13 - Le travi soggette a sforzo assiale

- **[A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 7 febbraio 2013]**

Relazioni fondamentali

Si consideri una trave rettilinea soggetta ai carichi assiali $t(x_3)$. Per essa, si hanno le seguenti equazioni:

Equazioni di equilibrio:

$$\frac{dN(x_3)}{dx_3} = -t(x_3) \qquad (1)$$

Equazioni di congruenza :

$$e_{33} = \frac{du_3(x_3)}{dx_3} \qquad (2)$$

Equazioni costitutive (legge di Hooke):

$$\frac{N(x_3)}{A(x_3)} = E\frac{du_3(x_3)}{dx_3} \qquad (3)$$

Dalla (3) si ottiene lo sforzo normale, che puo' essere derivato ed inserito nella (1), a fornire l'equazione differenziale nell'incognita u_3:

$$(EA)' u_3' + EA u_3'' = -t \qquad (4)$$

dove si sono eliminate le dipendenze funzionali da x_3, e dove l'apice indica derivazione rispetto ad x_3. In ipotesi di sezione costante, la (4) si semplifica in:

$$EA u_3'' = -t \qquad (5)$$

con soluzione :

$$u_3 = C_0 + C_1 x_3 + I_p \qquad (6)$$

e l'integrale particolare I_p dipende dal carico $t(x_3)$ applicato. Le due costanti di integrazione C_0 e C_1 si ottengono imponendo le condizioni ai limiti agli estremi. In ciascun estremo, infatti, si puo' imporre che lo spostamento assiale sia nullo (estremo fisso), oppure che lo spostamento assiale sia permesso (estremo libero). Nel primo caso occorrera' imporre $u_3 = 0$, laddove nell'estremo libero dovra' annullarsi lo sforzo normale, e quindi dovra' essere $u_3' = 0$.

L' approccio energetico

L' energia potenziale connessa ad una trave di luce L, soggetta al carico assiale $t(x_3)$, puo' scriversi come:

$$E_t = \frac{EA}{2}\int_0^L u_3'^2 \, dx_3 - \int_0^L t u_3 \, dx_3 = E_t\left(u_3, u_3'\right) \qquad (7)$$

Si noti che per semplicita' si e' gia' ipotizzato che la rigidezza assiale EA sia costante. La variazione δE_t si calcola come:

$$\delta E_t = E_t\left(u_3 + \delta u_3,\ u_3' + \delta u_3'\right) - E_t\left(u_3,\ u_3'\right) = \frac{EA}{2}\int_0^L\left(u_3' + \delta u_3'\right)^2 dx_3 - \int_0^L t\,(u_3 + \delta u_3)\,dx_3 - \frac{EA}{2}\int_0^L u_3'^2\,dx_3 + \int_0^L t u_3\,dx_3 \qquad (8)$$

e svolgendo i quadrati e semplificando :

$$\delta E_t = EA\int_0^L u_3'\,\delta u_3'\,dx_3 - \int_0^L t\,\delta u_3\,dx_3 + \frac{EA}{2}\int_0^L \delta u_3'^2\,dx_3 \qquad (9)$$

Il principio di stazionarieta' dell'energia potenziale totale impone l'annullarsi della parte lineare della variazione, e quindi dovra' essere:

$$\delta_1 E_t = EA\int_0^L u_3'\,\delta u_3'\,dx_3 - \int_0^L t\,\delta u_3\,dx_3 = 0 \qquad (10)$$

Integrando per parti il primo integrale si puo' scrivere:

$$\left[EA u_3'\,\delta u_3\right]_0^L - EA\int_0^L u_3''\,\delta u_3\,dx_3 - \int_0^L t\,\delta u_3\,dx_3 = 0 \qquad (11)$$

Dovranno separatamente annullarsi l'integrale ed i termini finiti; per l'arbitrarieta' di δu_3 si ritrova quindi la (5):

$$EA\,u_3'' + t = 0 \qquad (12)$$

mentre in ciascuno degli estremi potra' essere nullo lo spostamento oppure lo sforzo normale.

Esempio n .1

Si consideri l'asta di Figura, bloccata a sinistra e libera a destra, di rigidezza EA costante, e soggetta al carico assiale distribuito con legge lineare tra il valore t_0 a sinistra, ed il valore nullo a destra. Si calcoli lo spostamento e lo sforzo normale.

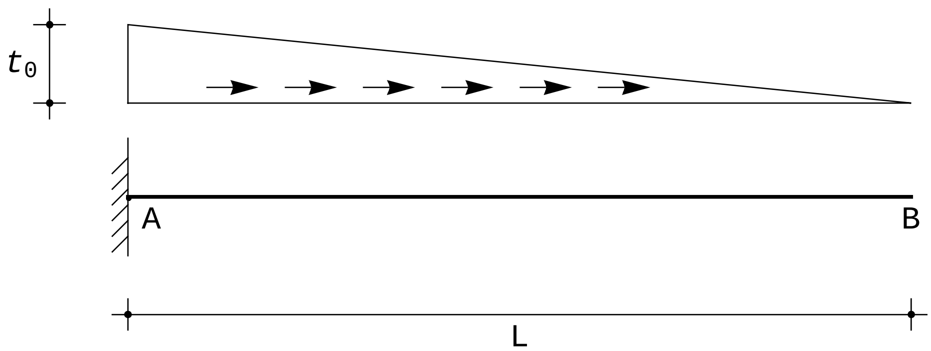


Figura 1 - Un'asta soggetta a carico assiale linearmente distribuito

■ Prima soluzione

La struttura e' isostatica, in quanto esiste una sola incognita reattiva, la reazione orizzontale dell'estremo A, ed una sola equazione di equilibrio significativa, l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale. Cio' significa che e' possibile dedurre lo sforzo normale con considerazioni di equilibrio, e poi calcolare gli spostamenti.
Poiche' il carico e' distribuito con legge lineare, lo sforzo normale sara' una funzione quadratica:

$$N(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 \tag{13}$$

D' altro canto, si possono scrivere le tre condizioni:

$$\begin{aligned} &N(x_3 = 0) = -R_{Ah} = \frac{1}{2} t_0 L \\ &N(x_3 = L) = 0 \\ &\frac{dN}{dx_3}(x_3 = L) = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

che permettono la determinazione delle tre costanti a_i. La prima condizione deriva dall'equilibrio del concio in A, la seconda dall'equilibrio del concio in B, la terza deriva dall'annullarsi del carico in B. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} &a_0 = \frac{1}{2} t_0 L \\ &a_0 + a_1 L + a_2 L^2 = 0 \\ &a_1 + 2 a_2 L = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

e lo sforzo normale e' fornito da :

$$N(x_3) = \frac{1}{2} t_0 L - t_0 x_3 + \frac{t_0}{2L} x_3^2 = \frac{t_0}{2L} (L - x_3)^2 \tag{16}$$

Lo spostamento si ottiene per integrazione, a partire dalla (3):

$$u_3(x_3) = \int \frac{N}{EA} dx_3 = \frac{t_0}{EA} \left(\frac{L}{2} x_3 - \frac{x_3^2}{2} + \frac{x_3^3}{6L} \right) + a_3 \tag{17}$$

e la costante di integrazione a_3 svanisce imponendo l'equazione di congruenza in A:

$$u_3(x_3 = 0) = 0 \tag{18}$$

In definitiva, quindi, lo spostamento assiale e' esprimibile come:

$$u_3(x_3) = \frac{t_0}{6\,EA} \frac{x_3}{L} \left(3 L^2 - 3 L x_3 + x_3^2\right) \tag{19}$$

■ Seconda soluzione

Il carico si esprime analiticamente come:

$$t(x_3) = t_0 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \tag{20}$$

e quindi l'equazione differenziale (12) si scrive:

$$u_3'' = -\frac{t_0}{EA}\left(1-\frac{x_3}{L}\right) \tag{21}$$

ed integrando due volte :

$$u_3 = -\frac{t_0}{EA}\left(\frac{x_3^2}{2}-\frac{x_3^3}{6\,L}\right)+c_0\,x_3+c_1 \tag{22}$$

Le due costanti di integrazione si determinano a partire dalle due condizioni ai limiti negli estremi A e B. In A, per la congruenza dovra' essere:

$$u_3\,(x_3=0)=0 \tag{23}$$

mentre in B, per l'equilibrio del concio, dovra' essere nullo lo sforzo normale, ossia la derivata prima dello spostamento:

$$u_3'\,(x_3=L)=0 \tag{24}$$

Utilizzando la (22), quindi, si hanno le due equazioni :

$$\begin{aligned} &c_1 = 0 \\ &-\frac{t_0\,L}{2\,EA}+c_0\,L+c_1=0 \end{aligned} \tag{25}$$

da cui subito :

$$\begin{aligned} &c_1 = 0 \\ &c_0 = \frac{t_0}{2\,EA} \end{aligned} \tag{26}$$

e quindi:

$$u_3\,(x_3) = \frac{t_0}{6\,EA}\,\frac{x_3}{L}\left(3\,L^2-3\,L\,x_3+x_3^2\right) \tag{27}$$

coincidente con la (19). Da questa si puo' dedurre lo sforzo normale:

$$N\,(x_3) = EA\,u_3' = \frac{t_0}{6}\left(3\,L-6\,x_3+3\,\frac{x_3^2}{L}\right) = \frac{t_0\,(L-x_3)^2}{2\,L} \tag{28}$$

coincidente con la (16).

■ Il tracciamento dei diagrammi

Il diagramma dello sforzo normale, come gia' detto, e' una funzione quadratica, parte in A con un valore pari alla reazione orizzontale (cambiata di segno), e decresce monotonicamente fino ad annullarsi in B. Inoltre in B il diagramma avra' tangente orizzontale, presentandosi quindi come in Figura:

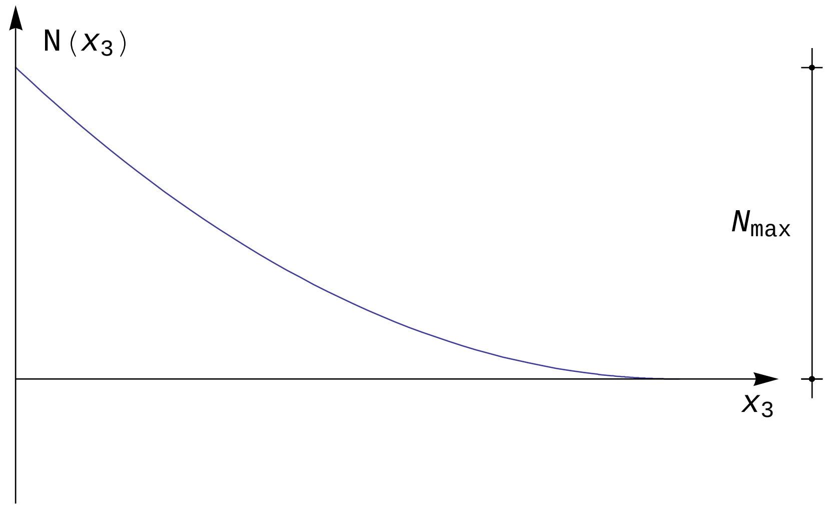


Figura 2. Lo sforzo normale nell'asta di Figura 1

Gli spostamenti orizzontali, invece, varieranno con legge cubica, dovranno annullarsi in A, crescere monotoni camente (in quanto lo sforzo normale e' ovunque positivo) e giungere in B al valore massimo, con tangenza orizzontale (in quanto lo sforozo normale si annulla in B):

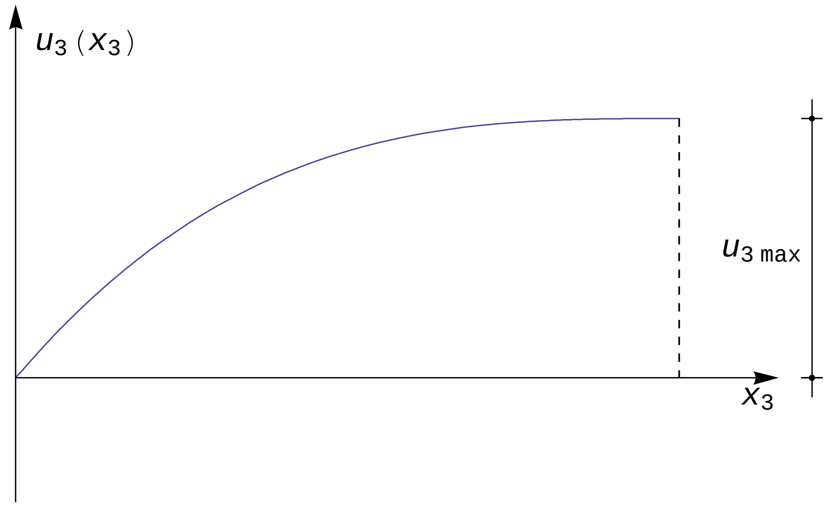


Figura 3. Gli spostamenti assiali per l'asta di Figura 1

■ I valori notevoli

Uno sguardo ai diagrammi permette di identificare due valori notevoli, corrispondenti ai valori massimi dello sforzo normale e dello spostamento assiale:

$$N_{max} = N\,(x_3 = 0) = \frac{t_0\,L}{2} \tag{29}$$

$$u_{3\,max} = u_3\,(x_3 = L) = \frac{t_0\,L^2}{6\,EA} \tag{30}$$

Esempio n .2 - Vincoli elasticamente cedevoli

Si consideri l'asta di Figura 4, di rigidezza assiale costante, soggetta ad un carico uniformemente distribuito lungo tutta la luce, con un vincolo fisso a sinistra ed una vincolo elasticamente cedevole a destra. Se k_B e' la rigidezza assiale del vincolo, si potra' ipotizzare una relazione lineare tra la reazione del vincolo ed il corrispondente spostamento:

$$R_B = -k_B u_{3B} \tag{31}$$

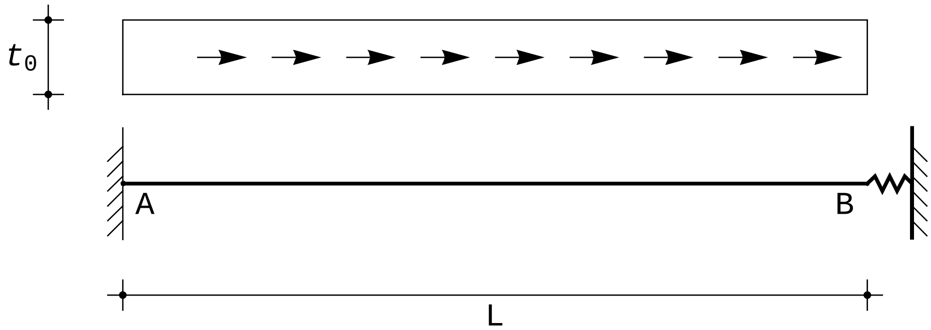


Figura 4 - Una trave a vincoli elasticamente cedevoli

Nel vincolo risiede quindi l'energia elastica fornita da:

$$L_B = \frac{1}{2} k_B u_{3B}^2 \tag{32}$$

La condizione ai limiti da imporre in B puo' dedursi in via energetica o in via diretta:

■ L' approccio energetico

L' energia potenziale connessa ad una trave di luce L, soggetta al carico assiale $t(x_3)$, puo' scriversi come:

$$E_t = \frac{EA}{2}\int_0^L u_3'^2\, dx_3 - \int_0^L t u_3\, dx_3 + \frac{1}{2} k_B u_3^2(L) = E_t\left(u_3, u_3'\right) \tag{33}$$

Si noti che per semplicita' si e' gia' ipotizzato che la rigidezza assiale EA sia costante. La variazione δE_t si calcola come:

$$\begin{aligned}\delta E_t = {} & E_t\left(u_3 + \delta u_3, u_3' + \delta u_3'\right) - E_t\left(u_3, u_3'\right) = \\ & \frac{EA}{2}\int_0^L \left(u_3' + \delta u_3'\right)^2 dx_3 - \\ & \int_0^L t\,(u_3 + \delta u_3)\, dx_3 + \frac{1}{2} k_B\,(u_3(L) + \delta u_3(L))^2 - \\ & \frac{EA}{2}\int_0^L u_3'^2\, dx_3 + \int_0^L t u_3\, dx_3 - \frac{1}{2} k_B u_3^2(L)\end{aligned} \tag{34}$$

e svolgendo i quadrati e semplificando :

$$\delta E_t = EA\int_0^L u_3' \, \delta u_3' \, dx_3 - \int_0^L t \, \delta u_3 \, dx_3 + \frac{EA}{2}\int_0^L \delta u_3'^2 \, dx_3 + k_B \left(u_3(L)\, \delta u_3(L)\right) + \frac{1}{2} k_B \, \delta u_3^2(L) \qquad (35)$$

Il principio di stazionarieta' dell'energia potenziale totale impone l'annullarsi della parte lineare della variazione, e quindi dovra' essere:

$$\delta_1 E_t = EA\int_0^L u_3' \, \delta u_3' \, dx_3 - \int_0^L t \, \delta u_3 \, dx_3 + k_B \left(u_3(L)\, \delta u_3(L)\right) = 0 \qquad (36)$$

Integrando per parti il primo integrale si puo' scrivere:

$$\left[EAu_3' \, \delta u_3\right]_0^L - EA\int_0^L u_3'' \, \delta u_3 \, dx_3 - \int_0^L t \, \delta u_3 \, dx_3 + k_B \left(u_3(L)\, \delta u_3(L)\right) = 0 \qquad (37)$$

Dovranno separatamente annullarsi l'integrale ed i termini finiti; per l'arbitrarieta' di δu_3 si ritrova quindi la (5):

$$EA\, u_3'' + t = 0 \qquad (38)$$

mentre in ciascuno degli estremi dovra' essere:

$$EAu_3'(0)\, \delta u_3(L) = 0 \qquad (39)$$

$$\left[EAu_3'(L) + k_B\, u_3(L)\right] \delta u_3(L) = 0 \qquad (40)$$

L' approccio geometrico

L' equilibrio del concio in B impone che sia:

$$-N(L) + R_B = 0 \qquad (41)$$

e poiche':

$$N(L) = EA\, u_3'(L)$$
$$R_B = -k_B\, u_3(L) \qquad (42)$$

si giunge a scrivere :

$$EAu_3'(L) + k_B\, u_3(L) = 0 \qquad (43)$$

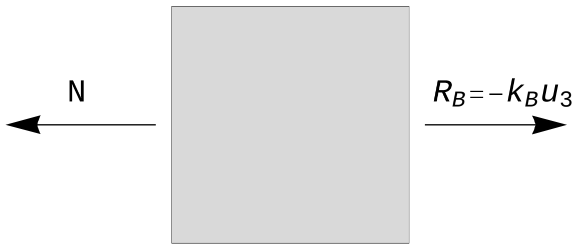


Figura 5 - L'equilibrio del concio

La deduzione di sforzo normale e spostamenti

In presenza di carico costante, gli spostamenti saranno esprimibili come:

$$u_3(x_3) = -\frac{t_0}{2\,EA}x_3^2 + c_0 + c_1 x_3 \tag{44}$$

e le due condizioni ai limiti, che permettono il calcolo di c_0 e c_1 saranno date da:

$$\begin{gathered} u_3(0) = 0 \longrightarrow c_0 = 0 \\ EAu_3'(L) + k_B u_3(L) = \\ 0 \longrightarrow -t_0 L + c_1 EA L - k_B \frac{t_0}{2\,EA} L^2 + k_B c_1 L = 0 \end{gathered} \tag{45}$$

e quindi :

$$c_1 = \frac{t_0}{EA + k_B}\left(1 + \frac{k_B L}{2\,EA}\right) \tag{46}$$

In definitiva, gli spostamenti sono espressi da :

$$u_3(x_3) = -\frac{t_0}{2\,EA}x_3^2 + \frac{t_0}{EA + k_B}\left(1 + \frac{k_B L}{2\,EA}\right)x_3 \tag{47}$$

e gli sforzi normali da :

$$N = EA\,u_3'(x_3) = \frac{t_0\,(k_B\,(L - 2\,x_3) - 2\,EA\,(-1 + x_3))}{2\,(EA + k_B)} \tag{48}$$

■ I due casi limite

Al variare del valore della rigidezza, l'estremo destro passa dall'essere libero (per $k_B = 0$) all'essere bloccato (per $k_B=\infty$). Ambedue questi casi limite di vincolo paerfetto possono ritrovarsi con facilita':

$$\text{Simplify}\left[\text{Limit}\left[-\frac{t_0}{2\,EA}x_3^2 + \frac{t_0}{EA + k_B}\left(1 + \frac{k_B L}{2\,EA}\right)x_3,\ k_B \to 0\right]\right]$$

$$-\frac{t_0\,(-2 + x_3)\,x_3}{2\,EA}$$

$$\text{Simplify}\left[\text{Limit}\left[-\frac{t_0}{2\,EA}x_3^2 + \frac{t_0}{EA + k_B}\left(1 + \frac{k_B L}{2\,EA}\right)x_3,\ k_B \to \infty\right]\right]$$

$$\frac{t_0\,(L - x_3)\,x_3}{2\,EA}$$

Esempio 3 - Un' asta indentata

L'asta di Figura 6 presenta due luci laterali, di rigidezza assiale 2EA, ed un tratto centrale di rigidezza assiale EA. Gli estremi sono fissi, la parte centrale e' soggetta ad una stesa di carico costante di intensita' t, mentre nel punto di collegamento tra la luce centrale e la luce di destra agisce una forza assiale concentrata F di intensita' tL. Si calcolino gli spostamenti assiali e gli sforzi normali.

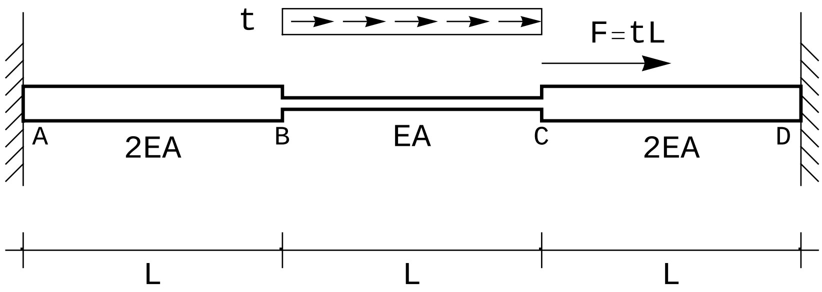


Figura 6 - Un'asta a sezione variabile con discontinuita'

La trave e' iperstatica, e l'approccio migliore sembra la scrittura diretta dell'equazione differenziale della linea elastica. Si hanno quindi le tre equazioni:

$$\begin{aligned} u_3'' &= 0 \\ v_3'' &= -\frac{t}{EA} \\ w_3'' &= 0 \end{aligned} \qquad (49)$$

valide rispettivamente da A a B, da B a C, e da C a D. Le soluzioni sono quindi:

$$\begin{aligned} u_3 &= a_0 + a_1 x_3 \\ v_3 &= b_0 + b_1 x_3 - \frac{t}{2\,EA} x_3^2 \\ w_3 &= c_0 + c_1 x_3 \end{aligned} \qquad (50)$$

Le sei costanti di integrazione si determinano imponendo la congruenza degli spostamenti agli estremi e nei punti B e C, e l'equilibrio dei conci B e C. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} & u_3(0) = 0 \\ & u_3(L) = v_3(0) \\ & 2\,EA\,u_3'(L) = EA\,v_3'(0) \\ & v_3(L) = w_3(0) \\ & EA\,v_3'(L) = 2\,EA\,w_3'(0) + F \\ & w_3(L) = 0 \end{aligned} \qquad (51)$$

da cui il sistema algebrico lineare:

$$\begin{aligned} & a_0 = 0 \\ & a_0 + a_1 L = b_0 \\ & 2\,a_1 = b_1 \end{aligned}$$

$$b_0 + b_1 L - \frac{t}{2\,EA} L^2 = c_0$$

$$b_1 - \frac{t}{EA} L = 2\,c_1 + \frac{F}{EA} \longrightarrow b_1 = 2\,c_1 + \frac{2\,tL}{EA}$$

$$c_0 + c_1 L = 0$$

con soluzione :

$$a_1 = \frac{3}{8}\frac{tL}{EA} \qquad b_0 = \frac{3}{8}\frac{tL^2}{EA} \qquad b_1 = \frac{3}{4}\frac{tL}{EA} \qquad c_0 = \frac{5}{8}\frac{tL^2}{EA} \qquad c_1 = -\frac{5}{8}\frac{tL}{EA} \tag{53}$$

Gli spostamenti sono percio' esplicitabili come :

$$u_3 = \frac{3}{8}\frac{tL}{EA} x_3 \qquad v_3 = \frac{3}{8}\frac{tL^2}{EA} + \frac{3}{4}\frac{tL}{EA} x_3 - \frac{t}{2\,EA} x_3^2 \qquad w_3 = \frac{5}{8}\frac{tL^2}{EA} - \frac{5}{8}\frac{tL}{EA} x_3 \tag{54}$$

mentre lo sforzo normale e' dato da :

$$N_1(x_3) = 2\,EA\,u_3' = \frac{3}{4} tL \qquad N_2(x_3) = EA\,v_3' = \frac{3}{4} tL - t\,x_3 \qquad N_3(x_3) = 2\,EA\,w_3' = -\frac{5}{4} tL \tag{55}$$

rispettivamente, nei tre tratti AB, BC e BD.

■ Il calcolo delle reazioni

Le due reazioni in A e D sono fornite, rispettivamente, da:

$$R_{Ah} = -N_1(0) = -\frac{3}{4} tL \qquad R_{Dh} = N_3(L) = -\frac{5}{4} tL \tag{56}$$

Si noti che l'equilibrio alla traslazione orizzontale e' verificato:

$$R_{Ah} + R_{Dh} + tL + F = 0 \tag{57}$$

Il tracciamento dei diagrammi

Il diagramma dello sforzo normale non presenta alcuna difficolta' : da A a B la trave e' tesa, con sforzo normale costante, da C a D la trave e' compressa, con sforzo normale ancora costante; in C esiste una forzo assiale concentrata F, e quindi un salto nel diagramma di valore pari a tL. Nel tratto centrale lo sforzo normale varia con legge lineare tra $\frac{3}{4}$ tL a sinistra e - $\frac{1}{4}$ tL a destra.

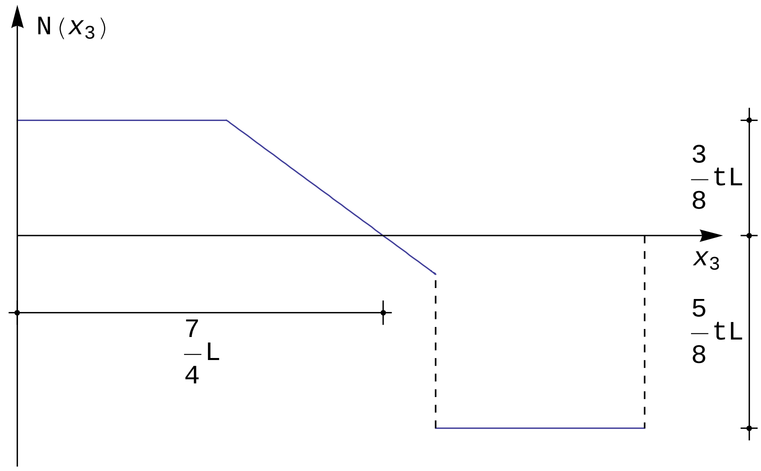


Figura 7 - Il diagramma dello sforzo normale per la trave di Figura 6

Ne segue, con una semplice proporzione geometrica, che lo sforzo normale si annulla a $\frac{7}{4}L$.

Per tracciare il diagramma degli spostamenti assiali, si consideri che agli estremi lo spostamento dovra' essere nullo, dovra' variare con legge lineare nei due tratti laterali e con legge quadratica nel tratto centrale. Inoltre, in $x_3 = \frac{7}{4}L$ lo spostamento sara' massimo, in corrispondenza del punto di nullo dello sforzo normale. Infine, gli spostamenti cresceranno fino a tal valore, nella regione dove la trave e' tesa, per poi decrescere nella parte di destra, dove la trave e' compressa.

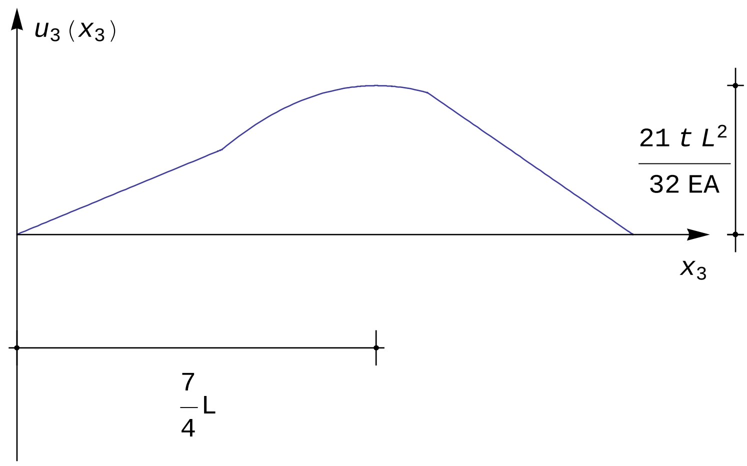


Figura 8 - Il diagramma degli spostamenti assiali per la trave di Figura 6

Esempio 4 - Il caso della sezione variabile

Se la rigidezza assiale dell' asta in esame non e' costante, l'equazione differenziale che regge il problema e' la (4), ossia e' un'equazione del secondo ordine a coefficienti variabili. Come tale, non sempre e' agevole, o anche possibile, ottenere una sua soluzione in termini di funzioni elementari; tuttavia, l'utilizzo dei software di integrazione simbolica facilita grandemente la ricerca dei possibili integrali. In questo esempio si fara' uso del software *Mathematica* per studiare la legge di variazione:

$$EA\,(x_3) = EA_0 \left(1 + \alpha\,\frac{x_3}{L}\right)^n \tag{58}$$

Il caso n=2

L' equazione differenziale diviene :

$$EA_0 \left(1 - \alpha\,\frac{x_3}{L}\right)^2 u_3'' - \frac{2\,EA_0\,\alpha}{L}\left(1 - \frac{z\,\alpha}{L}\right) u_3' = -t \tag{59}$$

con soluzione :

$$u_3 = -\frac{t\,L^3}{EA_0\,\alpha^2\,(L - \alpha x_3)} - \frac{t\,L^2\,\mathrm{Log}[L - \alpha\,x_3]}{EA_0\,\alpha^2} + \frac{a_1}{\alpha\,(L - \alpha\,x_3)} + a_2 \tag{60}$$

La trave iperstatica ad estremi fissi

Nel caso della trave ad estremi fissi, le due condizioni ai limiti impongono :

$$u_3\,(0) = 0 \longrightarrow -\frac{t\,L^2}{EA_0\,\alpha^2} - \frac{t\,L^2\,\mathrm{Log}[L]}{EA_0\,\alpha^2} + \frac{a_1}{L\,\alpha} + a_2 = 0 \tag{61}$$

$$u_3\,(L) = 0 \longrightarrow \frac{t\,L^3\,(1 - (\alpha - 1)\,\mathrm{Log}[L - L\,\alpha]) - EA_0\,\alpha\,a_1 + L\,EA_0\,(\alpha - 1)\,\alpha^2\,a_2}{L\,EA_0\,(\alpha - 1)\,\alpha^2} = 0 \tag{62}$$

con soluzione :

$$a_1 = \frac{tL^3}{\alpha^2\,EA_0}\,(\alpha - (\alpha - 1)\,\mathrm{Log}[1 - \alpha]) \tag{63}$$

$$a_2 = \frac{tL^2}{\alpha^3\,EA_0}\,(-\mathrm{Log}[1 - \alpha] + \alpha\,\mathrm{Log}[L - L\,\alpha]) \tag{64}$$

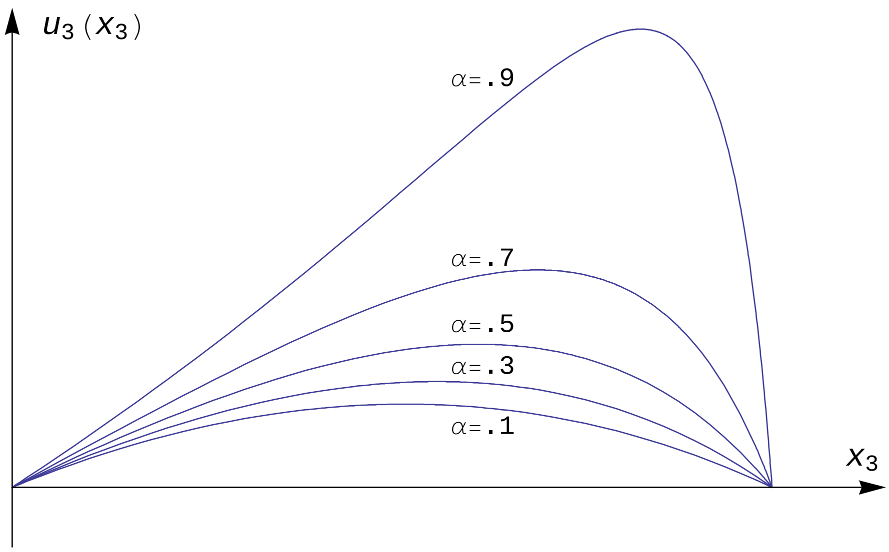
Gli spostamenti sono quindi forniti da :

$$u_3\,(x_3) = \frac{tL^2}{\alpha^2\,EA_0\,(L - \alpha\,x_3)}\,((L - x_3\,\alpha)\,\mathrm{Log}[L] + (x_3 - x_3\,\alpha)\,\mathrm{Log}[1 - \alpha] + (-L + x_3\,\alpha)\,\mathrm{Log}[L - x_3\,\alpha]) \tag{65}$$

e gli sforzi normali da :

$$N(x_3) = -t\,x_3 + \frac{t\,L}{\alpha^2}\,(\alpha - (\alpha - 1)\,\mathrm{Log}[1 - \alpha]) \qquad (66)$$

In Figura 9 sono riportati gli spostamenti assiali e gli sforzi normali per cinque valori del coefficiente α



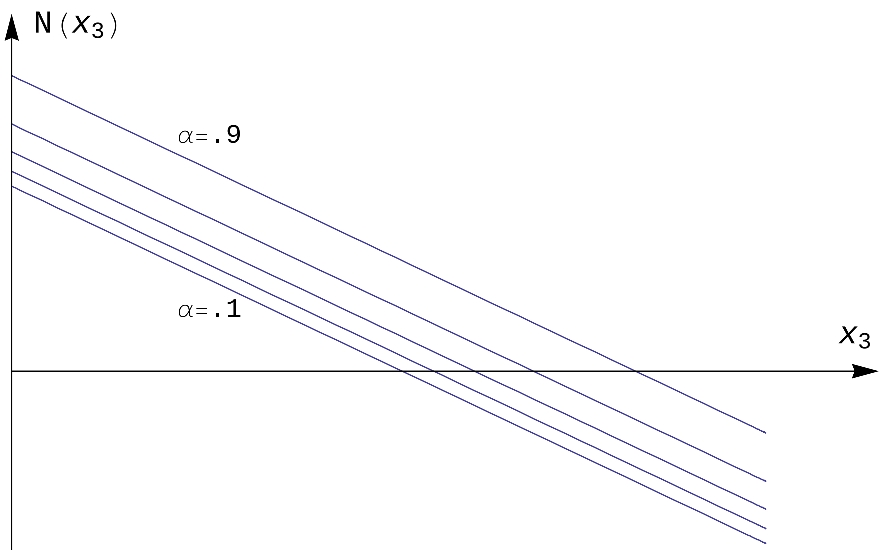


Figura 9 - Spostamenti assiali e sforzi normali per trave ad estremi fissi e sezione variabile secondo la (58) con n=2

- **La trave isostatica**

Se l'estremo di destra e' libero, la seconda condizione ai limiti deve modificarsi, perche' ora lo spostamento e' ammesso, e di conseguenza deve annullarsi lo sforzo normale:

$$u_3'(L) = 0 \longrightarrow \frac{t\,L^3 + EA_0\,a_1}{EA_0\,L^2\,(\alpha - 1)^2} = 0 \qquad (67)$$

Le due costanti di integrazione sono ora :

$$a_1 = \frac{tL^3}{EA_0}$$

$$a_2 = \frac{tL^2}{EA_0\,\alpha^2}\,(1 - \alpha + \mathrm{Log}[L])$$

Ne seguono gli spostamenti e gli sforzi assiali :

$$u_3\,(x_3) = \frac{pL^2}{EA_0}\,\frac{x_3\,(\alpha - 1)\,\alpha + (L - x_3\,\alpha)\,\mathrm{Log}[L] + (-L + x_3\,\alpha)\,\mathrm{Log}[L - x_3\,\alpha]}{\alpha^2\,(L - x_3\,\alpha)} \qquad (69)$$

$$N\,(x_3) = t\,(L - x_3) \qquad (70)$$

Si noti subito come, in questo caso, lo sforzo normale non dipenda dalla variabilita' della sezione. Il diagramma degli spostamenti e' riportato in Figura 10: si noti come la tangente in L sia comunque orizzontale.

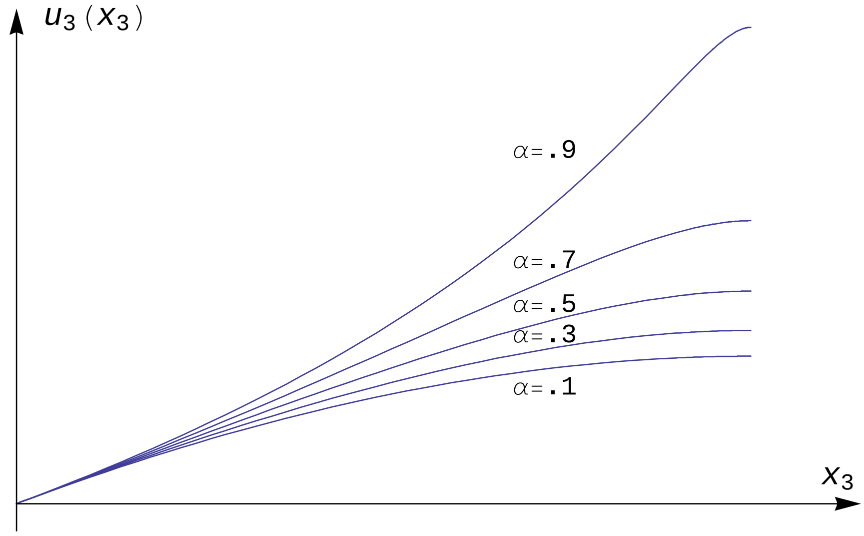


Figura 10 - Spostamenti assiali per trave ad estremi fisso e libero, e sezione variabile secondo la (58) con n=2

■ Esercizio n.1

Utilizzare un programma di calcolo simbolico per ottenere gli spostamenti e gli sforzi assiali di una trave ad estremi fissi, a sezione variabile secondo la (58), per n = $\sqrt{2}$, n=1, n=3 ed n=4.

Figure