
14 - Le travi soggette a momento flettente e taglio

■ [A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 7 febbraio 2013]

In questa Esercitazione si illustra un metodo di calcolo onnicomprensivo, in grado di fornire abbassamenti, rotazioni, momenti e tagli per una qualsiasi trave ad asse rettilineo soggetta a momento flettente e taglio. Tale metodo sfrutta contemporaneamente le equazioni di equilibrio, di congruenza e costitutive, giungendo ad una equazione differenziale del quarto ordine, concettualmente analoga alle equazioni dell'equilibrio elastico. Dopo aver dedotto l'equazione nel caso più semplice, ossia per una trave a sezione costante soggetta a solo carico trasversale, si risolve l'equazione e si illustrano alcuni casi banali di trave ad una sola campata soggetta a vincoli perfetti.

La metodologia illustrata viene poi generalizzata per tener conto della presenza di vincoli intermedi forze e coppie concentrate, distorsioni concentrate di tipo tagliante e di tipo flessionale, offrendo una panoramica completa delle possibili condizioni ai limiti.

L'equazione differenziale viene poi generalizzata, per tener conto di due carichi "inusuali", ossia le coppie distribuite e le distorsioni di tipo flessionale μ (variazioni termiche alla Navier).

Infine, si descrivono alcuni casi di travi a sezione variabile in cui la soluzione è ottenibile in forma chiusa.

Relazioni fondamentali

Si consideri una trave rettilinea soggetta ai carichi trasversali $p(x_3)$. Per essa, si hanno le seguenti equazioni:

Equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dx_3} &= -p \\ \frac{dM}{dx_3} &= T\end{aligned}\tag{1}$$

Equazioni di congruenza :

$$\phi = -\frac{du_3}{dx_3}\tag{2}$$

Equazioni costitutive (legge di Hooke):

$$M = EI \frac{d\phi}{dx_3}\tag{3}$$

Inserendo la (2) nella (3) si giunge alla legge che collega il momento alla derivata seconda dell'abbassamento:

$$M = -EI u_3'''\tag{4}$$

dove l'apice indica derivazione rispetto ad x_3 . Inoltre, derivando la seconda delle (1), inserendola nella prima, ed utilizzando la (4), si giunge all'equazione differenziale del quarto ordine, che regge il problema della trave in presenza di carichi trasversali:

$$(EI u_2'')''' = p \quad (5)$$

Se la rigidezza flessionale EI è costante, la (5) si riduce a:

$$EI u_2'''' = p \quad (6)$$

con soluzione :

$$u_2 = C_0 + C_1 x_3 + C_2 x_3^2 + C_3 x_3^3 + I_p \quad (7)$$

e l'integrale particolare I_p dipende dal carico $t(x_3)$ applicato. Le quattro costanti di integrazione C_i si ottengono imponendo le condizioni ai limiti agli estremi. In ciascun estremo, infatti, si può imporre:

- che l'abbassamento e la rotazione siano nulli (incastro). In tal caso sia momento che taglio potranno essere presenti

- che l'abbassamento sia nullo e la rotazione sia permessa (appoggio). In tal caso il momento sarà nullo

- che l'abbassamento sia permesso e la rotazione sia nulla (bipendolo). In tal caso il taglio sarà nullo

- che l'abbassamento e la rotazione siano permessi (estremo libero). In tal caso il momento ed il taglio saranno nulli

■ L' approccio energetico

L' energia potenziale connessa ad una trave di luce L , soggetta al carico assiale $p(x_3)$, può scriversi come:

$$E_t = \frac{EI}{2} \int_0^L u_2''^2 dx_3 - \int_0^L p u_2 dx_3 = E_t(u_2, u_2'') \quad (8)$$

Si noti che per semplicità si è già ipotizzato che la rigidezza flessionale EI sia costante. La variazione δE_t si calcola come:

$$\begin{aligned} \delta E_t &= E_t(u_2 + \delta u_2, u_2'' + \delta u_2'') - E_t(u_2, u_2'') = \\ &= \frac{EI}{2} \int_0^L (u_2'' + \delta u_2'')^2 dx_3 - \\ &= \int_0^L p (u_2 + \delta u_2) dx_3 - \frac{EI}{2} \int_0^L u_2''^2 dx_3 + \int_0^L p u_2 dx_3 \end{aligned} \quad (9)$$

e svolgendo i quadrati e semplificando :

$$\delta E_t = EI \int_0^L u_2'' \delta u_2'' dx_3 - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 + \frac{EI}{2} \int_0^L \delta u_2''^2 dx_3 \quad (10)$$

Il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale impone l'annullarsi della parte lineare della variazione, e quindi dovrà essere:

$$\delta_1 E_t = EI \int_0^L u_2'' \delta u_2'' dx_3 - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 = 0 \quad (11)$$

Integrando due volte per parti il primo integrale si può scrivere:

$$[EI u_2'' \delta u_2']_0^L - [EI u_2''' \delta u_2]_0^L + EI \int_0^L u_2'''' \delta u_2 dx_3 - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 = 0 \quad (12)$$

Dovranno separatamente annullarsi l'integrale ed i termini finiti; per l'arbitrarietà di δu_2 si ritrova quindi la

(6), mentre in ciascuno degli estremi potrà essere nullo lo spostamento u_2 oppure lo sforzo di taglio $-Elu_2'''$, ed analogamente potrà annullarsi la rotazione, oppure il momento flettente $-Elu_2''$.

Le travi ad una campata

Si intenderà per "trave ad una campata" una qualsiasi trave per cui sia possibile applicare la metodologia illustrata, ossia - in realtà - una qualsiasi trave i cui spostamenti siano funzioni continue e derivabili con continuità almeno fino alla derivata quarta. Rientrano quindi in questa categoria le travi soggette a carico distribuito lungo tutta la luce, ma non quelle caricate parzialmente (discontinuità nella derivata quarta), quelle a sezione costante, ma non quelle a sezione variabile con discontinuità, quelle caricate con carichi e coppie concentrate negli estremi, ma non in una ascissa intermedia (discontinuità nella derivata seconda o terza). Sono inoltre escluse le travi con vincoli intermedi, sia esterni (discontinuità nelle derivate seconde o terze) che interni (discontinuità nell'abbassamento o nella sua derivata prima), e le travi soggette a distorsioni concentrate ad ascisse intermedie (discontinuità nell'abbassamento o nella sua derivata prima).

Un catalogo esteso di travi ad una sola campata è fornito in due lezioni di teoria, dedicate rispettivamente al carico uniformemente distribuito ed ai possibili carichi concentrati negli estremi, sicchè sull'argomento resta poco da aggiungere. Tuttavia, si consideri l'ulteriore esempio di Figura 1, in cui una trave doppiamente incastrata è soggetta ad un carico parabolico di valore p_0 agli estremi, e nullo in mezzeria.

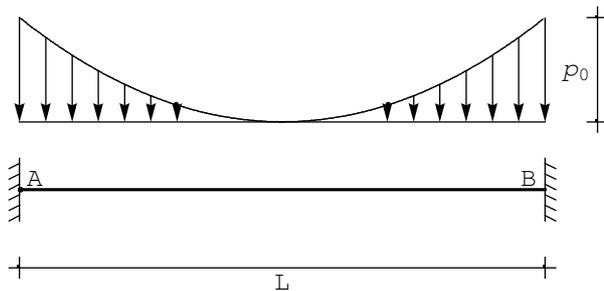


Figura 1 - Una trave doppiamente incastrata soggetta a carico parabolico

Per ottenere l'integrale particolare occorre quindi identificare la legge analitica di variazione del carico. Assumendo una legge di variazione parabolica si ha:

$$p(x_3) = a + b x_3 + c x_3^2 \quad (13)$$

ed imponendo il rispetto dei tre valori agli estremi ed in mezzeria si ha :

$$\begin{aligned} p(x_3 = 0) &= a = p_0 \\ p\left(x_3 = \frac{L}{2}\right) &= a + b \frac{L}{2} + c \frac{L^2}{4} = 0 \\ p(x_3 = L) &= a + b L + c L^2 = p_0 \end{aligned} \quad (14)$$

Risolviendo il sistema di tre equazioni si ottiene infine:

$$p(x_3) = p_0 \left(1 - 4 \frac{x_3}{L} + 4 \frac{x_3^2}{L^2} \right) \quad (15)$$

e quindi la (6) si scrive :

$$EI u_2'''' = p_0 \left(1 - 4 \frac{x_3}{L} + 4 \frac{x_3^2}{L^2} \right) \quad (16)$$

con soluzione ottenibile attraverso integrazioni successive:

$$u_2 = C_0 + C_1 x_3 + C_2 x_3^2 + C_3 x_3^3 + \frac{p_0}{EI} \left(\frac{x_3^4}{24} - \frac{1}{30} \frac{x_3^5}{L} + \frac{1}{90} \frac{x_3^6}{L^2} \right) \quad (17)$$

Le costanti di integrazione si ottengono imponendo le quattro condizioni ai limiti, in cui gli incastrati in *A* e *B* vietano sia gli abbassamenti che le rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = 0) &= C_0 = 0 \\ u_2'(x_3 = 0) &= C_1 = 0 \\ u_2(x_3 = L) &= C_0 + C_1 L + C_2 L^2 + C_3 L^3 + \frac{7}{360} \frac{p_0 L^4}{EI} = 0 \\ u_2'(x_3 = L) &= C_1 + 2 C_2 L + 3 C_3 L^2 + \frac{p_0 L^3}{15 EI} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

con soluzione :

$$\begin{aligned} C_0 &= C_1 = 0 \\ C_2 &= \frac{p_0 L^2}{120 EI} \\ C_3 &= - \frac{p_0 L}{36 EI} \end{aligned} \quad (19)$$

Gli spostamenti sono quindi forniti dal polinomio di ordine sei :

$$u_2(x_3) = \frac{p_0}{EI} \left(\frac{L^2 x_3^2}{120} - \frac{L x_3^3}{36} + \frac{x_3^4}{24} - \frac{x_3^5}{30 L} + \frac{x_3^6}{90 L^2} \right) \quad (20)$$

e per successive derivazioni si ottengono infine le rotazioni, i momenti ed i tagli :

$$\phi(x_3) = \frac{p_0}{EI} \left(- \frac{L^2 x_3}{60} + \frac{L x_3^2}{12} - \frac{x_3^3}{6} + \frac{x_3^4}{6 L} - \frac{x_3^5}{15 L^2} \right) \quad (21)$$

$$M(x_3) = p_0 \left(- \frac{L^2}{60} + \frac{L x_3}{6} - \frac{x_3^2}{2} + \frac{2 x_3^3}{3 L} - \frac{x_3^4}{3 L^2} \right) \quad (22)$$

$$T(x_3) = p_0 \left(\frac{L}{6} - x_3 + \frac{2 x_3^2}{L} - \frac{4 x_3^3}{3 L^2} \right) \quad (23)$$

Il diagramma del taglio si presenta come in Figura 2: funzione cubica, andamento decrescente, tangenza orizzontale in mezzzeria, laddove il carico si annulla, funzione antisimmetrica rispetto alla mezzzeria, in quanto la struttura è simmetrica e simmetricamente caricata rispetto alla stessa mezzzeria (vedi la lezione sulle proprietà di simmetria ed antisimmetria).

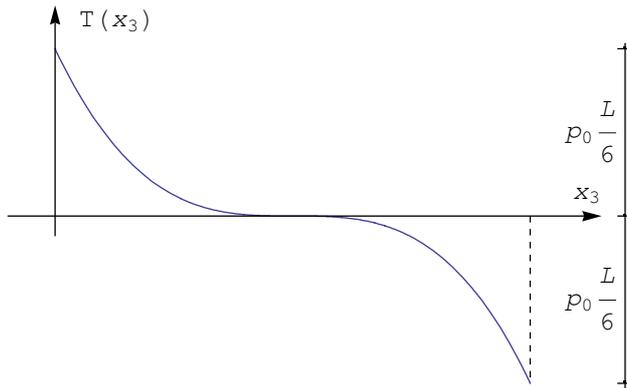


Figura 2 - Il diagramma del taglio per la trave di Figura 1

Il diagramma del momento è riportato in Figura 3: è una funzione quartica, simmetrica rispetto alla mezzera, con valore massimo sulla mezzera stessa, laddove il taglio si annulla. Inoltre, l'andamento crescente nella prima semiluce, laddove il taglio è positivo, decrescente nella seconda semiluce, dove il taglio diviene negativo.

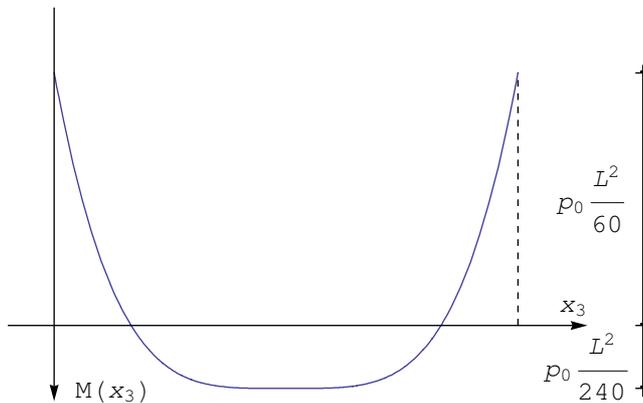


Figura 3 - Il diagramma del momento per la trave di Figura 1

Come illustrato in Figura 4, le rotazioni dovranno annullarsi agli estremi, dove vi sono gli incastri, ed in mezzera, per ragioni di simmetria. Inoltre, laddove il momento è negativo le rotazioni decresceranno, mentre nella zona centrale, dove il momento è positivo, cresceranno. I valori minimi e massimi si raggiungono laddove i momenti si annullano.

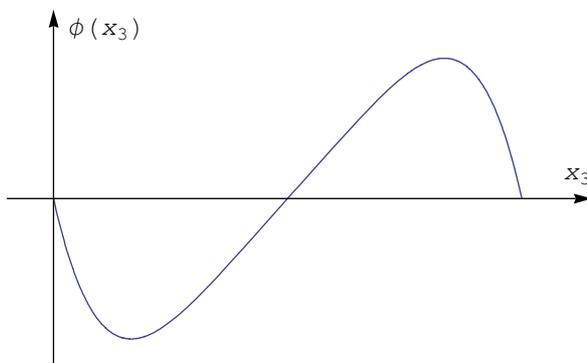


Figura 4 - Il diagramma delle rotazioni per la trave di Figura 1

Infine, gli abbassamenti si presentano come in Figura 5, con un aspetto molto simile al corrispondente diagramma per carico uniformemente distribuito.

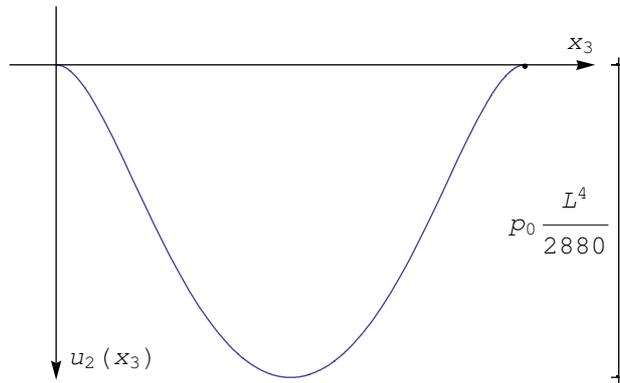


Figura 5 - Il diagramma degli spostamenti per la trave di Figura 1

Alcuni esempi per travi a due campate

Se, in una generica ascissa intermedia della trave, si verifica una discontinuità dello spostamento (dovuta ad una distorsione tagliante, oppure alla presenza di un bipendolo interno), della rotazione (dovuta ad una distorsione flessionale, oppure ad una cerniera), del momento (dovuta ad una coppia applicata, oppure ad un bipendolo esterno) oppure del taglio (dovuto ad una forza applicata, oppure alla presenza di un appoggio), allora la metodologia fin qui illustrata deve essere opportunamente generalizzata.

Sia allora S la sezione generica in cui si verifica la discontinuità, e sia ζ l'ascissa di S , sicchè la trave, di luce L , resta suddivisa in due tratti, di luce ζ ed $L-\zeta$, rispettivamente. In ciascuno dei due tratti, quindi, la continuità dello spostamento e delle sue derivate successive è rispettata, e quindi in ciascuno dei due tratti può scriversi l'equazione differenziale del quarto ordine (6):

$$EI u_2'''' = p_1 \quad (24)$$

$$EI v_2'''' = p_2 \quad (25)$$

con soluzione :

$$u_2 = C_0 + C_1 x_3 + C_2 x_3^2 + C_3 x_3^3 + I_p \quad (26)$$

$$v_2 = C_4 + C_5 y_3 + C_6 y_3^2 + C_7 y_3^3 + J_p \quad (27)$$

Si sono indicati con u_2 e v_2 le funzioni spostamento nel primo e nel secondo tratto, rispettivamente. Inoltre, si sono considerati due sistemi di riferimento distinti, con origine nell'estremo di sinistra e nella sezione S , rispettivamente, e quindi si sono indicate con x_3 ed y_3 le rispettive variabili.

Le otto costanti di integrazione si determinano imponendo otto condizioni ai limiti, due in ciascuno estremo - esattamente come fatto in precedenza - e quattro nella sezione S . In S occorre imporre il rispetto della congruenza degli spostamenti e delle rotazioni, nonchè l'equilibrio della sezione nei riguardi della traslazione verticale e della rotazione.

■ La trave soggetta a forza concentrata ad una ascissa arbitraria

Un semplice esempio è proposto in Figura 6, dove una trave incastrata-appoggiata è soggetta alla forza concentrata F nella sezione generica S a distanza ζ dall'incastro di sinistra.

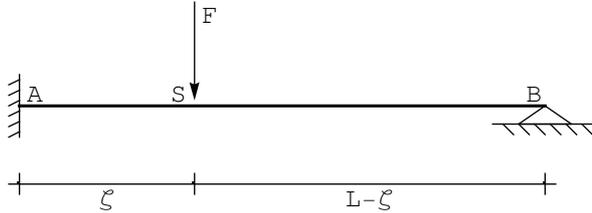


Figura 6 - Una trave soggetta a forza concentrata in una generica ascissa intermedia

In questo caso i due integrali particolari sono nulli, per l'assenza di carico distribuito, e le condizioni ai limiti si scrivono:

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = 0) &= 0 \\ u_2'(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

in corrispondenza dell'incastro in A ,

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = \zeta) &= v_2(y_3 = 0) \\ u_2'(x_3 = \zeta) &= v_2'(y_3 = 0) \\ u_2''(x_3 = \zeta) &= v_2''(y_3 = 0) \\ EI u_2'''(x_3 = \zeta) - EI v_2'''(y_3 = 0) + F &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

in corrispondenza della sezione S di applicazione della forza, ed infine:

$$\begin{aligned} v_2(y_3 = L - \zeta) &= 0 \\ v_2''(y_3 = L - \zeta) &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

in corrispondenza dell'appoggio in B .

Esercizio - Si esaminino le otto condizioni precedenti, per ognuna di esse si stabilisca se impongono il rispetto della congruenza, oppure se traducono condizioni di equilibrio. In quest'ultimo caso, si disegni il concio elementare con le forze su di esso agenti, e si traggano le rispettive equazioni

Le otto condizioni ai limiti danno luogo al sistema di otto equazioni lineari nelle otto costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} C_0 &= 0 \\ C_1 &= 0 \\ C_0 + C_1 \zeta + C_2 \zeta^2 + C_3 \zeta^3 &= C_4 \\ C_1 + 2 C_2 \zeta + 3 C_3 \zeta^2 &= C_5 \\ 2 C_2 + 6 C_3 \zeta &= 2 C_6 \\ 6 C_3 - 6 C_7 + \frac{F}{EI} &= 0 \\ C_4 + C_5 (L - \zeta) + C_6 (L - \zeta)^2 + C_7 (L - \zeta)^3 &= 0 \\ 2 C_6 + 6 C_7 (L - \zeta) &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Eliminando C_0 e C_1 , ed esprimendo le costanti di integrazione del secondo tratto in funzione delle due costanti C_2 e C_3 del primo tratto si giunge ad un sistema di due equazioni in due incognite:

$$C_2 \zeta^2 + C_3 \zeta^3 + (2 C_2 \zeta + 3 C_3 \zeta^2) (L - \zeta) +$$

$$(C_2 + 3 C_3 \zeta) (L - \zeta)^2 + \left(C_3 + \frac{F}{6 EI} \right) (L - \zeta)^3 = 0$$

$$C_2 + 3 C_3 \zeta + 3 \left(C_3 + \frac{F}{6 EI} \right) (L - \zeta) = 0$$

con soluzione :

$$C_2 = \frac{F \zeta (2 L^2 - 3 L \zeta + \zeta^2)}{4 EI L^2}$$

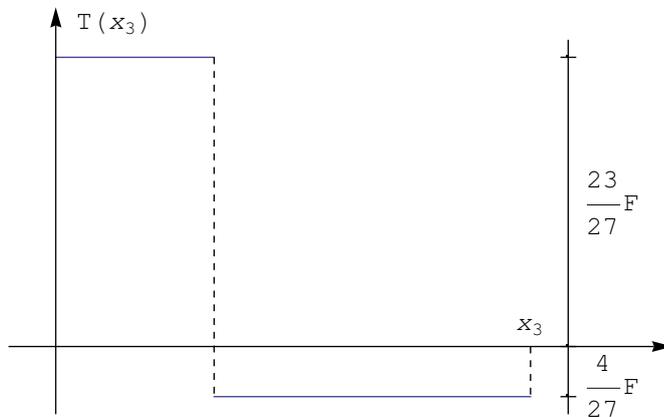
$$C_3 = - \frac{F (2 L^3 - 3 L \zeta^2 + \zeta^3)}{12 EI L^3}$$
(33)

In definitiva, gli abbassamenti si scrivono come :

$$u_2 (x_3) = \frac{F \zeta (2 L^2 - 3 L \zeta + \zeta^2)}{4 EI L^2} x_3^2 - \frac{F (2 L^3 - 3 L \zeta^2 + \zeta^3)}{12 EI L^3} x_3^3$$
(34)

$$v_2 (y_3) = \frac{F}{EI} \left(\frac{(L - \zeta)^2 (4 L - \zeta) \zeta^3}{12 L^3} - \frac{\zeta^2 (-2 L^3 + 6 L^2 \zeta - 5 L \zeta^2 + \zeta^3)}{4 L^3} y_3 - \frac{(L - \zeta) (3 L - \zeta) \zeta^2}{4 L^3} y_3^2 + \frac{(3 L - \zeta) \zeta^2}{12 L^3} y_3^3 \right)$$
(35)

con rotazioni, momenti e tagli da calcolarsi tramite derivazione. Di seguito, in Figura 7, si riportano i grafici per il caso in cui la sezione S è posta ad un terzo della luce.



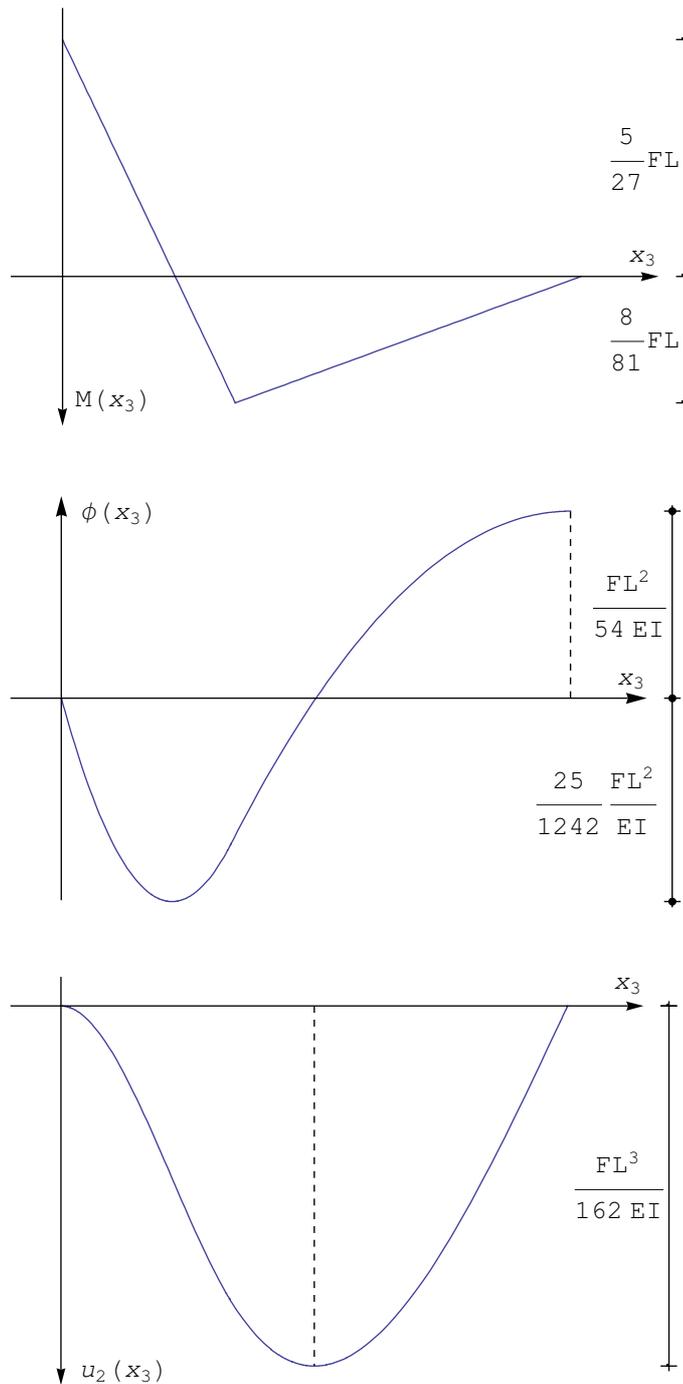


Figura 7 - I diagrammi di taglio, momento, rotazioni e spostamenti per la trave soggetta a forza concentrata ad un terzo della luce

Esercizio - Si studino e si commentino i diagrammi. In particolare, si traggano i valori estremi di rotazioni ed abbassamenti, insieme alle ascisse dove essi vengono attinti.

■ La trave soggetta a distorsione flessionale

Si consideri ora la trave su tre appoggi di Figura 8, e si ipotizzi di assegnare una distorsione rotazionale $D\phi$ alla sezione in cui è situato l'appoggio intermedio.

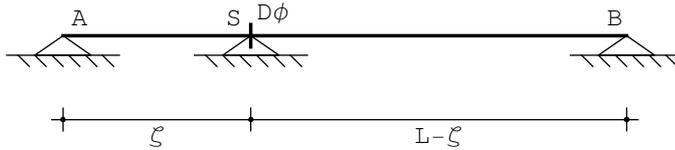


Figura 8 - Una trave su tre appoggi soggetta ad una distorsione flessionale in corrispondenza dell'appoggio intermedio

In questo caso, per definizione di distorsione, bisognerà imporre che in S si abbia:

$$D\phi = -\Delta\phi = \phi_{\text{sin}} - \phi_{\text{des}} \quad (36)$$

e quindi le otto condizioni ai limiti si scriveranno ora :

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = 0) &= 0 \\ u_2''(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (37)$$

in corrispondenza dell'appoggio in A ,

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = \zeta) &= 0 \\ v_2(y_3 = 0) &= 0 \\ v_2'(y_3 = 0) - u_2'(x_3 = \zeta) &= D\phi \\ u_2''(x_3 = \zeta) &= v_2''(y_3 = 0) \end{aligned} \quad (38)$$

in corrispondenza della sezione S di applicazione della distorsione, ed infine:

$$\begin{aligned} v_2(y_3 = L - \zeta) &= 0 \\ v_2''(y_3 = L - \zeta) &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

nell' appoggio di destra. Si giunge facilmente al sistema:

$$\begin{aligned} C_0 &= 0 \\ C_2 &= 0 \\ C_0 + C_1 \zeta + C_2 \zeta^2 + C_3 \zeta^3 &= 0 \\ C_4 &= 0 \\ C_5 - C_1 - 2 C_2 \zeta - 3 C_3 \zeta^2 &= D\phi \\ 2 C_2 + 6 C_3 \zeta &= 2 C_6 \\ C_4 + C_5 (L - \zeta) + C_6 (L - \zeta)^2 + C_7 (L - \zeta)^3 &= 0 \\ 2 C_6 + 6 C_7 (L - \zeta) &= 0 \end{aligned} \quad (40)$$

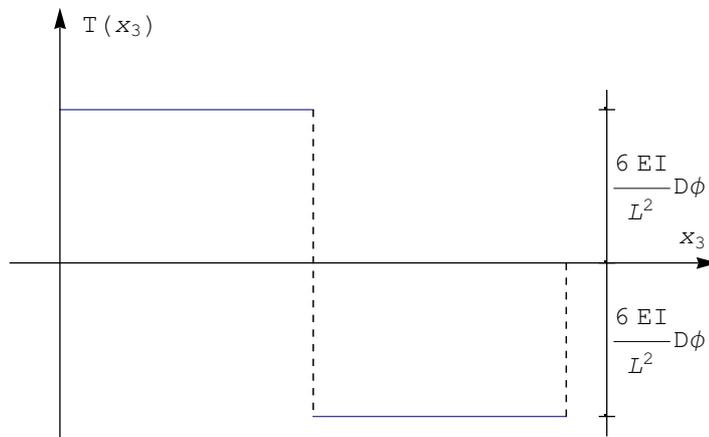
con soluzione :

$$\begin{aligned}
 C_0 &= 0 \\
 C_1 &= \frac{\xi}{2L} D\phi \\
 C_2 &= 0 \\
 C_3 &= -\frac{D\phi}{2L\xi} \\
 C_4 &= 0 \\
 C_5 &= D\phi \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) \\
 C_6 &= -\frac{3}{2L} D\phi \\
 C_7 &= \frac{D\phi}{2L(L-\xi)}
 \end{aligned} \tag{41}$$

Gli spostamenti sono allora forniti dalle due espressioni cubiche :

$$\begin{aligned}
 u_2(x_3) &= D\phi \left(\frac{\xi}{2L} x_3 - \frac{1}{2L\xi} x_3^3 \right) \\
 v_2(y_3) &= D\phi \left(\left(1 - \frac{\xi}{L}\right) y_3 - \frac{3}{2L} y_3^2 + \frac{1}{2L^2 - 2L\xi} y_3^3 \right)
 \end{aligned} \tag{42}$$

con rotazioni, momenti e tagli da calcolarsi tramite derivazione. Di seguito, in Figura 9, si riportano i grafici per il caso in cui la sezione S è posta in mezzeria.



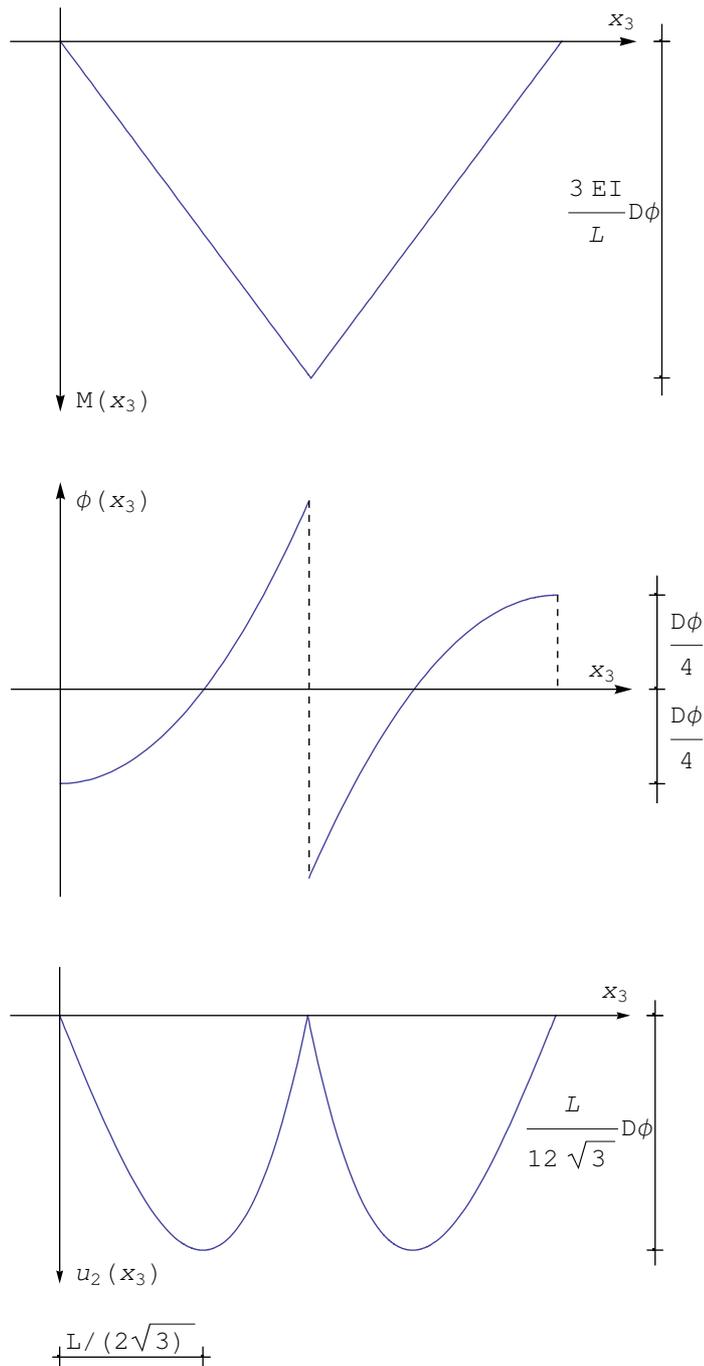


Figura 9 - I diagrammi di taglio, momento, rotazioni e spostamenti per la trave soggetta a distorsione concentrata in mezzeria

Le travi a più campate

Se le discontinuità dello spostamento e/o delle sue derivate sono più d'una, la procedura appena descritta può essere facilmente generalizzata: in presenza di k discontinuità si devono utilizzare $k + 1$ funzioni spostamento, ciascuna esprimibile come la (6); occorre poi imporre $4(k + 1)$ condizioni ai limiti, di congruenza e/o di equilibrio, in modo da determinare univocamente le costanti di integrazione.

L'unico limite all'utilizzo di questo metodo è il dover risolvere un sistema di equazioni lineari di dimensioni

abbastanza ragguardevole, ma l'utilizzo di software di calcolo simbolico ha in pratica eliminato questo inconveniente.

■ Una trave continua (Carpinteri)

Si consideri la trave continua di Figura 10, suddivisa in tre campate di luce L mediante due appoggi intermedi. La rigidezza flessionale del terzo tratto CD è pari ad EI , la rigidezza flessionale dei primi due tratti è invece pari a $2EI$. La trave è caricata da una forza F in corrispondenza del bipendolo. Si calcolino tagli, momenti, rotazioni ed abbassamenti.

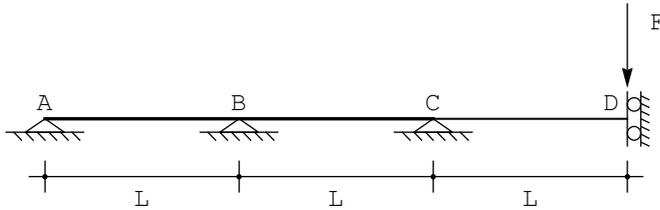


Figura 10 - Una trave continua (A.Carpinteri "Calcolo dei telai piani" pag.2)

■ La deduzione della linea elastica

La trave è soggetta ad un carico concentrato, quindi gli spostamenti saranno esprimibili tramite polinomi cubici:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\ v_2(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 \\ w_2(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \end{aligned} \quad (43)$$

rispettivamente in AB, BC e CD. Si noti che per semplicità si è indicata la variabile indipendente con x_3 , dando per inteso che i tre sistemi di riferimento hanno tre origini diverse, in A, B e C rispettivamente.

Le dodici costanti di integrazione si calcolano imponendo le condizioni di equilibrio e congruenza in corrispondenza dei vincoli:

- in A

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ M(0) &= 0 \end{aligned} \quad (44)$$

- in B

$$\begin{aligned} u_{sin} &= 0 \\ u_{des} &= 0 \\ \phi_{sin} &= \phi_{des} \\ M_{sin} &= M_{des} \end{aligned} \quad (45)$$

- in C

$$\begin{aligned} u_{sin} &= 0 \\ u_{des} &= 0 \\ \phi_{sin} &= \phi_{des} \\ M_{sin} &= M_{des} \end{aligned} \quad (46)$$

- in D

$$\begin{aligned}\phi &= 0 \\ -T_{\sin} + F &= 0\end{aligned}\quad (47)$$

Occorre ora trasformare queste dodici condizioni in funzione degli abbassamenti e delle sue successive derivate, onde ottenere un sistema di dodici equazioni nelle costanti di integrazione. Si avrà, introducendo tre opportuni sistemi di riferimento con origine nei tre appoggi:

$$\begin{aligned}u_2(0) &= 0 \\ u_2''(0) &= 0 \\ u_2(L) &= 0 \\ v_2(0) &= 0 \\ u_2'(L) &= v_2'(0) \\ u_2'''(L) &= v_2'''(0) \\ v_2(L) &= 0 \\ w_2(0) &= 0 \\ v_2'(L) &= v_2'(0) \\ 2v_2''(L) &= w_2''(0) \\ w_2'(L) &= 0 \\ EIw_2'''(L) + F &= 0\end{aligned}\quad (48)$$

ed utilizzando le (43), insieme alle loro successive derivate, si giunge al sistema :

$$\begin{aligned}a_0 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ a_0 + a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3 &= 0 \\ b_0 &= 0 \\ a_1 + 2 a_2 L + 3 a_3 L^2 &= b_1 \\ 2 a_2 + 6 a_3 L &= 2 b_2 \\ b_0 + b_1 L + b_2 L^2 + b_3 L^3 &= 0 \\ c_0 &= 0 \\ b_1 + 2 b_2 L + 3 b_3 L^2 &= c_1 \\ 2 (2 b_2 + 6 b_3 L) &= 2 c_2 \\ c_1 + 2 c_2 L + 3 c_3 L^2 &= 0 \\ 6 EI c_3 + F &= 0\end{aligned}\quad (49)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned}a_0 &= 0; \quad a_2 = 0; \quad b_0 = 0; \quad c_0 = 0 \\ a_1 &= \frac{F L^2}{110 EI}; \quad a_3 = -\frac{F}{110 EI} \\ b_1 &= -\frac{F L^2}{55 EI}; \quad b_2 = -\frac{3 F L}{110 EI}; \quad b_3 = \frac{F}{22 EI} \\ c_1 &= \frac{7 F L^2}{110 EI}; \quad c_2 = \frac{12 F L}{55 EI}; \quad c_3 = -\frac{F}{6 EI}\end{aligned}\quad (50)$$

Ne seguono le tre linee elastiche :

$$\begin{aligned}
 u_2(x_3) &= \frac{F}{110 EI} x_3 (L^2 - x_3^2) \\
 v_2(x_3) &= \frac{F}{110 EI} x_3 (-2L^2 - 3Lx_3 + 5x_3^2) \\
 w_2(x_3) &= \frac{F}{330 EI} x_3 (21L^2 + 72Lx_3 - 55x_3^2)
 \end{aligned} \tag{51}$$

ed in cascata, le rotazioni, i momenti ed i tagli:

$$\begin{aligned}
 \phi^{AB}(x_3) &= -\frac{F(L^2 - 3x_3^2)}{110 EI} \\
 \phi^{BC}(x_3) &= \frac{F(2L^2 + 6Lx_3 - 15x_3^2)}{110 EI} \\
 \phi^{CD}(x_3) &= -\frac{F(7L^2 + 48Lx_3 - 55x_3^2)}{110 EI}
 \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
 M^{AB}(x_3) &= 2EI \phi^{AB'} = \frac{6F x_3}{55} \\
 M^{BC}(x_3) &= 2EI \phi^{BC'} = \frac{6}{55} F (L - 5x_3)
 \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
 M^{CD}(x_3) &= EI \phi^{CD'} = F \left(-\frac{24L}{55} + x_3 \right) \\
 T^{AB}(x_3) &= M^{AB'}(x_3) = \frac{6F}{55} \\
 T^{BC}(x_3) &= M^{BC'}(x_3) = -\frac{6F}{11} \\
 T^{CD}(x_3) &= M^{CD'}(x_3) = F
 \end{aligned} \tag{54}$$

■ Il calcolo delle reazioni

Nell'appoggio A si avrà, per l'equilibrio:

$$R_A = -T^{AB}(0) = -\frac{6}{55} F \tag{55}$$

mentre nei due appoggi intermedi sarà :

$$\begin{aligned}
 R_B &= T^{AB}(L) - T^{BC}(0) = \frac{6F}{55} + \frac{6F}{11} = \frac{36}{55} F \\
 R_C &= T^{BC}(L) - T^{CD}(0) = -\frac{6F}{11} - F = -\frac{17}{11} F
 \end{aligned} \tag{56}$$

Nel bipendolo a destra, invece, la coppia reattiva sarà

$$M_{rD} = M^{CD}(L) = \frac{31}{55} FL \tag{57}$$

Un'utile verifica consiste nel controllare che siano soddisfatte le equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} R_A + R_B + R_C + F &= 0 \\ M_{rD} + R_A 3L + R_B 2L + R_C L &= 0 \end{aligned} \quad (58)$$

■ Il tracciamento dei diagrammi

Il diagramma del taglio (Fig.11) non pone difficoltà di alcun genere: costante a tratti, con due discontinuità dovute alle reazioni degli appoggi intermedi:

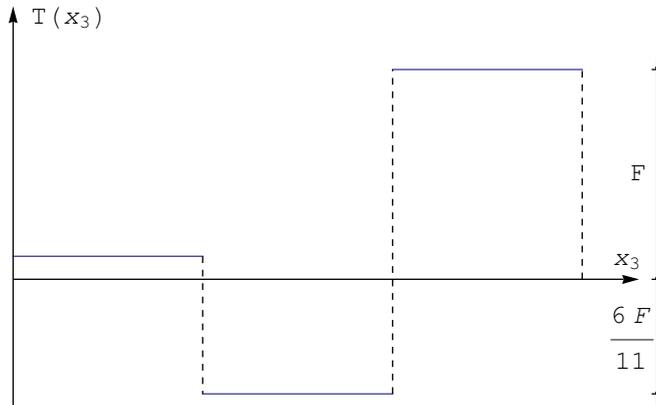


Figura 11 - Il diagramma del taglio

Il momento è distribuito con legge lineare in ciascuno dei tre tratti, con discontinuità angolari in corrispondenza degli appoggi centrali. Nel primo tratto, dove il taglio è positivo, il momento crescerà dal valore nullo (in *A*) fino al valore:

$$M_B = T_A L = \frac{6F}{55} L \quad (59)$$

in corrispondenza dell' appoggio *B*. Nel secondo tratto, il taglio è negativo, quindi il momento decresce, con pendenza pari al valore del taglio, giungendo in *C* con valore:

$$M_C = M_B - \frac{6F}{11} L = -\frac{24}{55} FL \quad (60)$$

Nel terzo tratto, infine, riprenderà a crescere, con pendenza pari ad *F*, e quindi giungerà in *D* con valore:

$$M_D = M_C + F L = -\frac{24}{55} FL + F L = \frac{31}{55} FL \quad (61)$$

Si ha così il diagramma di Figura 12.

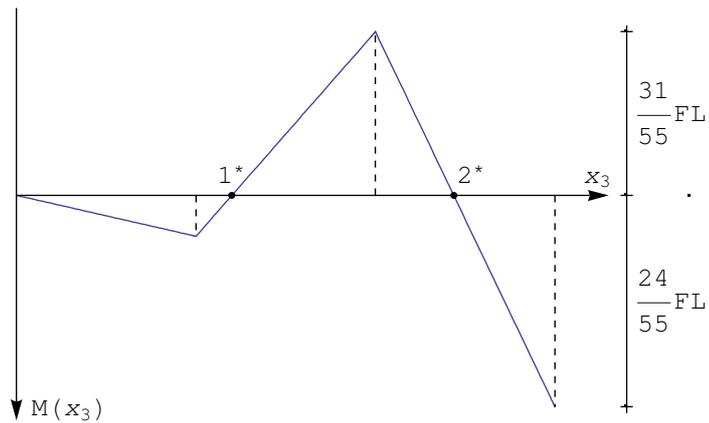


Figura 12 - Il diagramma del momento

I due punti di nullo del diagramma del momento sono particolarmente significativi, in quanto corrispondono a punti di flesso del diagramma degli abbassamenti. Una semplice proporzione geometrica permette di ottenere 1^* in $(L + \frac{L}{5})$ e 2^* in $(2L + \frac{24}{55}L)$.

Il diagramma delle rotazioni è costituito da tratti quadratici, e si presenta come in Figura 13. Si noti la tangenza orizzontale in A e nei due punti di nullo del momento, e la discontinuità angolare in C , dovuta al variare della rigidezza flessionale. La presenza del bipendolo impone l'annullarsi della rotazione in D

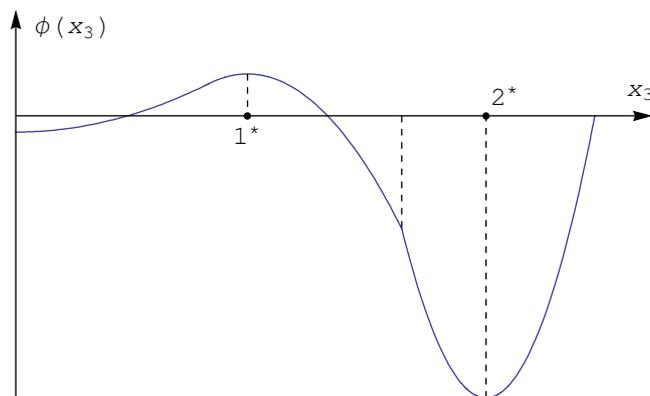


Figura 13 - Il diagramma delle rotazioni

Gli spostamenti si presentano come in Figura 14: essi si annullano in corrispondenza degli appoggi, raggiungono valori estremi in corrispondenza dei punti di nullo delle rotazioni, e cambiano di curvatura in 1^* ed in 2^* .

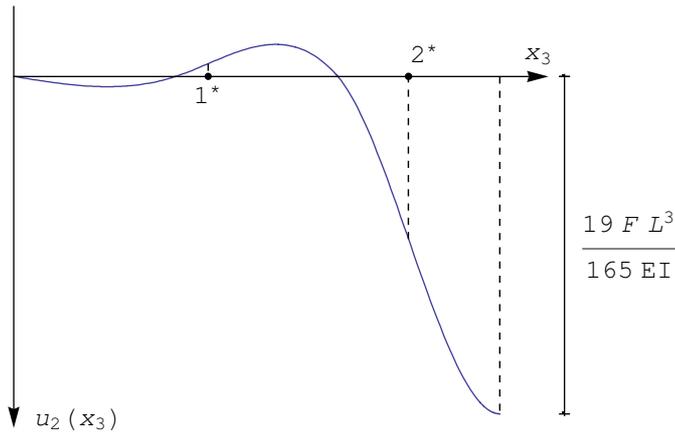


Figura 14 - Il diagramma degli spostamenti

La presenza di variazioni termiche e coppie distribuite

L'equazione della linea elastica è stata dedotta nell'ipotesi che l'unico carico distribuito fosse un carico trasversale $p(x_3)$. Talvolta, però, possono agire sulla trave anche delle coppie distribuite $m(x_3)$ e delle distorsioni flessionali distribuite $\mu(x_3)$, ed in tal caso l'equazione differenziale (6) va opportunamente modificata.

Le equazioni di equilibrio relative al concio elementare divengono ora, come può leggersi dalla Figura 15:

$$\begin{aligned} -T(x_3) + T(x_3 + dx_3) + p(x_3) dx_3 &= 0 \\ -M(x_3) + M(x_3 + dx_3) + p(x_3) dx_3 \frac{dx_3}{2} + m(x_3) dx_3 &= 0 \end{aligned} \quad (62)$$

e con le usuali manipolazioni si giunge alle due relazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx_3} &= -p \\ \frac{dM}{dx_3} &= T - m \end{aligned} \quad (63)$$

ed alla legge che lega il momento al carico:

$$\frac{d^2 M}{dx_3^2} = -p - \frac{dm}{dx_3} \quad (64)$$

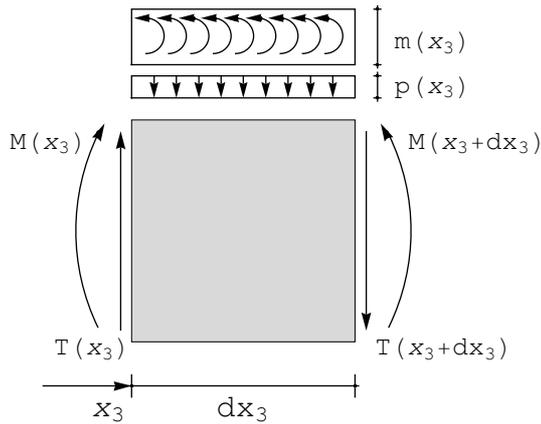


Figura 15 - Il concio elementare soggetto a carico trasversale e coppie distribuite

L'equazione di congruenza resta inalterata:

$$\phi = - \frac{du_3}{dx_3} \quad (65)$$

mentre l'equazione costitutiva deve essere generalizzata a tener conto della curvatura aggiuntiva dovuta alla distorsione flessionale:

$$M = EI \frac{d\phi}{dx_3} + EI \mu(x_3) \quad (66)$$

o anche, inserendo la (65) :

$$M = -EI \frac{d^2 u_3}{dx_3^2} + EI \mu(x_3) \quad (67)$$

Derivando due volte, ed utilizzando la (65) si giunge alla equazione differenziale del quarto ordine:

$$\frac{d^2}{dx_3^2} \left(EI \frac{d^2 u_3}{dx_3^2} \right) = p + \frac{dm}{dx_3} + \frac{d^2}{dx_3^2} (EI \mu(x_3)) \quad (68)$$

In ipotesi di trave omogenea a sezione costante si avrà infine :

$$u_2'''' = \frac{p}{EI} + \frac{m'}{EI} + \mu'' \quad (69)$$

■ Una trave soggetta a coppie distribuite (Franciosi)

Si consideri la trave con tre appoggi ed una cerniera di Figura 16 (trave Gerber), soggetta ad un carico di coppie distribuite con legge triangolare, annullandosi all'estrema sinistra e giungendo al valore m all'estrema destra. La trave è isostatica, ed il suo studio può affrontarsi utilizzando il metodo della doppia integrazione, come si è fatto nel testo di riferimento.

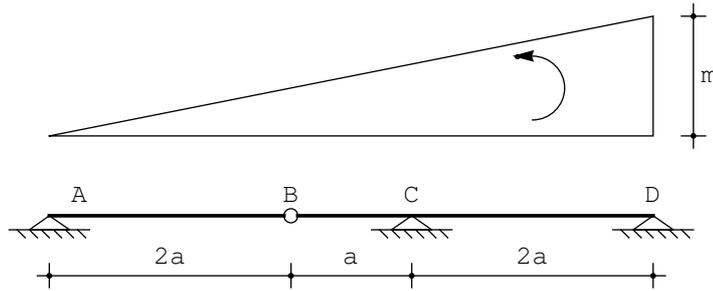


Figura 16 - Una trave Gerber soggetta ad un carico di coppie distribuite (V.Franciòsi "Problemi di Scienza delle Costruzioni" Vol.II, pag.39)

Se invece si vuole utilizzare l'equazione (69) del quarto ordine, occorrerà introdurre tre sistemi di riferimento, con origine in A , B e C , rispettivamente, e ricavare preliminarmente le leggi di variazioni del carico nei tre tratti AB , BC e CD . Sarà:

$$\begin{aligned} m_1(x_3) &= \frac{m}{5a} x_3 & 0 \leq x_3 \leq 2a \\ m_2(y_3) &= \frac{2}{5}m + \frac{m}{5a} y_3 & 0 \leq y_3 \leq a \\ m_3(z_3) &= \frac{3}{5}m + \frac{m}{5a} z_3 & 0 \leq z_3 \leq 2a \end{aligned} \quad (70)$$

e di conseguenza le tre equazioni differenziali saranno :

$$\begin{aligned} u_2'''' &= \frac{m}{5aEI} \\ v_2'''' &= \frac{m}{5aEI} \\ w_2'''' &= \frac{m}{5aEI} \end{aligned} \quad (71)$$

con soluzione :

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= C_0 + C_1 x_3 + C_2 x_3^2 + C_3 x_3^3 + \frac{m}{120aEI} x_3^4 \\ v_2(y_3) &= C_4 + C_5 y_3 + C_6 y_3^2 + C_7 y_3^3 + \frac{m}{120aEI} y_3^4 \\ w_2(z_3) &= C_8 + C_9 z_3 + C_{10} z_3^2 + C_{11} z_3^3 + \frac{m}{120aEI} z_3^4 \end{aligned} \quad (72)$$

Le costanti di integrazione si determinano imponendo le condizioni di equilibrio e congruenza agli estremi, in corrispondenza della cerniera, ed in corrispondenza dell'appoggio:

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = 0) &= 0 \\ M^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = 2a) &= v_2(y_3 = 0) \\ M^{(AB)}(x_3 = 2a) &= 0 \\ M^{(BC)}(y_3 = 0) &= 0 \\ T^{(AB)}(x_3 = 2a) &= T^{(BC)}(y_3 = 0) \end{aligned} \quad (74)$$

$$v_2(y_3 = a) = 0$$

$$\begin{aligned}
w_2(z_3 = 0) &= 0 \\
\phi^{(BC)}(y_3 = a) &= \phi^{(CD)}(z_3 = 0) \\
M^{(BC)}(y_3 = a) &= M^{(CD)}(z_3 = 0) \\
w_2(z_3 = 2a) &= 0 \\
M^{(CD)}(z_3 = 2a) &= 0
\end{aligned} \tag{76}$$

Per trasformare queste condizioni nelle usuali equazioni nelle dodici costanti di integrazione, bisogna tener conto che il taglio sarà ora fornito da:

$$\begin{aligned}
T^{(AB)} &= \frac{dM^{(AB)}}{dx_3} + m_1 = -EI u_2''(x_3) + m_1(x_3) \\
T^{(BC)} &= \frac{dM^{(BC)}}{dy_3} + m_2 = -EI v_2''(y_3) + m_2(y_3) \\
T^{(CD)} &= \frac{dM^{(CD)}}{dz_3} + m_3 = -EI w_2''(z_3) + m_3(z_3)
\end{aligned} \tag{77}$$

mentre rotazioni e momenti conservano la loro espressione classica. Si ha quindi il sistema:

$$\begin{aligned}
C_0 &= 0 \\
C_2 &= 0 \\
\frac{2a^3 m}{15EI} + C_0 + 2a C_1 + 4a^2 C_2 + 8a^3 C_3 &= C_4 \\
\frac{2am}{5EI} + 2C_2 + 12a C_3 &= 0 \\
C_6 &= 0 \\
\frac{2m}{5} + 6EI C_3 &= 6EI C_7 \\
\frac{a^3 m}{120EI} + C_4 + a C_5 + a^2 C_6 + a^3 C_7 &= 0 \\
C_8 &= 0 \\
\frac{a^2 m}{30EI} + C_5 + 2a C_6 + 3a^2 C_7 &= C_9 \\
\frac{am}{10} + 2EI C_6 + 6EI a C_7 &= 2EI C_{10} \\
\frac{2a^3 m}{15EI} + C_8 + 2a C_9 + 4a^2 C_{10} + 8a^3 C_{11} &= 0 \\
\frac{2am}{5EI} + 2C_{10} + 12a C_{11} &= 0
\end{aligned} \tag{78}$$

con soluzione :

$$\begin{aligned}
C_0 &= 0 \\
C_1 &= \frac{43a^2 m}{240EI} \\
C_2 &= 0 \\
C_3 &= -\frac{m}{30EI}
\end{aligned}$$

$$C_4 = \frac{9 a^3 m}{40 EI}$$

$$C_5 = -\frac{4 a^2 m}{15 EI}$$

$$C_6 = 0$$

$$C_7 = \frac{m}{30 EI}$$

$$C_8 = 0$$

$$C_9 = -\frac{2 a^2 m}{15 EI}$$

$$C_{10} = \frac{3 a m}{20 EI}$$

$$C_{11} = -\frac{7 m}{120 EI}$$

Gli spostamenti sono quindi forniti da :

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= \frac{m}{EI} \left(\frac{43 a^2}{240} x_3 - \frac{x_3^3}{30} + \frac{x_3^4}{120 a} \right) \\ v_2(y_3) &= \frac{m}{EI} \left(\frac{9 a^3}{40} - \frac{4 a^2}{15} y_3 + \frac{y_3^3}{30} + \frac{y_3^4}{120 a} \right) \\ w_2(z_3) &= \frac{m}{EI} \left(-\frac{2 a^2}{15} z_3 + \frac{3 a}{20} z_3^2 - \frac{7}{120} z_3^3 + \frac{z_3^4}{120 a} \right) \end{aligned} \quad (80)$$

le rotazioni si ottengono per derivazione :

$$\begin{aligned} \phi^{(AB)}(x_3) &= \frac{m}{EI} \left(-\frac{43 a^2}{240} + \frac{x_3^2}{10} - \frac{x_3^3}{30 a} \right) \\ \phi^{(BC)}(y_3) &= \frac{m}{EI} \left(\frac{4 a^2}{15} - \frac{y_3^2}{10} - \frac{y_3^3}{30 a} \right) \\ \phi^{(CD)}(z_3) &= \frac{m}{EI} \left(\frac{2 a^2}{15} - \frac{3 a}{10} z_3 + \frac{7}{40} z_3^2 - \frac{z_3^3}{30 a} \right) \end{aligned} \quad (81)$$

I momenti si calcolano con l' usuale formula:

$$\begin{aligned} M^{(AB)}(x_3) &= m \left(\frac{x_3}{5} - \frac{x_3^2}{10 a} \right) \\ M^{(BC)}(y_3) &= m \left(-\frac{y_3}{5} - \frac{y_3^2}{10 a} \right) \\ M^{(CD)}(z_3) &= m \left(-\frac{3 a}{10} + \frac{7}{20} z_3 - \frac{z_3^2}{10 a} \right) \end{aligned} \quad (82)$$

mentre per i tagli si deve utilizzare la (77) :

$$T^{(AB)}(x_3) = m \left(\frac{1}{5} - \frac{x_3}{5a} \right) + \frac{m}{5a} x_3 = \frac{m}{5}$$

$$T^{(BC)}(y_3) = m \left(-\frac{1}{5} - \frac{y_3}{5a} \right) + \frac{2}{5}m + \frac{m}{5a} y_3 = \frac{m}{5}$$

$$T^{(CD)}(z_3) = m \left(\frac{7}{20} - \frac{z_3}{5a} \right) + \frac{3}{5}m + \frac{m}{5a} z_3 = \frac{19}{20}m$$

Il diagramma del taglio (Fig.17) è immediato: andamento costante tra i primi due appoggi, e pari ad $\frac{m}{5}$, poi una discontinuità in corrispondenza della reazione dell'appoggio centrale, ed ancora andamento costante fino all'appoggio di destra, con valore $\frac{19}{20}m$.

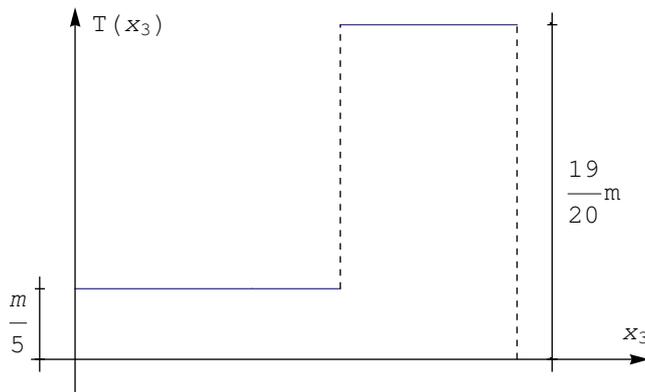


Figura 17 - Il diagramma del taglio per la trave di Figura 16

Da questo diagramma si possono ricavare le reazioni dei tre appoggi:

$$R_A = -T^{(AB)}(x_3 = 0) = -\frac{m}{5}$$

$$R_B = T^{(BC)}(y_3 = 3a) - T^{(CD)}(z_3 = 0) = -\frac{15}{20}m \quad (84)$$

$$R_C = T^{(CD)}(z_3 = 2a) = \frac{19}{20}m$$

Il diagramma appena descritto non rappresenta però, alla luce delle (77), la derivata del momento flettente, poichè le informazioni sulla pendenza del momento sono essenziali, è conveniente diagrammare anche la funzione $T - m$, ossia la derivata del momento:

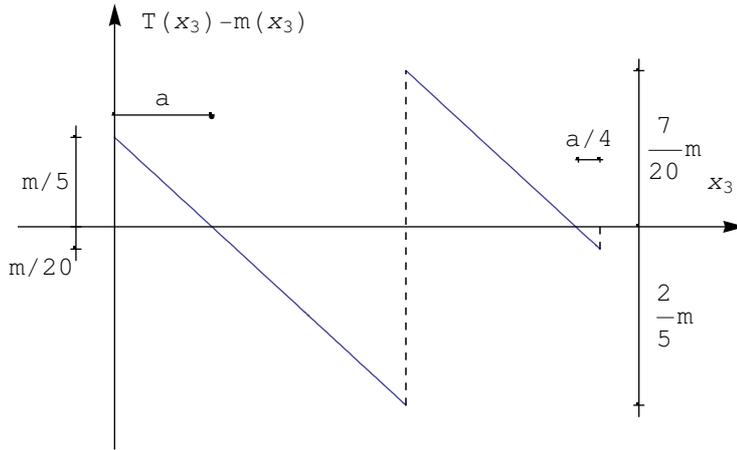


Figura 18 - Il diagramma della derivata del momento per la trave di Figura 16

Si ottiene il diagramma di Figura 18, in cui l'andamento lineare riflette l'andamento lineare della distribuzione di coppie. Da esso può già dedursi l'andamento quadratico del momento, con discontinuità angolare in $3a$ e due punti di estremi in a ed in $5a - \frac{a}{4}$. Inoltre, negli appoggi di estremità il momento si annulla, cresce da 0 ad a , decresce fino all'appoggio intermedio annullandosi in corrispondenza della cerniera, per poi tornare a crescere fino all'ascissa $5a - \frac{a}{4}$. Di qui in poi, torna a decrescere per annullarsi nell'appoggio di destra. Si ha così il diagramma di Figura 19.

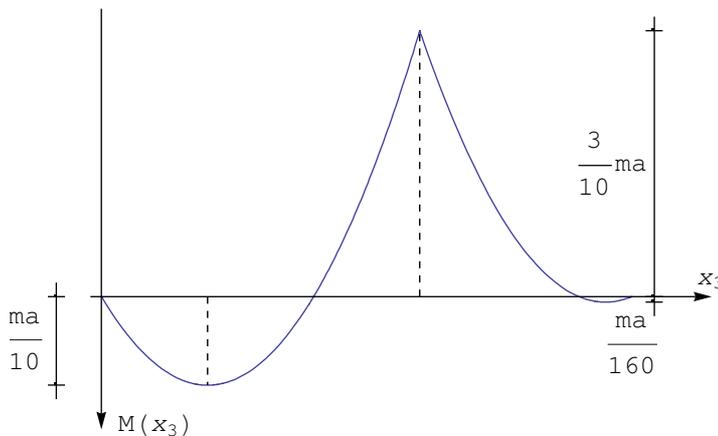


Figura 19 - Il diagramma del momento per la trave di Figura 16

Le rotazioni variano con legge cubica, con una discontinuità in corrispondenza della cerniera B . A partire dal diagramma del momento, si può affermare che vi saranno punti di tangenza orizzontale in corrispondenza dei due appoggi di estremità, della cerniera in B , e della sezione all'ascissa $5a - \frac{a}{2}$, ossia in tutti i punti ove si annulla il momento.

A partire dal diagramma di $T - m$, invece, si può affermare che la curvatura del diagramma cambierà in corrispondenza della sezione 1^* all'ascissa a , dell'appoggio in C , e della sezione 2^* all'ascissa $5a - \frac{a}{4}$. Si può quindi giungere al diagramma di Figura 20.

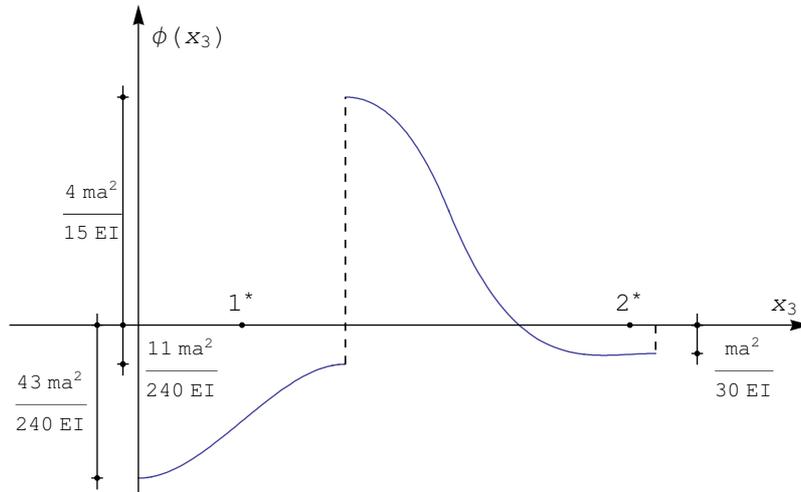


Figura 20 - Il diagramma delle rotazioni per la trave di Figura 16

Il diagramma degli spostamenti è infine riportato in Figura 21: esso sarà costituito da parabole di ordine quattro, si annullerà in corrispondenza dei tre appoggi, e presenterà tangenza orizzontale nel punto 3* in cui le rotazioni si annullano. Numericamente si può determinare che la sezione 3* è situata a circa 3.68 a dall'appoggio di sinistra.

I cambi di curvatura avverranno invece dove si annullano i momenti, ossia nella cerniera B e nel punto 4* all'ascisa $5a - \frac{a}{2}$.

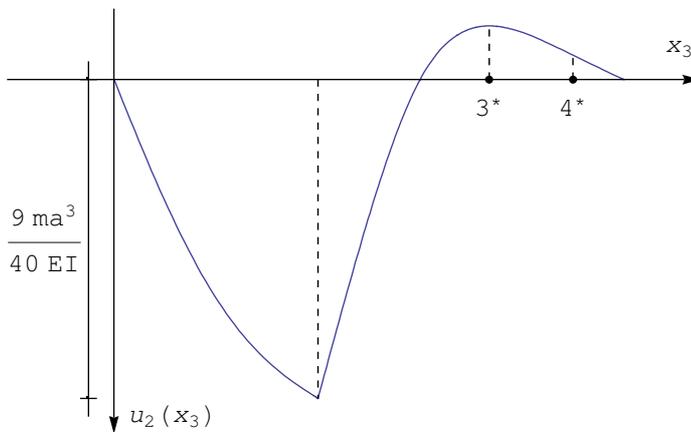


Figura 21 - Il diagramma degli abbassamenti per la trave di Figura 16

■ Le travi soggette a variazioni termiche flessionali

Il più frequente caso di distorsione $\mu(x_3)$ distribuita è certamente il caso delle variazioni termiche alla Navier, in cui una trave di altezza h subisce una differenza di temperatura Δt tra l'estradosso e l'intradosso. In tal caso, è noto che l'effetto di Δt è riconducibile ad una distorsione flessionale pari a:

$$\mu = -\alpha \frac{\Delta t}{h} \tag{85}$$

dove α è un coefficiente di conducibilità termica, caratteristico di ciascun materiale, e di dimensioni fisiche pari all'inverso di gradi. Ne segue quindi che - come ovvio - la $\mu(x_3)$ è assimilabile ad una curvatura.

Quale esempio preliminare, si consideri la trave a mensola di Figura 22, soggetta ad una variazione termica Δt costante su tutta la luce. Per essa si ha:

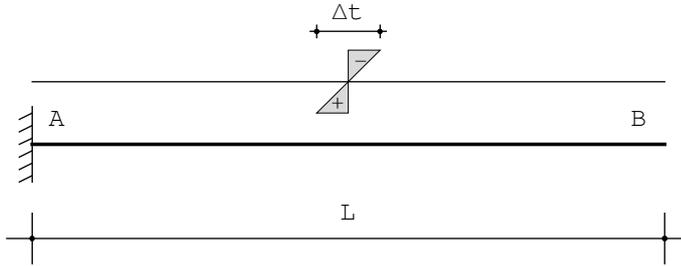


Figura 22 - Una trave isostatica soggetta a variazione termica

$$u_2(x_3) = C_0 + C_1 x_3 + C_2 x_3^2 + C_3 x_3^3 \quad (86)$$

e le costanti di integrazione si determinano imponendo che sia:

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = 0) &= 0 \\ \phi(x_3 = 0) &= 0 \\ M(x_3 = L) &= 0 \\ T(x_3 = L) &= 0 \end{aligned} \quad (87)$$

ed utilizzando la (67) si ha:

$$\begin{aligned} C_0 &= 0 \\ C_1 &= 0 \\ 2 C_2 + 6 L C_3 + \frac{\alpha \Delta t}{h} &= 0 \\ 6 C_3 &= 0 \end{aligned} \quad (88)$$

con l'ovvia soluzione :

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= -\frac{\alpha \Delta t}{2 h} x_3^2 \\ \phi(x_3) &= \frac{\alpha \Delta t}{h} x_3 \\ M(x_3) &= 0 \\ T(x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (89)$$

Si noti che in questo caso - struttura isostatica - la variazione termica ha causato spostamenti e rotazioni, ma non sono sorte caratteristiche. Nel caso di strutture iperstatiche, invece, una variazione termica provoca anche caratteristiche. Si consideri infatti la trave di Figura 23, in cui le condizioni ai limiti divengono:

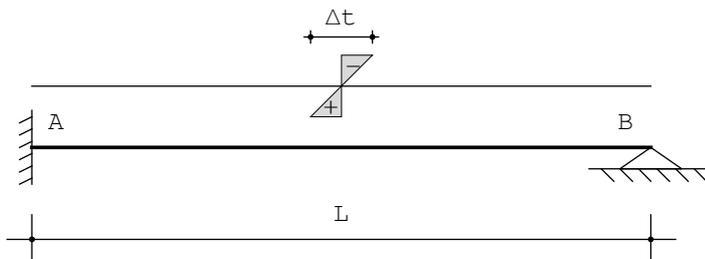


Figura 23 - Una trave iperstatica soggetta a variazione termica

$$\begin{aligned} u_2 (x_3 = 0) &= 0 \\ \phi (x_3 = 0) &= 0 \\ u_2 (x_3 = L) &= 0 \\ M (x_3 = L) &= 0 \end{aligned}$$

che si tramutano nel sistema :

$$\begin{aligned} C_0 &= 0 \\ C_1 &= 0 \\ C_0 + C_1 L + C_2 L^2 + C_3 L^3 &= 0 \\ 2 C_2 + 6 L C_3 + \frac{\alpha \Delta t}{h} &= 0 \end{aligned} \quad (91)$$

con soluzione :

$$C_0 = C_1 = 0; \quad C_2 = \frac{\alpha \Delta T}{4 h}; \quad C_3 = -\frac{\alpha \Delta T}{4 h L} \quad (92)$$

Si hanno quindi gli spostamenti e le rotazioni :

$$\begin{aligned} u_2 (x_3) &= \frac{\alpha \Delta T}{4 h} \left(x_3^2 - \frac{x_3^3}{L} \right) \\ \phi (x_3) &= -\frac{\alpha \Delta T}{4 h} \left(2 x_3 - \frac{3 x_3^2}{L} \right) \end{aligned} \quad (93)$$

ma anche i momenti ed i tagli :

$$\begin{aligned} M (x_3) &= -EI \frac{\alpha \Delta T}{4 h} \left(2 - \frac{6 x_3}{L} \right) - EI \frac{\alpha \Delta T}{h} = -\frac{3}{2} \frac{EI}{L} \frac{\alpha \Delta T}{h} (L - x_3) \\ T (x_3) &= \frac{3}{2} \frac{EI}{L} \frac{\alpha \Delta T}{h} \end{aligned} \quad (94)$$

Il diagramma del taglio è costante, mentre il diagramma del momento, riportato in Figura 24, è lineare, crescendo dal valore $-\frac{3}{2} EI \frac{\alpha \Delta T}{h}$ nell'incastro al valore nullo sull'appoggio.

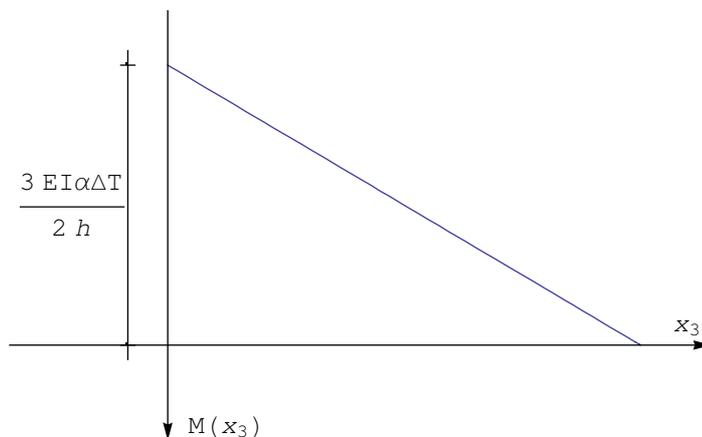


Figura 24 - Una trave iperstatica soggetta a variazione termica: diagramma del momento

Il diagramma delle rotazioni è presentato in Figura 25: l'andamento sarà quadratico, annullandosi in corrispondenza dell'incastro, e raggiungendo un punto di minimo ad $\frac{L}{3}$, laddove si annulla la sua derivata, ossia la

funzione $\frac{M}{EI} - \mu$. Poi cresce fino ad annullarsi a $\frac{2}{3}L$, e raggiunge il valore massimo sull'appoggio:

$$\phi_{\max} = \phi(L) = -\frac{\alpha \Delta T}{4h} L \quad (95)$$

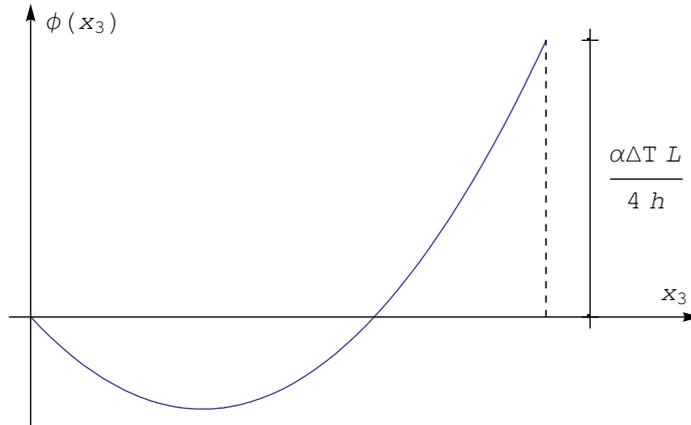


Figura 25 - Una trave iperstatica soggetta a variazione termica: diagramma delle rotazioni

Infine, gli abbassamenti sono forniti dalla Figura 26: si parte da zero, e con tangenza orizzontale, si cambia di curvatura in $L/3$, si raggiunge il massimo in $\frac{2}{3}L$, e poi si torna a zero in corrispondenza dell'appoggio

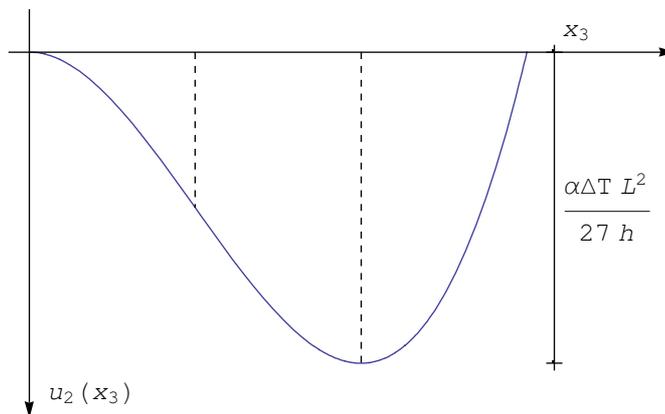


Figura 26 - Una trave iperstatica soggetta a variazione termica: diagramma degli spostamenti

Sarà infine:

$$u_{2\max} = u_2\left(\frac{2}{3}L\right) = \frac{\alpha \Delta T}{27h} L^2 \quad (96)$$

Le travi a sezione variabile

Se la rigidezza flessionale della trave varia con l'ascissa x_3 , allora il passaggio dall'equazione (5) alla (6) non è più lecito, e l'equazione differenziale della linea elastica deve essere esplicitata come:

$$EI'' u_2'' + 2EI' u_2''' + EI u_2'''' = p \quad (97)$$

Si tratta quindi di una equazione differenziale a coefficienti variabili, la cui soluzione non sempre è esprimi-

bile analiticamente. Si tenga anche presente che per travi a sezione variabile il taglio sarà fornito da:

$$T(x_3) = \frac{dM}{dx_3} = (-EIu_2'')' = -(EI)'u_2'' - EIu_2''' \quad (98)$$

■ La trave a mensola a rigidità variabile linearmente

Si consideri la trave a mensola di Figura 27, la cui rigidità flessionale vari secondo la legge lineare:

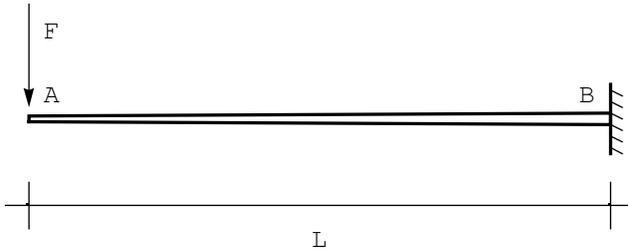


Figura 27 - Trave a mensola a sezione variabile

$$EI(x_3) = k_0 \left(1 + \frac{x_3}{L} \right) \quad (99)$$

L'equazione (5) diviene omogenea, ed ha soluzione (ottenibile, ad esempio, con *Mathematica*):

$$u_2(x_3) = C_0 + C_1 x_3 + C_2 x_3^2 + C_3 (x_3 - L \operatorname{Log}[L + x_3] - x_3 \operatorname{Log}[L + x_3]) \quad (100)$$

Le quattro costanti di integrazione si calcolano imponendo le condizioni ai limiti nell'estremo libero:

$$\begin{aligned} M(x_3 = 0) &= 0 \\ T(x_3 = 0) + F &= 0 \end{aligned} \quad (101)$$

e nell'incastro :

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = L) &= 0 \\ \phi(x_3 = L) &= 0 \end{aligned} \quad (102)$$

Si giunge allora al sistema :

$$\begin{aligned} u_2'(x_3 = 0) &= 0 \\ -(EI)'(x_3 = 0) u_2''(x_3 = 0) - EI(x_3 = 0) u_2'''(x_3 = 0) + F &= 0 \\ u_2(L) &= 0 \\ u_2'(L) &= 0 \end{aligned} \quad (103)$$

che utilizzando la (100), insieme alle sue derivate successive, porta a scrivere:

$$\begin{aligned} -\frac{C_3}{L} + 2C_2 &= 0 \\ \frac{k_0}{L^2} C_3 &= F \\ C_0 + C_1 L + C_2 L^2 + C_4 (L - 2L \operatorname{Log}[2L]) &= 0 \\ C_1 + 2L C_2 - \operatorname{Log}[2L] C_3 &= 0 \end{aligned} \quad (104)$$

Si possono quindi agevolmente ricavare le quattro costanti di integrazione :

$$C_3 = \frac{F L^2}{k_0}$$

$$C_2 = \frac{F L}{2 k_0}$$

$$C_1 = - \frac{F L^2}{k_0} (1 - \text{Log}[2 L])$$

$$C_0 = - \frac{F L^3}{2 k_0} (1 - 2 \text{Log}[2 L])$$

da cui gli abbassamenti, le rotazioni, i momenti ed i tagli :

$$u_2(x_3) = \frac{F L (L + x_3) (-L + x_3 + 2 L \text{Log}[2 L] - 2 L \text{Log}[L + x_3])}{2 k_0} \quad (106)$$

$$\phi(x_3) = \frac{F L (L - x_3 - L \text{Log}[2 L] + L \text{Log}[L + x_3])}{k_0} \quad (107)$$

$$M(x_3) = -F x_3$$

$$T(x_3) = -F$$

Si noti che le caratteristiche non sono influenzate dalla variabilità della sezione. All'estremo libero si hanno i due valori significativi:

$$u_2(x_3 = 0) = \frac{(\text{Log}[4] - 1)}{2} \frac{F L^3}{k_0} \approx 0.193147 \frac{F L^3}{k_0} \quad (108)$$

$$\phi(x_3 = 0) = (1 + \text{Log}[L] - \text{Log}[2 L]) \frac{F L^2}{k_0} \quad (109)$$

Se la stessa trave è caricata da una coppia all'estremo, come in Figura 28, le condizioni ai limiti si scrivono:

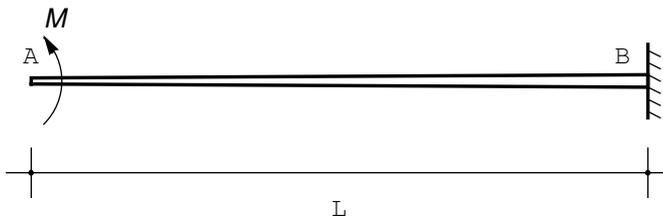


Figura 28 - Trave a mensola a sezione variabile soggetta a coppia all'estremo

$$\begin{aligned} M(x_3 = 0) + M &= 0 \\ T(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (110)$$

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = L) &= 0 \\ \phi(x_3 = L) &= 0 \end{aligned} \quad (111)$$

ossia, in termini di spostamento e successive derivate :

$$\begin{aligned} -EI(x_3 = 0) u_2''(x_3 = 0) + M &= 0 \\ -(EI)'(x_3 = 0) u_2''(x_3 = 0) - EI(x_3 = 0) u_2'''(x_3 = 0) &= 0 \\ u_2(L) &= 0 \\ u_2'(L) &= 0 \end{aligned} \quad (112)$$

Valutando in base alla (100) si giunge al sistema di quattro equazioni:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{C_3}{L} + 2 C_2 \right) k_0 &= M \\ -\frac{2 C_2 k_0}{L} &= 0 \\ C_0 + C_1 L + C_2 L^2 + C_4 (L - 2 L \text{Log}[2 L]) &= 0 \\ C_1 + 2 L C_2 - \text{Log}[2 L] C_3 &= 0 \end{aligned} \quad (113)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{M L^2}{k_0} (\text{Log}[2 L] - 1) \\ C_1 &= -\frac{M L}{k_0} \text{Log}[2 L] \\ C_2 &= 0 \\ C_3 &= -\frac{M L}{k_0} \end{aligned} \quad (114)$$

Ne seguono gli spostamenti e le rotazioni:

$$u_2(x_3) = \frac{M L}{k_0} (L - z - (L + z) \text{Log}[2 L] + (L + z) \text{Log}[L + z]) \quad (115)$$

$$\phi(x_3) = \frac{M L}{k_0} (\text{Log}[2 L] - \text{Log}[L + z]) \quad (116)$$

mentre i momenti sono costanti e pari a $-M$ ed i tagli sono identicamente nulli. I valori dello spostamento e della rotazione all'estremo libero sono, in questo caso:

$$u_2(x_3 = 0) = \frac{M L^2}{k_0} (1 + \text{Log}[L] - \text{Log}[2 L]) \quad (117)$$

$$\phi(x_3 = 0) = \frac{M L}{k_0} \text{Log}[2] \approx 0.69314 \frac{M L}{k_0} \quad (118)$$