10 - Flessione deviata e sforzo normale eccentrico

- **[A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 29 settembre 2011]**

Si esaminano alcuni casi di sollecitazione composta del tipo normale, ossia di flessione deviata e flessione composta.

Un profilato sottile

Si consideri una trave con sezione retta fornita dal profilato di Figura 1, soggetta ad una coppia flettente con asse di sollecitazione orizzontale.

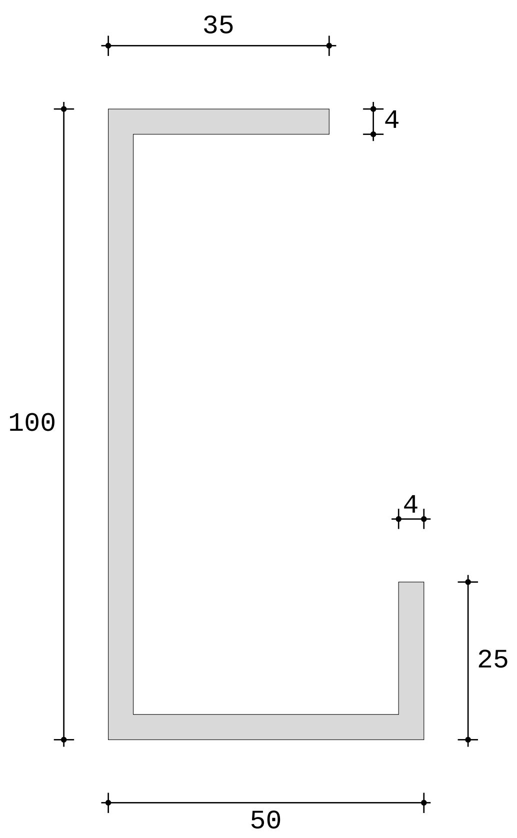

Figura 1 - Il profilato sottile in esame

■ Il calcolo delle caratteristiche di inerzia

Si studia preventivamente il profilato al fine di:
- calcolare il baricentro della sezione
- calcolare la matrice dei momenti di inerzia baricentrali
- calcolare i momenti di inerzia centrali, insieme alle direzioni centrali di inerzia

Il calcolo del baricentro

Si divida la sezione nei quattro rettangoli di figura, e si definiscano - per speditezza di calcolo - quattro vettori:

b = {4,42,4,31} contenente le basi dei rettangoli
h = {25,4,100,4} contenente le altezze dei rettangoli
d_{x_1}= {12.5, 2,50,98} contenente le distanze dei baricentri dei rettangoli dall'asse orizzontale x_1
d_{x_2}= {48,25,2,19.5} contenente le distanze dei baricentri dei rettangoli dall'asse verticale x_2

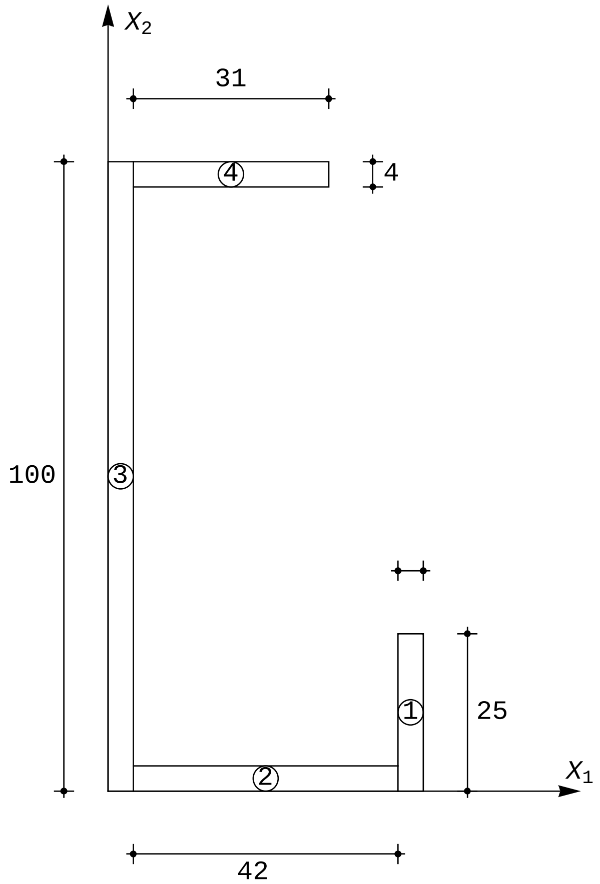

Figura 2 - I quattro rettangoli in cui e' scomposta la sezione, e gli assi di primo riferimento

Con queste definizioni, si possono calcolare immediatamente l'area della sezione retta ed i due momenti statici rispetto agli assi x_1 e x_2:

$$A = \sum_{i=1}^{4} b_i h_i = 792\ \text{mm}^2 \quad (1)$$

$$S_{x_1} = \sum_{i=1}^{4} b_i h_i d_{x_1 i} = 33\,738\ \text{mm}^3 \quad (2)$$

$$S_{x_2} = \sum_{i=1}^{4} b_i h_i d_{x_2 i} = 12\,218\ \text{mm}^3 \quad (3)$$

Ne segue che le coordinate del baricentro saranno fornite dalle formule:

$$x_{G1} = \frac{S_{x_2}}{A} = 15.4268\ \text{mm}$$
$$x_{G2} = \frac{S_{x_1}}{A} = 42.5985\ \text{mm}$$

- **Il calcolo della matrice dei momenti di inerzia baricentrali**

Si inizi a calcolare i momenti di inerzia rispetto agli assi di primo riferimento $x_1$ed x_2. A cio' fare, si calcolano - rettangolo per rettangolo - i momenti di inerzia rispetto ai propri assi baricentrali, aggiungendo poi il momento di trasporto.

$$I_{11} = \sum_{i=1}^{4} \frac{b_i h_i^3}{12} + \sum_{i=1}^{2} b_i h_i d_{x_1 i}^2 = 2.54612 \times 10^6\ \text{mm}^4 \tag{5}$$

$$I_{22} = \sum_{i=1}^{4} \frac{b_i^3 h_i}{12} + \sum_{i=1}^{2} b_i h_i d_{x_2 i}^2 = 419\,444 \times 10^6\ \text{mm}^4 \tag{6}$$

$$I_{12} = \sum_{i=1}^{4} b_i h_i d_{x_1 i} d_{x_2 i} = 345\,364\ \text{mm}^4 \tag{7}$$

Infine, si usa il teorema di Huyghens per calcolare i richiesti momenti di inerzia baricentrici:

$$\begin{aligned} I_{22}^G &= I_{22} - A x_{G2}^2 = 1.10894 \times 10^6\ \text{mm}^4 \\ I_{11}^G &= I_{11} - A x_{G1}^2 = 230\,960\ \text{mm}^4 \\ I_{12}^G &= I_{12} - A x_{G1} x_{G2} = -175\,104\ \text{mm}^4 \end{aligned} \tag{8}$$

- **Il calcolo dei momenti di inerzia centrali e delle rispettive direzioni**

Assegnata la matrice dei momenti di inerzia baricentrali:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{22} & I_{12} \\ I_{12} & I_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 230\,960 & -175\,104 \\ -175\,104 & 1.10894 \times 10^6 \end{pmatrix} \tag{9}$$

l'equazione secolare si scrivera':

$$\lambda^2 - \text{Tr}(\mathbf{I})\,\lambda + \text{Det}(\mathbf{I}) = 0 \tag{10}$$

con radici:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\equiv I_1 = 1.14257 \times 10^6 \\ \lambda_2 &\equiv I_2 = 197\,325 \end{aligned} \tag{11}$$

La matrice dei momenti di inerzia e' allora divenuta:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 197\,325 & 0 \\ 0 & 1.14257 \times 10^6 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Le rispettive direzioni centrali si ottengono risolvendo i due sistemi:

$$\begin{aligned} (I_{22} - I_1)\, n_{11} + I_{12}\, n_{21} &= 0 \\ I_{21}\, n_{11} + (I_{11} - I_1)\, n_{21} &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

ossia, numericamente:

$$\begin{aligned} 911\,611\, n_{11} + 175\,104\, n_{21} &= 0 \\ 175\,104\, n_{11} + 33\,634.4\, n_{21} &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

con soluzione normalizzata (-0.188634, 0.982047), e:

$$\begin{aligned} (I_{22} - I_2)\, n_{12} + I_{12}\, n_{22} &= 0 \\ I_{21}\, n_{12} + (I_{11} - I_2)\, n_{22} &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

ossia, numericamente:

$$\begin{aligned} 33\,634.4\, n_{11} - 175\,104\, n_{21} &= 0 \\ 175\,104\, n_{11} - 911\,611\, n_{21} &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

con soluzione normalizzata (0.982047, 0.188634).

Ne segue che la prima direzione principale sara' inclinata, rispetto all'asse orizzontale, di un angolo ϕ pari a 0.189771 radianti, ossia circa 10.87 gradi.

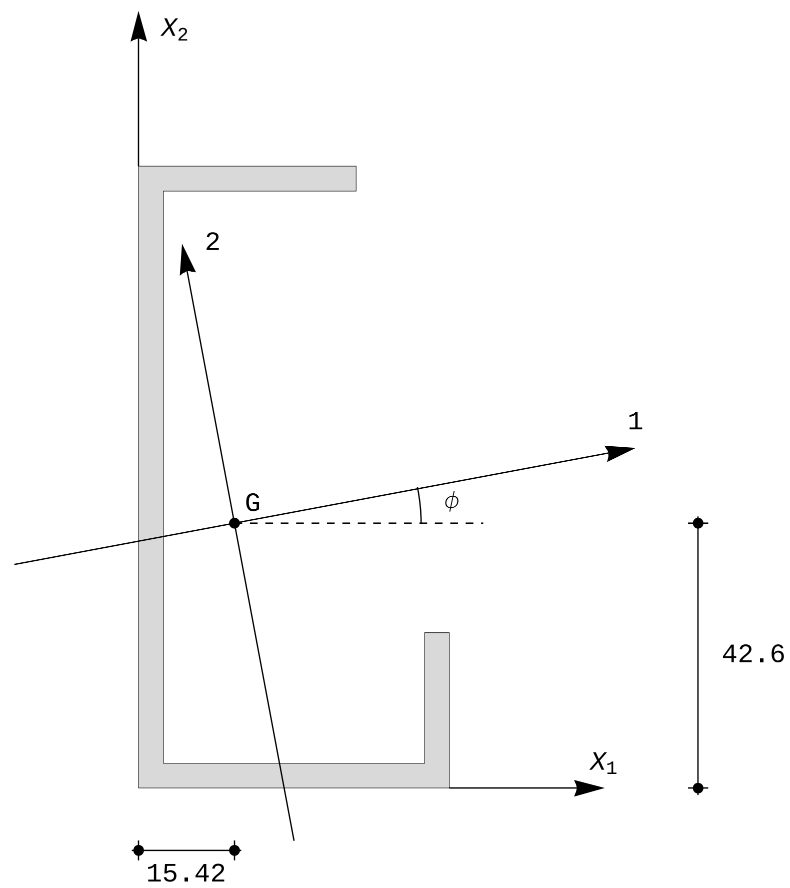

Figura 3 - Gli assi centrali di inerzia

■ Il diagramma delle tensioni

Scomponendo la coppia $\mathcal{M}$ = -10000 kgmm (ossia diretta verso il basso) lungo i due assi centrali di inerzia si avranno le due coppie:

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}\ \text{Cos}(\phi) = -1886.34\ \text{kgmm} \tag{17}$$

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}\ \text{Cos}(\phi) = -9820.47\ \text{kgmm} \tag{18}$$

e potranno studiarsi separatamente le due flessioni rette secondo gli assi centrali ξ_1 e ξ_2.

Nel primo caso si ottiene il diagramma di Figura 4. I due punti significativi in cui la tensione assume i valori estremi sono i vertici 2 e 10. Le coordinate di 2 nel riferimento originario sono (50,0), sicche' nel riferimento traslato nel baricentro si hanno le coordinate $(50 - x_{G1}, -x_{G2})$ = (34.5732, -42.5985), e nel riferimento centrale si avranno le coordinate:

$$\begin{pmatrix} \xi_{21} \\ \xi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 34.5732 \\ -42.5985 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25.917 \\ -48.3554 \end{pmatrix} \tag{19}$$

La formula di Navier:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1}{I_1} \xi_2 \tag{20}$$

fornisce allora nel punto 2 la tensione normale positiva:

$$\sigma_{33}^{(2)} = \frac{-1886.34}{1.14257 \times 10^6} (-48.3554) = 0.0798329 \text{ kg mm}^{-2} \tag{21}$$

Nel punto simmetrico 10 invece, le coordinate originarie sono (0,100), quelle baricentriche (-15.4268,57.4017), e quindi nel riferimento centrale il punto 10 avra' coordinate (-4.32195, 59.281). Infine, dalla (19) si ottiene la tensione:

$$\sigma_{33}^{(10)} = \frac{-188\,634}{1.14257 \times 10^6} 59.281 = -0.0978707 \text{ kg mm}^{-2} \tag{22}$$

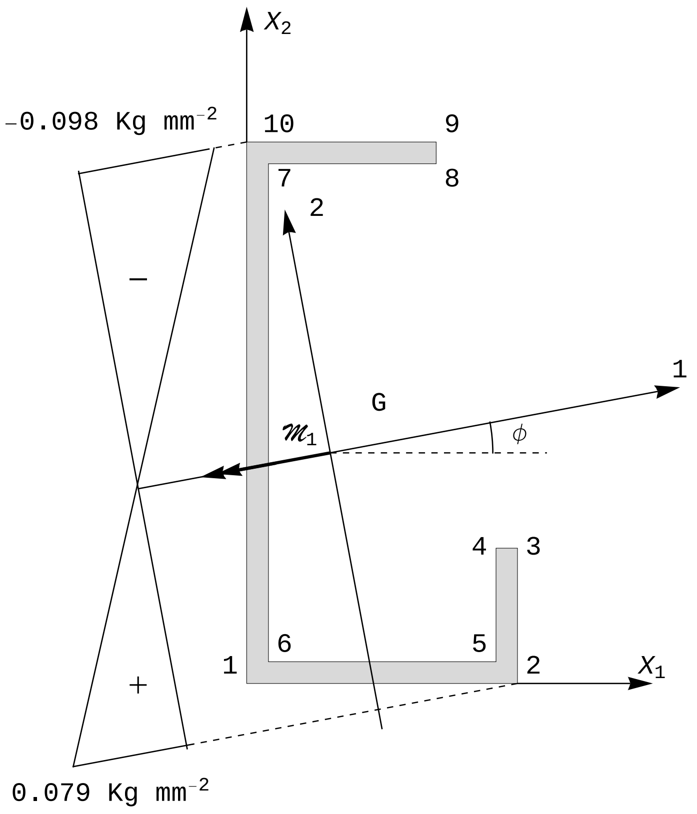

Figura 4 - La flessione retta secondo l'asse 1

Nel secondo caso servono le coordinate del punto 1, e del punto 3. Con lo stesso procedimento illustrato in precedenza si hanno le coordinate baricentriche del punto 1 come $(0 - x_{G1},\ 0 - x_{G2})$ = (-15.4268, -42.5985), e quindi le coordinate, nel sistema di riferimento centrale:

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15.4268 \\ -42.5985 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23.1853 \\ -38.9237 \end{pmatrix} \quad (23)$$

mentre le coordinate baricentriche di 3 sono fornite da $(50 - x_{G1}, 25 - x_{G2}) = (34.5732, -17.5985)$, e quindi nel sistema di riferimento centrale:

$$\begin{pmatrix} \xi_{51} \\ \xi_{52} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 34.5732 \\ -17.5985 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30.6329 \\ -23.8042 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Seguono le tensioni fornite dalla formula di Navier:

$$\sigma_{33} = -\frac{M_2}{I_2}\xi_1 \quad (25)$$

e quindi:

$$\sigma_{33}^1 = \frac{9820.27}{197\,325}(-23.1853) = -1.15389\ \mathrm{kg\ mm^{-2}} \quad (26)$$

e:

$$\sigma_{33}^3 = \frac{9820.27}{197\,325}\,30.6329 = 1.52451\ \mathrm{kg\ mm^{-2}} \quad (27)$$

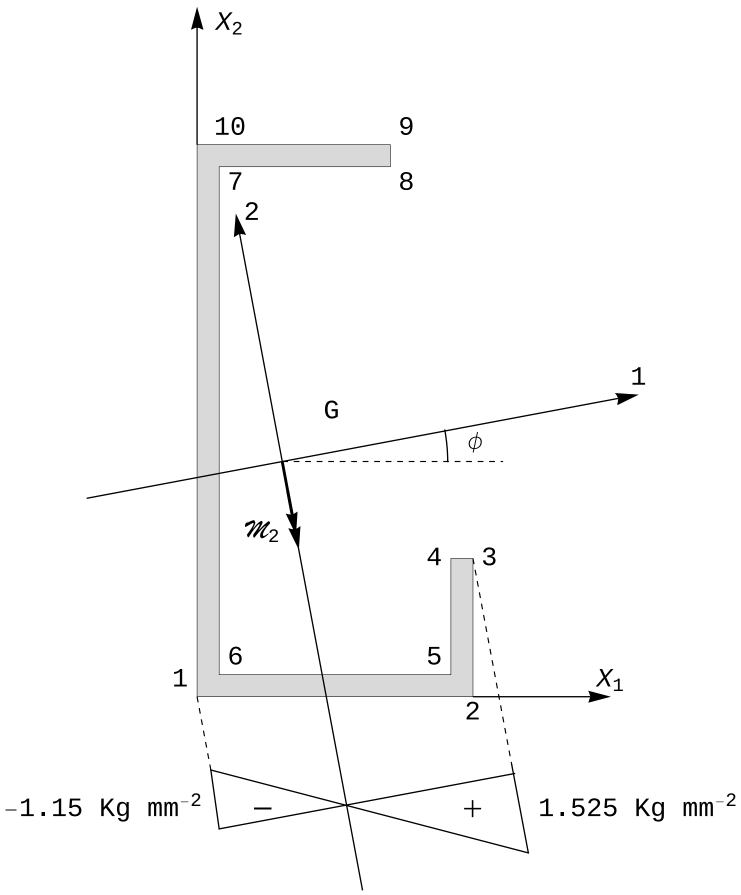

Figura 5 - La flessione retta secondo l'asse 2

- **L'equazione dell'asse neutro**

Si ha, secondo la formula binomia:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1}{I_1}\xi_2 - \frac{M_2}{I_2}\xi_1 = 0 \tag{28}$$

e quindi:

$$-\frac{188\,634}{1.14257\times 10^6}\xi_2 + \frac{982\,027}{197\,325}\xi_1 = 0 \tag{29}$$

ossia:

$$\xi_2 = 30.1442\,\xi_1 \tag{30}$$

e quindi l'asse neutro forma con l'asse ξ_2 l'angolo pari a:

$$\tan(nx_2) = \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{1}{30.1442} = 0.0331738 \tag{31}$$

e quindi l'angolo $\phi = nx_2$ = Arctan(0.0331738) = 0.0331617, pari a 1.9 gradi.

- **Il diagramma finale delle tensioni**

Per il calcolo del diagramma finale, si calcolano le tensioni nei vertici, e si ottiene, per sovrapposizione degli effetti (cfr. il notebook "Flessione deviata con *Mathematica")*

$$\sigma_{33}^1 = 0.0642615 - 1.15389 = -1.08962\ \mathrm{kg\,mm^{-2}} \tag{32}$$

$$\sigma_{33}^2 = 0.0798329 + 1.28984 = 1.36967\ \mathrm{kg\,mm^{-2}} \tag{33}$$

$$\sigma_{33}^3 = 0.0392998 + 1.52454 = 1.56384\ \mathrm{kg\,mm^{-2}} \tag{34}$$

$$\sigma_{33}^4 = 0.0380541 + 1.32904 = 1.36709\ \mathrm{kg\,mm^{-2}} \tag{35}$$

$$\sigma_{33}^5 = 0.0721019 + 1.13189 = 1.20399\ \mathrm{kg\,mm^{-2}} \tag{36}$$

$$\sigma_{33}^6 = 0.0590219 - 0.920837 = -0.861815\ \mathrm{kg\,mm^{-2}} \tag{37}$$

$$\sigma_{33}^7 = -0.0901396 - 0.0571482 = -0.147288\ \mathrm{kg\,mm^{-2}} \tag{38}$$

$$\sigma_{33}^8 = -0.0804854 + 1.45796 = 1.37748\ \mathrm{kg\,mm^{-2}} \tag{39}$$

$$\sigma_{33}^9 = -0.0869707 + 1.49551 = 1.40854\ \mathrm{kg\,mm^{-2}} \tag{40}$$

$$\sigma_{33}^{10} = -0.0978706 - 0.215094 = -0.312965\ \mathrm{kg\,mm^{-2}} \tag{41}$$

e lo stato tensionale e' disegnato in Figura 6:

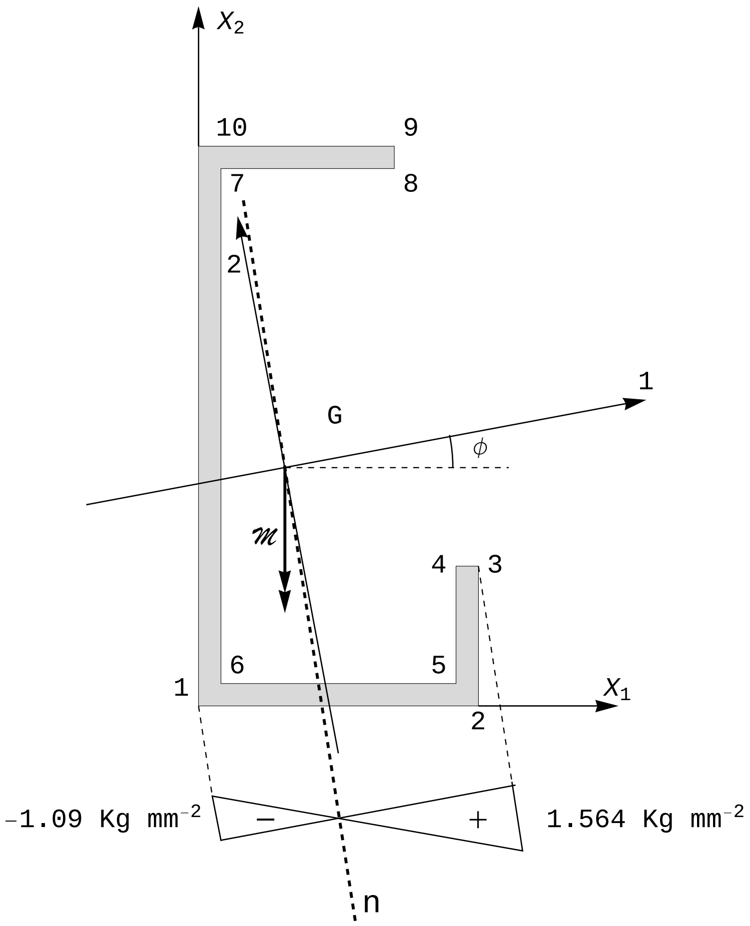

Figura 6 - Lo stato tensionale finale

Figure