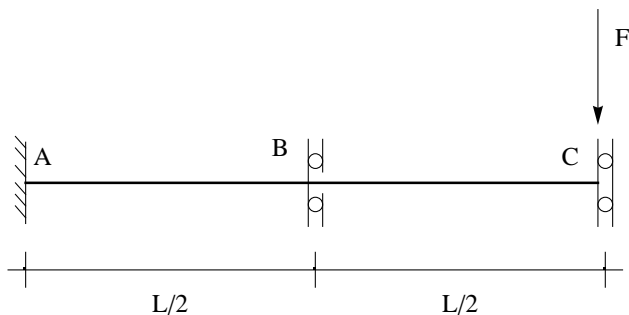


Verifica n. 25 - Scienza delle Costruzioni

Giovedì 29 Marzo 2012 - ore 10.30-12.30

Si consideri la trave di Figura, di luce L , vincolata all'esterno con un incastro a sinistra, un bipendolo esterno in mezzera, ed un bipendolo a destra. La trave sia soggetta alla forza concentrata F agente in corrispondenza dell'estremo di destra. Per essa:

1. si calcolino le reazioni vincolari
2. si disegnino i diagrammi di taglio e momento flettente



Soluzione

La trave è costituita da un solo tratto, mentre le reazioni vincolari incognite sono quattro, ossia la reazione verticale dell'incastro, la coppia reattiva nell'incastro, e le due coppie reattive del bipendolo. Ne segue che la trave è doppiamente iperstatica, e come sistema isostatico equivalente si sceglie la trave a mensola soggetta al carico F ed alle due coppie incognite in B ed in C. Le corrispondenti equazioni di congruenza sono quindi:

$$\phi_B = 0 \quad (1)$$

$$\phi_C = 0 \quad (2)$$

ossia:

$$\phi_B^{(0)} + X_1 \phi_B^{(1)} + X_2 \phi_B^{(2)} = 0 \quad (3)$$

$$\phi_C^{(0)} + X_1 \phi_C^{(1)} + X_2 \phi_C^{(2)} = 0 \quad (4)$$

I seguenti coefficienti sono immediati:

$$\phi_B^{(1)} = \frac{1}{EI} \frac{L}{2} \quad (5)$$

$$\phi_C^{(0)} = -\frac{F}{2EI} L^2 \quad (6)$$

$$\phi_C^{(1)} = \frac{1}{EI} \frac{L}{2} \quad (7)$$

$$\phi_C^{(2)} = \frac{1}{EI} L \quad (8)$$

Per il calcolo di $\phi_B^{(2)}$, si consideri che esso rappresenta la rotazione in mezzera per una mensola caricata da una coppia unitaria all'estremo. Utilizzando l'analogia di Mohr, poiché il carico fittizio risulta costante, e pari ad $\frac{1}{EI}$, si ottiene immediatamente il taglio fittizio in mezzera:

$$T_B^{(2)} = \frac{L}{2EI} \quad (9)$$

e quindi:

$$\phi_B^{(2)} = \frac{L}{2EI} \quad (10)$$

Infine, $\phi_B^{(0)}$ rappresenta la rotazione in mezzeria per una trave a mensola soggetta ad una forza all'estremità'. Il diagramma del momento varia linearmente da $-FL$ in corrispondenza dell'incastro fino ad annullarsi nell'estremo libero, quindi il carico fittizio sulla trave ausiliaria sarà rappresentato da un carico triangolare, diretto verso l'alto, di equazione:

$$q^*(x_3) = -\frac{FL}{EI} \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \quad (11)$$

Il taglio in mezzeria, quindi, sarà fornito da:

$$T_B^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{FL}{EI} + \frac{FL}{2EI} \right) \frac{L}{2} = \frac{3}{8} \frac{FL^2}{EI} \quad (12)$$

e l'ultimo coefficiente sarà pari a:

$$\phi_B^{(2)} = -\frac{3}{8} \frac{FL^2}{EI} \quad (13)$$

Le equazioni di congruenza si scrivono allora:

$$-\frac{3}{8} FL^2 + X_1 \frac{L}{2} + X_2 \frac{L}{2} = 0 \quad (14)$$

$$-\frac{F}{2} L^2 + X_1 \frac{L}{2} + X_2 L = 0 \quad (15)$$

con soluzione:

$$X_1 = \frac{FL}{2} \quad (16)$$

$$X_2 = \frac{FL}{4} \quad (17)$$

■ Il calcolo delle reazioni

L'equazione di equilibrio alla traslazione verticale fornisce la reazione verticale dell'incastro in A:

$$R_A = -F \quad (18)$$

mentre l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno ad A fornisce la coppia reattiva dell'incastro:

$$\mathcal{M}_{tA} + X_1 + X_2 - FL = 0 \quad (19)$$

da cui:

$$\mathcal{M}_{tA} = \frac{FL}{4} \quad (20)$$

■ Il diagramma delle caratteristiche

Il diagramma del taglio è costante lungo tutta la trave, e pari ad F . Il diagramma del momento è costituito da due tratti lineari e paralleli, con pendenza pari ad F , e con una discontinuità in B pari alla coppia reattiva del bipendolo esterno.

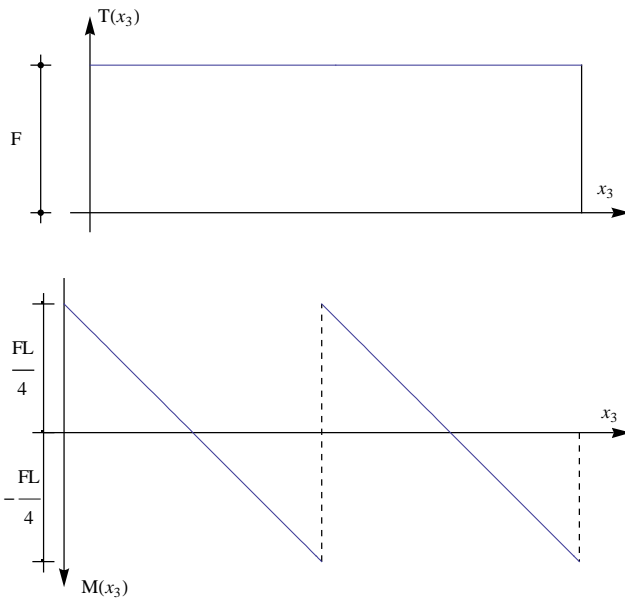


Figura 2 - I diagrammi delle caratteristiche

Figure
