
1. Analisi cinematica delle strutture

Metodo analitico

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 22 ottobre 2011]

In questa Applicazione si esamina una serie di strutture al fine di identificare le proprieta' cinematiche di ognuna di esse. L'approccio e' analitico, si scrivono le equazioni di vincolo, poi si scelgono gli opportuni poli e si trasformano - laddove necessario - le equazioni di vincolo, al fine di far comparire in esse gli spostamenti dei poli. Infine, scrivendo le equazioni in forma matriciale si puo' concludere sulla eventuale labilita' della struttura.

Per essere piu' specifici, sia O il polo, e sia P un punto qualsiasi del tratto rigido in considerazione. Siano \mathbf{u}_0 ed \mathbf{u}_P gli spostamenti del polo e del punto P generico, e sia ϕ il vettore delle rotazioni del tratto rigido:

$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{u}_P = \begin{pmatrix} u_P \\ v_P \\ w_P \end{pmatrix}; \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

Si noti che nell'ambito degli esercizi e' preferibile abbandonare la notazione indiciale, ed indicare con lettere diverse i tre assi (X,Y e Z invece di X_1, X_2 ed X_3) e le tre componenti di spostamento (u,v e w invece di u_1, u_2 ed u_3). Come noto, gli spostamenti del punto generico P possono esprimersi in funzione degli spostamenti dei punti del polo O, attraverso la relazione vettoriale:

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \phi \times \overrightarrow{OP} \quad (2)$$

dividendo lo spostamento complessivo in una traslazione ed una rotazione rigida. Scalarmente si ha:

$$\begin{pmatrix} u_P \\ v_P \\ w_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_P - x_0 \\ y_P - y_0 \\ z_P - z_0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Piu' esplicitamente si ha :

$$u_P \mathbf{i} + v_P \mathbf{j} + w_P \mathbf{k} + = u_0 \mathbf{i} + v_0 \mathbf{j} + w_0 \mathbf{k} + \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \phi_x & \phi_y & \phi_z \\ x_P - x_0 & y_P - y_0 & z_P - z_0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

e quindi infine :

$$\begin{aligned} u_P &= u_0 + \phi_y (z_P - z_0) - \phi_z (y_P - y_0) \\ v_P &= v_0 + \phi_z (x_P - x_0) - \phi_x (z_P - z_0) \\ w_P &= w_0 + \phi_x (y_P - y_0) - \phi_y (x_P - x_0) \end{aligned} \quad (5)$$

Nel caso di un corpo rigido bidimensionale giacente nel piano YZ si ha poi:

$$\begin{aligned} v_P &= v_0 - \phi_x (z_P - z_0) \\ w_P &= w_0 + \phi_x (y_P - y_0) \end{aligned} \quad (6)$$

Esercizio n .1

Come primo esempio, si consideri il telaio di Figura 2, costituito da un'asta verticale di altezza H ed un'asta orizzontale di luce L. Si vuole analizzare la struttura per identificare possibili cinematicismi

Passo 1 - Le condizioni di vincolo proibiscono lo spostamento verticale del punto A, ed ambedue le componenti di spostamento del punto B:

$$\begin{aligned} v_A &= 0 \\ w_B &= 0 \\ v_B &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Passo 2 - Si scelga il polo O all'intersezione delle due aste, e si esprimano le condizioni di vincolo in funzione degli spostamenti w_O , v_O del polo, e della rotazione ϕ_O intorno ad un asse X passante per il polo O. Utilizzando le (6) si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} v_A &= v_O - \phi_O (z_A - z_O) = 0 \\ w_B &= w_O + \phi_O (y_B - y_O) = 0 \\ v_B &= v_O - \phi_O (z_B - z_O) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

e poiche' $(z_A - z_O) = 0$, $(y_B - y_O) = 0$, $(z_B - z_O) = L$, si giunge all'espressione finale delle equazioni di vincolo in funzione delle incognite polari:

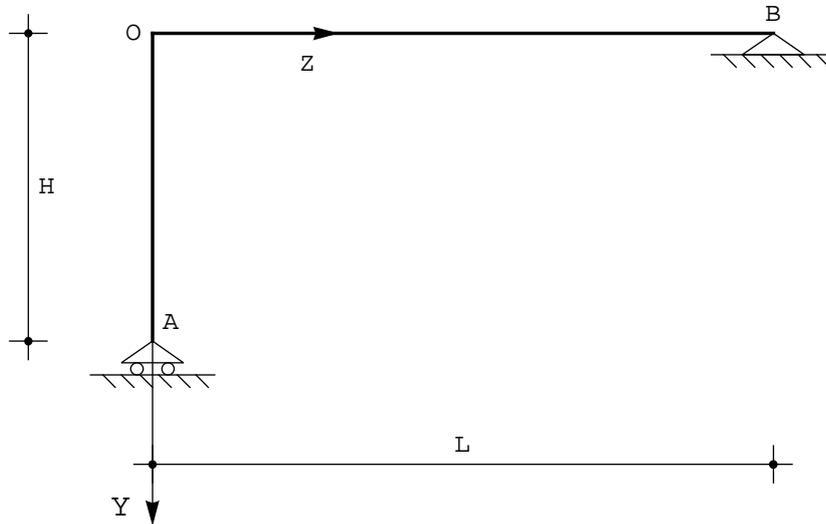


Figura 1 - Un telaio zoppo

$$\begin{aligned} v_O &= 0 \\ w_O &= 0 \\ v_O - \phi_O L &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Passo 3 - Si scrivono ora le (9) in forma matriciale, per poter studiare le caratteristiche cinematiche della struttura esaminando la matrice dei coefficienti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_O \\ v_O \\ \phi_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

E' questo un sistema di tre equazioni, omogeneo, e la matrice dei coefficienti ha determinante pari ad L. Ne segue che l'unica soluzione possibile e' la soluzione banale, in cui w_O , v_O e ϕ_O sono nulli. La struttura e' quindi cinematicamente determinata.

Passo 4 - Infine, si considerino i possibili casi eccezionali, quando particolari geometrie della struttura conducono a risultati atipici. Nel caso in esame, ad esempio, se la luce L si riduce a zero la struttura si riduce ad un'asta singola, per cui la matrice dei coefficienti diviene:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Tale matrice ha determinante nullo, e rango due. La struttura possiede un grado di labilita', quindi ∞^1 possibili cinematismi, definiti da spostamenti nulli del polo, e valori arbitrari della rotazione ϕ_O .

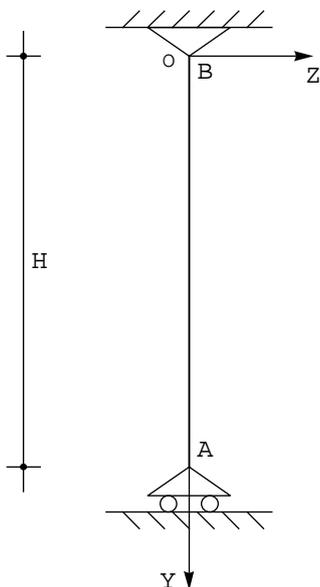


Figura 2 - Il caso degenero del telaio di Figura 1

Esercizio n .2

Si vuole ora esaminare lo stesso telaio dell'esempio precedente, vincolato in B con la cerniera, ed in A con un carrello il cui piano di scorrimento e' inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale.

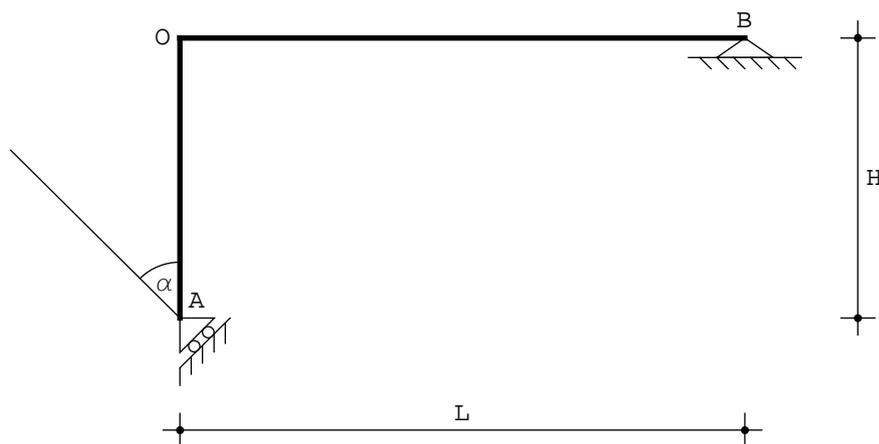


Figura 3 - Un telaio zoppo vincolato con un carrello inclinato in A

Passo 1 - La condizione di vincolo espressa dal carrello annulla lo spostamento del punto A lungo la retta ortogonale al piano del carrello, e quindi la prima delle (7) dovra' essere rimpiazzata da:

$$\bar{v}_A = 0 \quad (12)$$

Dalla Figura 4 si evince subito :

$$\begin{aligned} w_A &= \bar{w}_A \cos(\alpha) + \bar{v}_A \sin(\alpha) \\ v_A &= -\bar{w}_A \sin(\alpha) + \bar{v}_A \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (13)$$

e quindi :

$$\begin{aligned} \bar{w}_A &= w_A \cos(\alpha) - v_A \sin(\alpha) \\ \bar{v}_A &= w_A \sin(\alpha) + v_A \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (14)$$

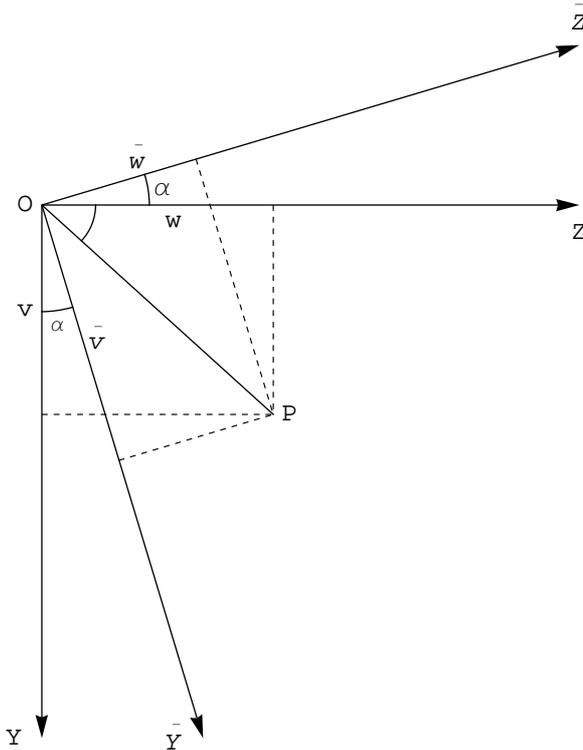


Figura 4 - Relazione tra gli spostamenti (w, v) orizzontali e verticali, e (\bar{w}, \bar{v}) secondo il piano di scorrimento del carrello, e la sua normale

La (12) si scrive quindi :

$$w_A \sin(\alpha) + v_A \cos(\alpha) = 0 \quad (15)$$

da affiancare alle altre condizioni di vincolo che proibiscono gli spostamenti in B :

$$\begin{aligned} w_B &= 0 \\ v_B &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Passo 2 - Si scelga il polo O all'intersezione delle due aste, e si esprimano le condizioni di vincolo in funzione degli spostamenti w_O, v_O del polo, e della rotazione ϕ_O intorno ad un asse X passante per il polo O. Utilizzando le (6) si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} (w_O + \phi_O (Y_A - Y_O)) \sin(\alpha) + (v_O - \phi_O (Z_A - Z_O)) \cos(\alpha) &= 0 \\ w_O + \phi_O (Y_B - Y_O) &= 0 \\ v_O - \phi_O (Z_B - Z_O) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

e poiché $(y_A - y_O) = H, (z_A - z_O) = 0, (y_B - y_O) = 0, (z_B - z_O) = L$, si giunge all'espressione finale delle equazioni di vincolo in funzione delle incognite polari:

$$\begin{aligned} (w_0 + \phi_0 H) \sin(\alpha) + v_0 \cos(\alpha) &= 0 \\ w_0 &= 0 \\ v_0 - \phi_0 L &= 0 \end{aligned}$$

Passo 3 - Si scrivono ora le (18) in forma matriciale, per poter studiare le caratteristiche cinematiche della struttura esaminando la matrice dei coefficienti:

$$\begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & H \sin(\alpha) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ v_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Il determinante di questa matrice e' pari a $L \cos(\alpha) + H \sin(\alpha)$ usualmente diverso da zero. Ne segue che la struttura continua ad essere cinematicamente determinata, a meno di casi eccezionali, che si studiano nel passo successivo

Passo 4 - Un possibile caso eccezionale si ha per un particolare valore dell'angolo α di inclinazione del carrello. Se infatti α e' tale da annullare il determinante dei coefficienti della (19), la struttura presentera' un meccanismo. L'equazione fornisce:

$$L \cos(\alpha) + H \sin(\alpha) = 0 \quad (20)$$

da cui $\bar{\alpha} = -\text{ArcTan}(L/H)$. Ne segue che quando il carrello e' inclinato in modo tale che il suo piano di scorrimento e' ortogonale alla congiungente A e B, sara' possibile un meccanismo di rotazione intorno al punto B.

Esercizio n .3

Si consideri ora il telaio di Figura 5, costituito da due tratti rigidi connessi tra loro tramite una cerniera.

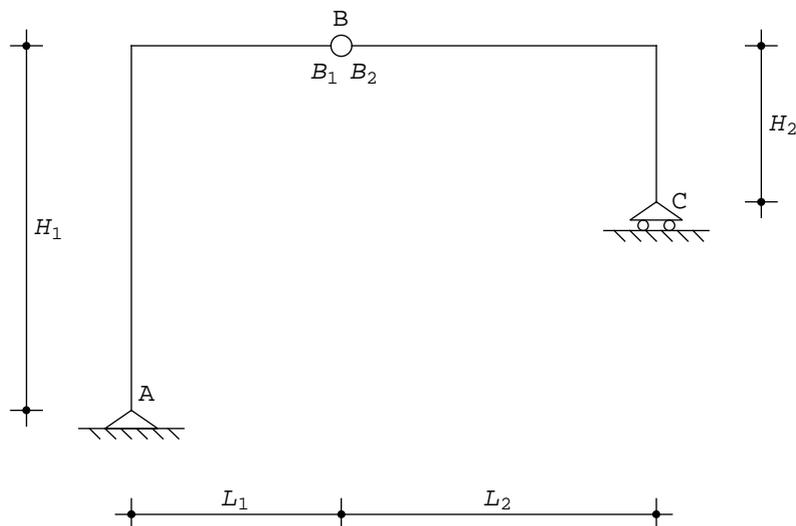


Figura 5 - Un telaio zoppo costituito da due tratti rigidi connessi da una cerniera

Passo 1 - Indicando simbolicamente con B_1 e B_2 la faccia di sinistra e di destra della cerniera, rispettivamente, si possono scrivere le equazioni di vincolo:

$$\begin{aligned} w_A &= 0 \\ v_A &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_{B_1} &= w_{B_2} \\v_{B_1} &= v_{B_2} \\v_C &= 0\end{aligned}$$

La terza e la quarta equazione di vincolo esprimono l'uguaglianza degli spostamenti ai due lati della cerniera.

Passo 2 - Si scelgono come parametri lagrangiani gli spostamenti w_A, v_A del punto A, e la rotazione ϕ_A del primo tratto, gli spostamenti w_C, v_C del punto C, e la rotazione ϕ_C del secondo tratto. Utilizzando le (6) occorre trasformare la terza e quarta equazione. Sarà:

$$\begin{aligned}v_{B_1} &= v_A - \phi_A (z_B - z_A) = v_A - \phi_A L_1 \\w_{B_1} &= w_A + \phi_A (y_B - y_A) = w_A - \phi_A H_1\end{aligned}\quad (22)$$

$$\begin{aligned}v_{B_2} &= v_C - \phi_C (z_B - z_C) = v_C + \phi_C L_2 \\w_{B_2} &= w_C + \phi_C (y_B - y_C) = w_C - \phi_C H_2\end{aligned}\quad (23)$$

e quindi le equazioni di vincolo si scrivono :

$$\begin{aligned}w_A &= 0 \\v_A &= 0 \\w_A - \phi_A H_1 &= w_C - \phi_C H_2 \\v_A - \phi_A L_1 &= v_C + \phi_C L_2 \\v_C &= 0\end{aligned}\quad (24)$$

Passo 3 - Introdotto il vettore delle coordinate lagrangiane $\mathbf{d}^T = (w_A, v_A, \phi_A, w_C, v_C, \phi_C)$ le equazioni (24) si scrivono, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -H_1 & -1 & 0 & H_2 \\ 0 & 1 & -L_1 & 0 & -1 & -L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_A \\ v_A \\ \phi_A \\ w_C \\ v_C \\ \phi_C \end{pmatrix}\quad (25)$$

In genere, il rango della matrice dei coefficienti e' massimo, ossia pari a 5, e quindi la struttura e' una volta labile. Il risultante meccanismo puo' identificarsi ponendo, ad esempio, $\phi_A = \alpha$, da cui subito:

$$\phi_C = -\alpha \frac{L_1}{L_2}\quad (26)$$

ed ancora :

$$w_C = -\alpha H_1 - \alpha H_2 \frac{L_1}{L_2}\quad (27)$$

Il parametro α non ha un valore fisso, in quanto il meccanismo e' definito in forma, ma non in ampiezza.

Gli spostamenti della cerniera possono calcolarsi in funzione di α , a partire dalle (22) o dalle (23):

$$\begin{aligned}v_{B_1} &= -\phi_A L_1 = -\alpha L_1 \\w_{B_1} &= -\phi_A H_1 = -\alpha H_1\end{aligned}\quad (28)$$

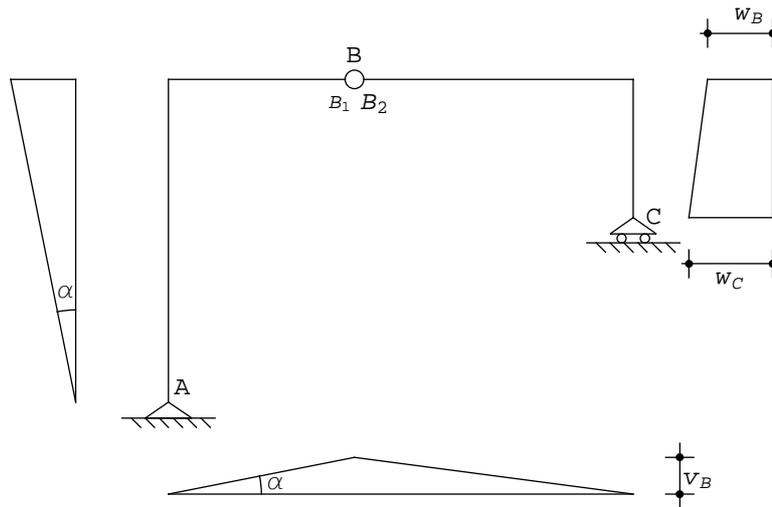


Figura 6 - Un telaio zoppo costituito da due tratti rigidi connessi da una cerniera: diagramma degli spostamenti orizzontali e verticali

In Figura sono riportati i diagrammi degli spostamenti orizzontali lungo i due travi, nonché il diagramma degli spostamenti verticali lungo il traverso, assumendo un angolo α positivo (antiorario) ed arbitrario.

Esercizio n .4

Il telaio di figura è composto da tre tratti rigidi vincolati tra loro dalle due cerniere B e D, mentre i vincoli esterni si riducono a due cerniere in A e C, ed al carrello a piano di scorrimento orizzontale in E. Si effettui l'analisi cinematica della struttura.

Passo 1 - Le condizioni di vincolo impongono :

$$\begin{aligned}
 w_A &= 0 \\
 v_A &= 0 \\
 w_B &= w_{B'} \\
 v_B &= v_{B'} \\
 w_C &= 0 \\
 v_C &= 0 \\
 w_D &= w_{D'} \\
 v_D &= v_{D'} \\
 v_E &= 0
 \end{aligned} \tag{29}$$

Passo 2 - Si scelgono come poli dei tre tratti i punti A, C ed E, rispettivamente, e quindi i parametri lagrangiani saranno:

$$d^T = (w_A, v_A, \phi_A, w_C, v_C, \phi_C, w_E, v_E, \phi_E) \tag{30}$$

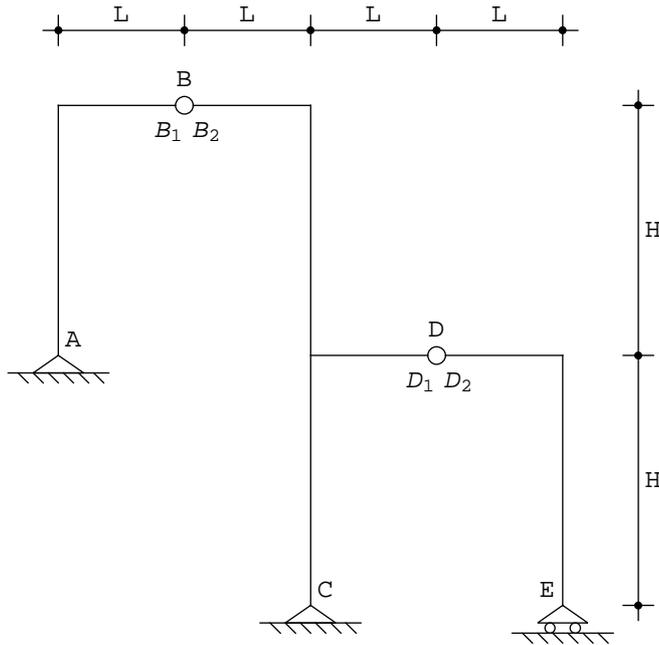


Figura 7 - Un telaio costituito da tre tratti rigidi connessi da due cerniere

Occorre ora esprimere le quattro condizioni di vincolo nelle due cerniere in B e D in funzione delle coordinate lagrangiane. Sarà:

$$\begin{aligned} v_{B'} &= v_A - \phi_A (z_B - z_A) = v_A - \phi_A L \\ w_{B'} &= w_A + \phi_A (y_B - y_A) = w_A - \phi_A H \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} v_{B''} &= v_C - \phi_C (z_B - z_C) = v_C + \phi_C L \\ w_{B''} &= w_C + \phi_C (y_B - y_C) = w_C - 2 \phi_C H \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} v_{D'} &= v_C - \phi_C (z_D - z_C) = v_C - \phi_C L \\ w_{D'} &= w_C + \phi_C (y_D - y_C) = w_C - \phi_C H \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} v_{D''} &= v_E - \phi_E (z_D - z_E) = v_E + \phi_E L \\ w_{D''} &= w_E + \phi_E (y_D - y_E) = w_E - \phi_E H \end{aligned} \quad (34)$$

e quindi le equazioni di vincolo divengono :

$$\begin{aligned} w_A &= 0 \\ v_A &= 0 \\ w_A - \phi_A H &= w_C - 2 \phi_C H \\ v_A - \phi_A L &= v_C + \phi_C L \\ w_C &= 0 \\ v_C &= 0 \\ w_C - \phi_C H &= w_E - \phi_E H \\ v_C - \phi_C L &= v_E + \phi_E L \\ v_E &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Passo 3 - Scrivendo le (35) in forma matriciale si giunge a definire la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -H & -1 & 0 & 2H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -L & 0 & -1 & -L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -H & -1 & 0 & H \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L & 0 & -1 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

il cui determinante e' pari a $-3HL^2$, sicuramente diverso da zero. La struttura e' quindi cinematicamente determinata.

Esercizio n .5

Si consideri ora la trave di Figura 8, costituita da tre tratti rigidi connessi tra loro da due cerniere in B e D. La trave e' vincolata con un appoggio all'estremo di sinistra, con un bipendolo esterno all'ascissa $z_C = 2L$, e con un carrello a piano di scorrimento orizzontale all'ascissa $z_E = 4L$

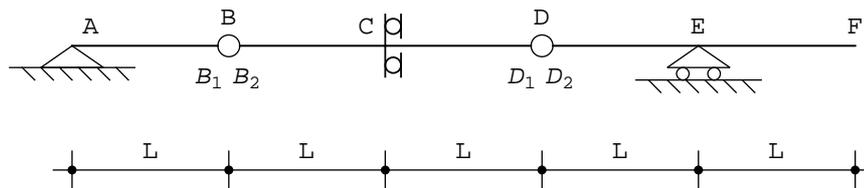


Figura 8 - Una trave labile

Passo 1 - Le condizioni di vincolo impongono :

$$\begin{aligned} w_A &= 0 \\ v_A &= 0 \\ w_{B'} &= w_{B''} \\ v_{B'} &= v_{B''} \\ \phi_C &= 0 \\ w_{D'} &= w_{D''} \\ v_{D'} &= v_{D''} \\ v_E &= 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Passo 2 - Si scelgono come poli dei tre tratti i punti A,C ed E, rispettivamente, e quindi i parametri lagrangiani saranno:

$$d^T = (w_A, v_A, \phi_A, w_C, v_C, \phi_C, w_E, v_E, \phi_E) \quad (38)$$

Occorre ora esprimere le quattro condizioni di vincolo nelle due cerniere in B e D in funzione delle coordinate lagrangiane. Sara':

$$\begin{aligned} v_{B'} &= v_A - \phi_A (z_B - z_A) = v_A - \phi_A L \\ w_{B'} &= w_A + \phi_A (y_B - y_A) = w_A \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} v_{B''} &= v_C - \phi_C (z_B - z_C) = v_C + \phi_C L \\ w_{B''} &= w_C + \phi_C (y_B - y_C) = w_C \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} v_{D'} &= v_C - \phi_C (z_D - z_C) = v_C - \phi_C L \\ w_{D'} &= w_C + \phi_C (Y_D - Y_C) = w_C \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} v_{D''} &= v_E - \phi_E (z_D - z_E) = v_E + \phi_E L \\ w_{D''} &= w_E + \phi_E (Y_D - Y_E) = w_E \end{aligned} \quad (42)$$

e quindi le equazioni di vincolo divengono :

$$\begin{aligned} w_A &= 0 \\ v_A &= 0 \\ w_A &= w_C \\ v_A - \phi_A L &= v_C + \phi_C L \\ \phi_C &= 0 \\ w_C &= w_E \\ v_C - \phi_C L &= v_E + \phi_E L \\ v_E &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Passo 3 - Scrivendo le (43) in forma matriciale si giunge a definire la matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -L & 0 & -1 & -L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L & 0 & -1 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

Il rango di questa matrice e' pari ad 8, quindi la struttura risulta una volta labile. Se si sceglie come parametro lagrangiano la rotazione $\phi_A = \alpha$ del primo tratto, la quarta condizione e la settima condizione di vincolo forniscono:

$$\begin{aligned} v_C &= -\alpha L \\ \phi_E &= -\alpha \end{aligned} \quad (45)$$

Gli altri gradi di liberta' sono nulli, mentre e' possibile calcolare, a partire dalle (39-42):

$$v_B = -\alpha L \quad (46)$$

In figura 9 e' riportato il diagramma degli spostamenti verticali.

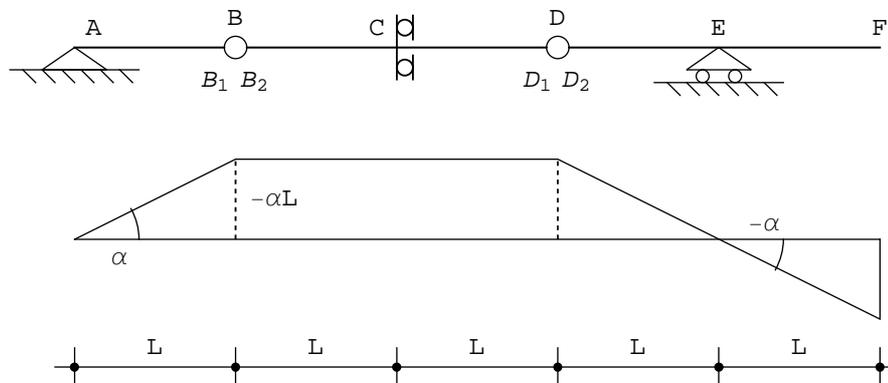


Figura 9 - Il meccanismo rigido per la trave di Figura 8

Esercizio n .6

Si studiano adesso i possibili cinematismi della trave di Figura 10, costituita da tre tratti rigidi connessi tra loro da un bipendolo interno in $z_B = L_1$ e da una cerniera in $z_D = L_1 + L_2 + L_3$. La trave e' vincolata esternamente con un appoggio in A, e due carrelli a piano di scorrimento orizzontale in C ed E.

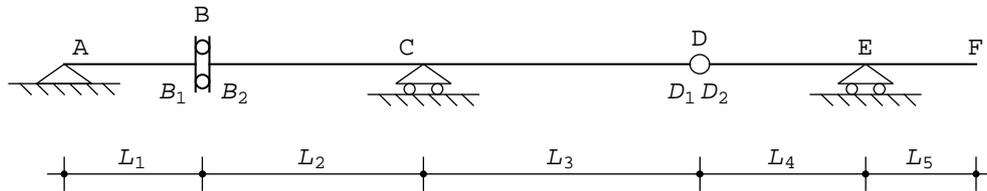


Figura 10 - Una trave labile

Passo 1 - Le condizioni di vincolo impongono :

$$\begin{aligned}
 w_A &= 0 \\
 v_A &= 0 \\
 \phi_{B'} &= \phi_{B''} \\
 w_{B'} &= w_{B''} \\
 v_C &= 0 \\
 w_{D'} &= w_{D''} \\
 v_{D'} &= v_{D''} \\
 v_E &= 0
 \end{aligned} \tag{47}$$

Passo 2 - Si scelgono come poli dei tre tratti i punti A,C ed E, rispettivamente, e quindi i parametri lagrangiani saranno:

$$\vec{q}^T = (w_A, v_A, \phi_A, w_C, v_C, \phi_C, w_E, v_E, \phi_E) \tag{48}$$

Occorre ora esprimere le quattro condizioni di vincolo nel bipendolo interno e nella cerniera in B e D in funzione delle coordinate lagrangiane. Sara':

$$w_{B'} = w_A + \phi_A (Y_B - Y_A) = w_A \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
 w_{B''} &= w_C + \phi_C (Y_B - Y_C) = w_C \\
 \phi_{B'} &= \phi_A \\
 \phi_{B''} &= \phi_C
 \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
 v_{D'} &= v_C - \phi_C (z_D - z_C) = v_C - \phi_C L_3 \\
 w_{D'} &= w_C + \phi_C (Y_D - Y_C) = w_C
 \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
 v_{D''} &= v_E - \phi_E (z_D - z_E) = v_E + \phi_E L_4 \\
 w_{D''} &= w_E + \phi_E (Y_D - Y_E) = w_E
 \end{aligned} \tag{52}$$

e quindi le equazioni di vincolo divengono :

$$\begin{aligned}
 w_A &= 0 \\
 v_A &= 0 \\
 \phi_A &= \phi_C \\
 w_A &= w_C \\
 v_C &= 0
 \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned} w_C &= w_E \\ v_C - \phi_C L_3 &= v_E + \phi_E L_4 \\ v_E &= 0 \end{aligned}$$

Passo 3 - Scrivendo le (53) in forma matriciale si giunge a definire la matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L_3 & 0 & -1 & -L_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (54)$$

Il rango di questa matrice e' pari ad 8, quindi la struttura risulta una volta labile. Se si sceglie come parametro lagrangiano la rotazione $\phi_A = \alpha$ del primo tratto, la terza condizione e la settima condizione di vincolo forniscono:

$$\begin{aligned} \phi_C &= \alpha \\ \phi_E &= -\alpha \frac{L_3}{L_4} \end{aligned} \quad (55)$$

Gli altri gradi di liberta' sono nulli, mentre e' possibile calcolare gli spostamenti delle due facce del bipendolo, come:

$$v_{B'} = v_A - \phi_A (z_B - z_A) = -\phi_A L_1 = -\alpha L_1 \quad (56)$$

$$v_{B''} = v_C - \phi_C (z_B - z_C) = -\phi_C (z_B - z_C) = \alpha L_2 \quad (57)$$

In figura 11 e' riportato il diagramma degli spostamenti verticali.

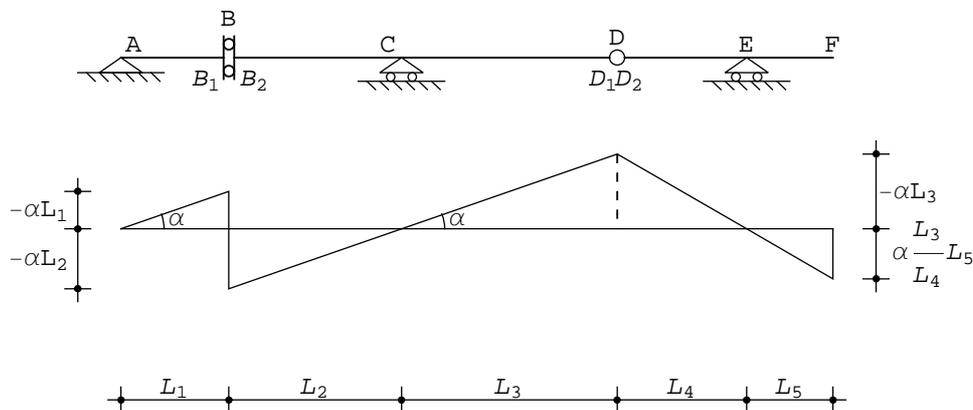


Figura 11 - Il meccanismo rigido per la trave di Figura 10

Esercizio n .7

Si consideri ora la struttura ad asse curvilineo di Figura 12, costituita da tre archi rigidi collegati tra loro da due cerniere, ed al suolo tramite un appoggio all'estremo di destra ed un bipendolo all'estremo di sinistra. L'asse di scorrimento del bipendolo e' ortogonale all'asse dell'arco.

Supponendo che l'arco sia parabolico, di luce $L = L_1 + L_2 + L_3$ e di freccia f , l'equazione dell'asse sara' data

da:

$$g(z) = -4 \frac{f}{L^2} z (L - z) \quad (58)$$

e quindi la tangente all' arco stesso sara' fornita da :

$$g'(z) = -4 \frac{f}{L^2} (L - 2z) \quad (59)$$

In particolare, quindi, all' estremo di sinistra la tangente all' arco sara' pari a $-4 \frac{f}{L}$.

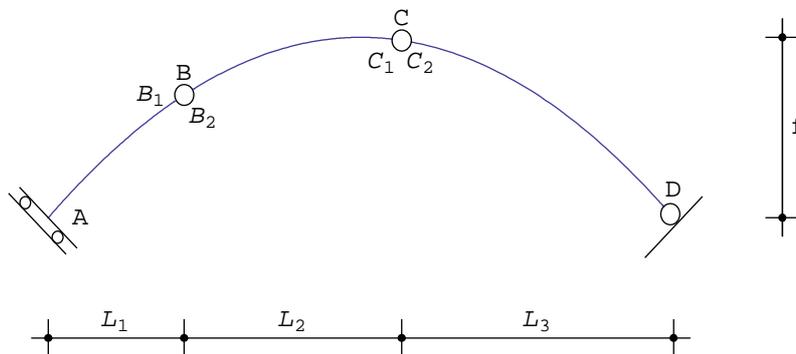


Figura 12 - Un arco ad asse parabolico di freccia f

Passo 1 - Per scrivere le equazioni di vincolo si indichi con (z',y') la coppia di assi con origine in A, con z' tangente all'asse ed y' ortogonale all'asse, e siano (w',v') gli spostamenti lungo la tangente e la normale. Le equazioni di vincolo si scrivono allora:

$$\begin{aligned} \phi_A &= 0 \\ w_A &= 0 \\ w_{B'} &= w_{B''} \\ v_{B'} &= v_{B''} \\ w_{C'} &= w_{C''} \\ v_{C'} &= v_{C''} \\ w_D &= 0 \\ v_D &= 0 \end{aligned} \quad (60)$$

Passo 2 - La seconda condizione di vincolo deve modificarsi, a somiglianza di quanto fatto nell'Esercizio 2.

Resta infatti valida la (14), con $\alpha = 4 \frac{f}{L}$ e quindi dovra' essere:

$$w_A = w_A \cos \left(4 \frac{f}{L} \right) - v_A \sin \left(4 \frac{f}{L} \right) = 0 \quad (61)$$

Sara' poi :

$$\begin{aligned} v_{B'} &= v_A - \phi_A (z_B - z_A) = v_A - \phi_A L_1 \\ w_{B'} &= w_A + \phi_A (y_B - y_A) = w_A + \phi_A (g(L_1) - g(0)) \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{B''} &= \mathbf{v}_{C'} - \phi_C (\mathbf{z}_B - \mathbf{z}_C) = \mathbf{v}_{C'} + \phi_C \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{w}_{B''} &= \mathbf{w}_{C'} + \phi_C (Y_B - Y_C) = \mathbf{w}_{C'} + \phi_C (\mathfrak{g}(\mathbf{L}_1) - \mathfrak{g}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2)) \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{C''} &= \mathbf{v}_D - \phi_D (\mathbf{z}_C - \mathbf{z}_D) = \mathbf{v}_D + \phi_D \mathbf{L}_3 \\ \mathbf{w}_{C''} &= \mathbf{w}_D + \phi_D (Y_C - Y_D) = \mathbf{w}_D + \phi_D (\mathfrak{g}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2) - \mathfrak{g}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3)) \end{aligned} \quad (64)$$

Le equazioni di vincolo divengono quindi :

$$\begin{aligned} \phi_A &= 0 \\ \mathbf{w}_A \cos\left(4 \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{L}}\right) - \mathbf{v}_A \sin\left(4 \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{L}}\right) &= 0 \\ \mathbf{w}_A + \phi_A (\mathfrak{g}(\mathbf{L}_1) - \mathfrak{g}(0)) &= \mathbf{w}_{C'} + \phi_C (\mathfrak{g}(\mathbf{L}_1) - \mathfrak{g}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2)) \\ \mathbf{v}_A - \phi_A \mathbf{L}_1 &= \mathbf{v}_{C'} + \phi_C \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{w}_{C'} &= \mathbf{w}_D + \phi_D (\mathfrak{g}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2) - \mathfrak{g}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3)) \\ \mathbf{v}_{C'} &= \mathbf{v}_D + \phi_D \mathbf{L}_3 \\ \mathbf{w}_D &= 0 \\ \mathbf{v}_D &= 0 \end{aligned} \quad (65)$$

Semplificando si ha :

$$\begin{aligned} \phi_A &= 0 \\ \mathbf{w}_A \cos\left(4 \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{L}}\right) - \mathbf{v}_A \sin\left(4 \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{L}}\right) &= 0 \\ \mathbf{w}_A &= \mathbf{w}_{C'} + \phi_C (\mathfrak{g}(\mathbf{L}_1) - \mathfrak{g}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2)) \\ \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_{C'} + \phi_C \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{w}_{C'} &= \phi_D (\mathfrak{g}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2) - \mathfrak{g}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3)) \\ \mathbf{v}_{C'} &= \phi_D \mathbf{L}_3 \\ \mathbf{w}_D &= 0 \\ \mathbf{v}_D &= 0 \end{aligned} \quad (66)$$

Si giunge quindi ad un sistema di cinque equazioni in sei incognite, che puo' scriversi matricialmente come:

$$\begin{pmatrix} c_1 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\mathbf{L}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\mathbf{L}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_A \\ \mathbf{v}_A \\ \mathbf{w}_{C'} \\ \mathbf{v}_{C'} \\ \phi_C \\ \phi_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (67)$$

avendo posto :

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos\left(4 \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{L}}\right) \\ c_2 &= \sin\left(4 \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{L}}\right) \\ c_3 &= \mathfrak{g}(\mathbf{L}_1) - \mathfrak{g}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2) \\ c_4 &= \mathfrak{g}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2) - \mathfrak{g}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3) \end{aligned} \quad (68)$$

Scegliendo la rotazione dell'ultimo tratto, ϕ_D , come parametro lagrangiano, si possono scrivere le cinque equazioni non omogenee:

$$\begin{aligned} c_1 \mathbf{w}_A - c_2 \mathbf{v}_A &= 0 \\ \mathbf{w}_A - \mathbf{w}_{C'} - c_3 \phi_C &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_A - v_{C'} - \phi_C L_2 &= 0 \\w_{C'} &= c_4 \alpha \\v_{C'} &= \alpha L_3\end{aligned}$$

con soluzione :

$$\begin{aligned}w_{C'} &= c_4 \alpha \\v_{C'} &= \alpha L_3 \\ \phi_C &= \frac{-c_1 c_4 + c_2 L_3}{c_1 c_3 - c_2 L_2} \alpha \\ w_A &= \frac{c_2 (-c_4 L_2 + c_3 L_3)}{c_1 c_3 - c_2 L_2} \alpha \\ v_A &= \frac{c_1 (-c_4 L_2 + c_3 L_3)}{c_1 c_3 - c_2 L_2} \alpha\end{aligned} \quad (70)$$

■ Esempio numerico

Si consideri un arco di luce L e freccia $L/4$, e le cerniere siano situate ad $L/4$ e $2L/3$, sicche' $L_1 = L/4$, $L_2 = \frac{5}{12}L$, $L_3 = \frac{L}{3}$ ed i quattro coefficienti divengono:

$$\begin{aligned}c_1 &= \cos\left(4 \frac{f}{L}\right) = 0.5403 \\ c_2 &= \sin\left(4 \frac{f}{L}\right) = 0.8414 \\ c_3 &= g(L_1) - g(L_1 + L_2) = 0.0347 L \\ c_4 &= g(L_1 + L_2) - g(L_1 + L_2 + L_3) = -0.222 L\end{aligned} \quad (71)$$

e quindi la deformata dell' arco e' definita da :

$$\begin{aligned}w_{C'} &= -0.222 \alpha L \\ v_{C'} &= \alpha \frac{L}{3} \\ \phi_C &= \frac{-c_1 c_4 + c_2 L_3}{c_1 c_3 - c_2 L_2} \alpha = -1.207 \alpha \\ w_A &= \frac{c_2 (-c_4 L_2 + c_3 L_3)}{c_1 c_3 - c_2 L_2} \alpha = -0.264 \alpha L \\ v_A &= \frac{c_1 (-c_4 L_2 + c_3 L_3)}{c_1 c_3 - c_2 L_2} \alpha = -0.1696 \alpha L\end{aligned} \quad (72)$$

Per il tracciamento delle deformate e' anche utile individuare gli spostamenti del punto F in mezzzeria, ossia in $z = L/2$. Sara':

$$\begin{aligned}v_F &= v_{C'} - \phi_C (z_F - z_C) = 0.1322 \alpha L \\ w_F &= w_{C'} + \phi_C (y_F - y_C) = -0.188 \alpha L\end{aligned} \quad (73)$$

In Figura sono riportati i diagrammi degli spostamenti verticali ed orizzontali.

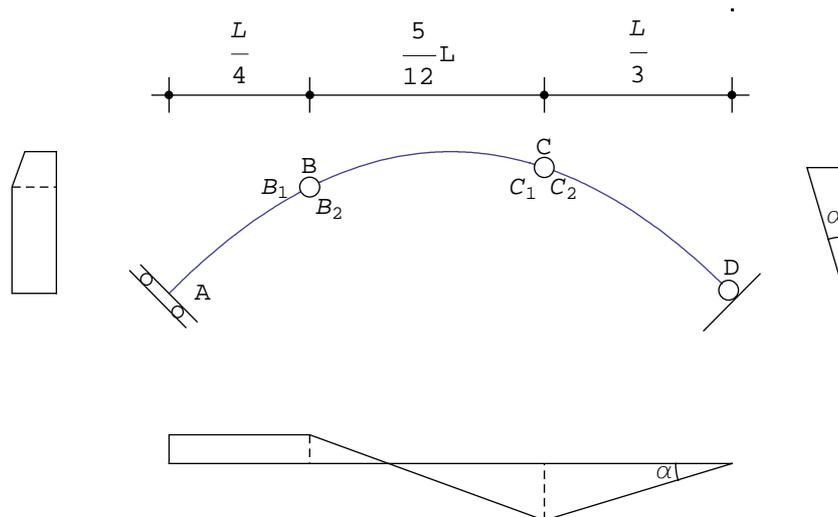


Figura 13 - Un arco ad asse parabolico di freccia f : il meccanismo

Figure