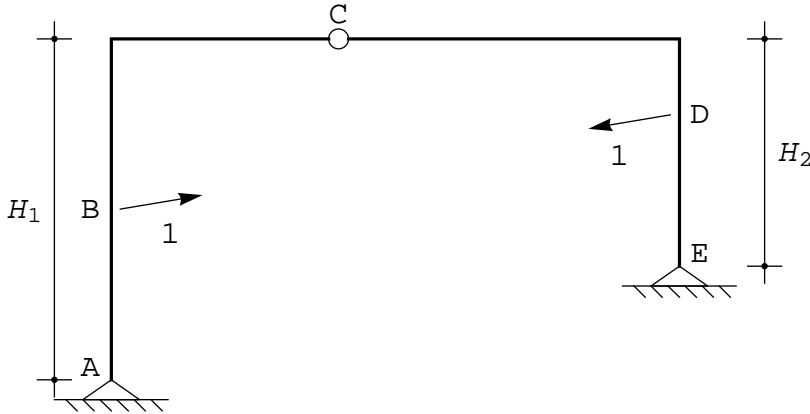


Figura 16 - Il sistema di forze virtuali per l'esercizio di Figura 14

Cio' permette di scrivere il principio dei lavori virtuali come:

$$\int_s M^{(1)} \frac{M}{EI} ds - \int_s M^{(1)} \mu ds = -1 \frac{X l_{BD}}{EA_{BD}} \quad (84)$$

Il primo membro di questa uguaglianza rappresenta il lavoro interno, $M^{(1)}$ e' il diagramma dei momenti flettenti calcolato sul sistema virtuale, mentre M e' il diagramma del momento calcolato sul sistema isostatico equivalente. Per il principio di sovrapposizione degli effetti si puo' scrivere:

$$M = M^{(0)} + X M^{(1)} \quad (85)$$

ed $M^{(0)}$ risulta identicamente nullo, in quanto la variazione termica non induce caratteristiche sulla struttura isostatica.

Il secondo membro della (84) e' il lavoro delle due forze virtuali (unitarie) per effetto dello spostamento relativo effettivo tra i punti B e D della struttura isostatica equivalente. Se l_{BD} denota la lunghezza del pendolo, ed A_{BD} e' l'area del pendolo, tale spostamento relativo e' pari a:

$$\Delta l_{BD} = \frac{X l_{BD}}{EA_{BD}} \quad (86)$$

Tale spostamento e' positivo se di allontanamento, mentre le forze virtuali di Figura 15 tendono a far avvicinare i due punti B e D, e quindi il lavoro risulta negativo.

La (84) puo' quindi scriversi:

$$X \left(\frac{1}{EI} \int_s M^{(1)2} ds + \frac{l_{BD}}{EA_{BD}} \right) = - \frac{\alpha \Delta T}{h} \int_s M^{(1)} ds \quad (87)$$

da cui e' possibile ricavare l'incognita X, non appena dedotto il momento $M^{(1)}$.

Figure