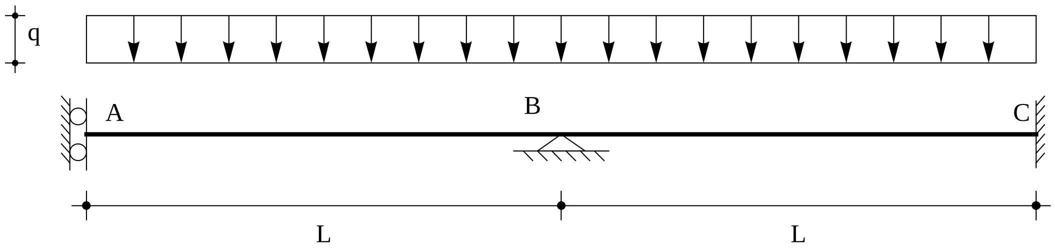
Verifica n.22

Lunedi' 28 Novembre 2011 - ore 9.30-11.30

Si consideri la trave di Figura, di luce 2L, vincolata all'esterno con un bipendolo a sinistra, un appoggio in mezzeria ed un incastro a destra, e caricata da una stesa di carico uniformemente distribuito, di intensita' *q*. Per essa:

1. si calcolino, si disegnino e si illustrino i diagrammi di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli

2.si calcoli il minimo e massimo spostamento



Soluzione

La trave e' costituita da un solo tratto, mentre le incognite statiche sono quattro, ossia la coppia reattiva del bipendolo in A, la reazione dell'appoggio in B, la reazione e la coppia reattiva nell'incastro in C. La trave e' quindi iperstatica, ed il metodo di soluzione piu' semplice e' la scrittura dell'equazione differenziale del quarto ordine.

La scrittura dell'equazione differenziale e delle condizioni ai limiti

Nel punto B la reazione dell'appoggio introduce una discontinuita' nel taglio, e quindi occorre scrivere due equazioni differenziuali, valide da A a B, e da B a C, rispettivamente:

$$u_2'''' = \frac{q}{\mathrm{EI}} \tag{1}$$

$$v_2'''' = \frac{q}{\mathrm{EI}} \tag{2}$$

con soluzione:

$$u_2 = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + a_4 z^3 + \frac{q}{24\,\mathrm{EI}} z^4 \tag{3}$$

$$v_2 = b_1 + b_2 z' + b_3 z'^2 + b_4 z'^3 + \frac{q}{24\,\mathrm{EI}} z'^4 \tag{4}$$

Le condizioni ai limiti possono scriversi come:

$$u_2'(z = 0) = 0 \tag{5}$$

$$u_2'''(z = 0) = 0 \tag{6}$$

nel bipendolo in A,

$$u_2(z = L) = 0 \tag{7}$$

$$v_2(z' = 0) = 0 \tag{8}$$

$$u_2'(z = L) = v_2'(z' = 0) \tag{9}$$

$$u_2''(z = L) = v_2''(z' = 0) \quad (10)$$

nell'appoggio centrale, e:

$$v_2(z' = L) = 0 \quad (11)$$

$$v_2'(z' = L) = 0 \quad (12)$$

nell'incastro di destra.

La deduzione delle costanti di integrazione

Derivando opportunamente le (3-4), e valutandole in A, B e C si puo' scrivere il sistema di otto equazioni nelle otto costanti di integrazione:

$$a_2 = 0 \quad (13)$$

$$a_4 = 0 \quad (14)$$

$$a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3 + \frac{q}{24\,\mathrm{EI}} L^4 \quad (15)$$

$$b_1 = 0 \quad (16)$$

$$a_2 + 2 a_3 L + 3 a_4 L^2 + \frac{q}{6\,\mathrm{EI}} L^3 = b_2 \quad (17)$$

$$2 a_3 + 6 a_4 L + \frac{q}{2\,\mathrm{EI}} L^2 = 2 b_3 \quad (18)$$

$$b_1 + b_2 L + b_3 L^2 + b_4 L^3 + \frac{q}{24\,\mathrm{EI}} L^4 = 0 \quad (19)$$

$$b_2 + 2 b_3 L + 3 b_4 L^2 + \frac{q}{6\,\mathrm{EI}} L^3 = 0 \quad (20)$$

immediatamente riconducibile ad un sistema di cinque equazioni in cinque incognite:

$$a_1 + a_3 L^2 + \frac{q}{24\,\mathrm{EI}} L^4 \quad (21)$$

$$2 a_3 L + \frac{q}{6\,\mathrm{EI}} L^3 = b_2 \quad (22)$$

$$2 a_3 + \frac{q}{2\,\mathrm{EI}} L^2 = 2 b_3 \quad (23)$$

$$b_2 L + b_3 L^2 + b_4 L^3 + \frac{q}{24\,\mathrm{EI}} L^4 = 0 \quad (24)$$

$$b_2 + 2 b_3 L + 3 b_4 L^2 + \frac{q}{6\,\mathrm{EI}} L^3 = 0 \quad (25)$$

Sostituendo nelle ultime due equazioni i valori di b_2 e b_3 ricavati dalla seconda e terza equazione, si ottiene:

$$3 a_3 + b_4 L = -\frac{11\,q}{24\,\mathrm{EI}} L^2 \quad (26)$$

$$4 a_3 + 3 b_4 L = -\frac{5\,q}{6\,\mathrm{EI}} L^2 \quad (27)$$

con soluzione:

$$a_3 = -\frac{13\,q}{120\,\mathrm{EI}} L^2 \quad (28)$$

$$b_4 = -\frac{2\,q}{15\,\mathrm{EI}}\,L \tag{29}$$

Dalle (22) e (23) si ricavano b_2 e b_3, rispettivamente:

$$b_2 = -\frac{q}{20\,\mathrm{EI}}\,L^3 \tag{30}$$

$$b_3 = \frac{17\,q}{120\,\mathrm{EI}}\,L^2 \tag{31}$$

Infine, la (21) fornisce l'ultima costante di integrazione:

$$a_1 = \frac{q}{15\,\mathrm{EI}}\,L^4 \tag{32}$$

In definitiva, le due linee elastiche sono esprimibili come:

$$u_2 = \frac{q}{\mathrm{EI}}\left(\frac{L^4}{15} - \frac{13}{120}\,L^2\,z^2 + \frac{z^4}{24}\right) \tag{33}$$

$$v_2 = \frac{q}{\mathrm{EI}}\left(-\frac{L^3}{20}\,z' + \frac{17}{120}\,L^2\,z'^2 - \frac{2}{15}\,L\,z'^3 + \frac{z'^4}{24}\right) \tag{34}$$

da cui, in cascata, rotazioni, momenti e tagli:

$$\phi^{(1)} = \frac{q}{\mathrm{EI}}\left(\frac{13}{60}\,L^2\,z - \frac{z^3}{6}\right) \tag{35}$$

$$\phi^{(2)} = \frac{q}{\mathrm{EI}}\left(\frac{L^3}{20} - \frac{17}{60}\,L^2\,z' + \frac{2}{5}\,L\,z'^2 - \frac{z'^3}{6}\right) \tag{36}$$

$$M^{(1)} = q\left(\frac{13}{60}\,L^2 - \frac{z^2}{2}\right) \tag{37}$$

$$M^{(2)} = q\left(-\frac{17}{60}\,L^2 + \frac{4}{5}\,L\,z' - \frac{z'^2}{2}\right) \tag{38}$$

$$T^{(1)} = -\,q\,z \tag{39}$$

$$T^{(2)} = \frac{4}{5}\,q\,L - q\,z' \tag{40}$$

Le reazioni

La coppia reattiva del bipendolo e' pari al momento in A, cambiato di segno:

$$\mathcal{M}_{rA} = -M^{(1)}(z=0) = -\frac{13}{60}\,q\,L^2 \tag{41}$$

La reazione dell'appoggio centrale sara' fornita (equilibrio del concio) da:

$$R_B = T^{(1)}(z=L) - T^{(2)}(z'=0) = -q\,L - \frac{4}{5}\,q\,L = -\frac{9\,q\,L}{5} \tag{42}$$

La reazione e la coppia reattiva dell'incastro sono pari al taglio ed al momento in C:

$$\mathcal{M}_{rC} = M^{(2)}(z'=L) = \frac{q\,L^2}{60} \tag{43}$$

$$R_C = T^{(2)}(z' = L) = -\frac{q\,L}{5} \tag{44}$$

I diagrammi

Il tracciamento del diagramma del taglio parte dalle considerazioni preliminari:

1. in A il taglio e' uguale a zero

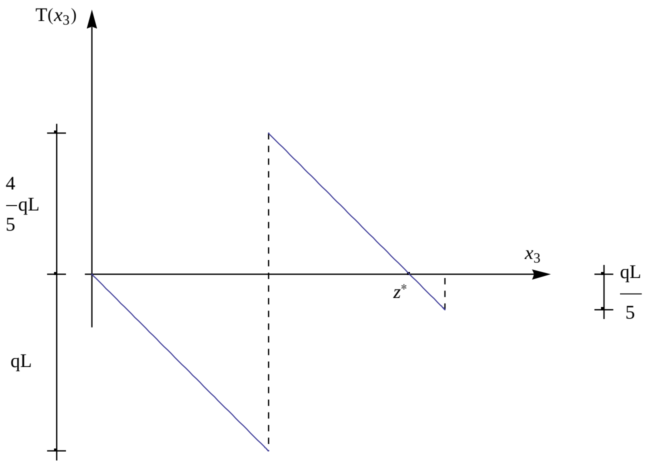
2. nel tratto AB il taglio varia linearmente, con pendenza pari a -q, giungendo quindi sull'appoggio con il valore -qL

3. in B il taglio ha una discontinuita' pari al valore della reazione, ed immediatamente a destra dell'appoggio si ha il valore $\frac{4}{5}$ qL

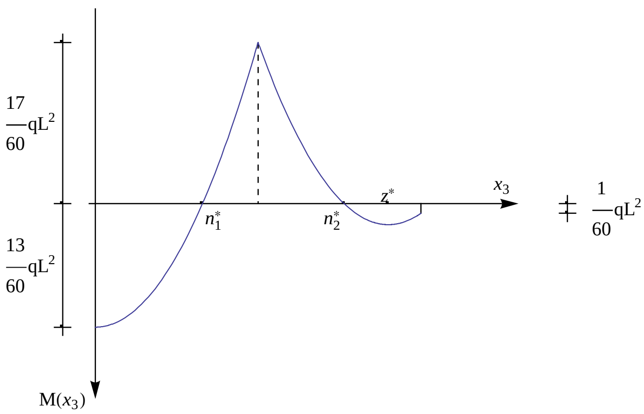
4. da B a C il taglio prosegue con andamento lineare, e pendenza uguale a -q, formando una retta parallela alla retta gia' tracciata

5. il taglio si annulla all'ascissa $z^* = \frac{9}{5}L$

6. il taglio prosegue fino all'incastro, dove dovra' essere pari a - $\frac{q\,L}{5}$. Tutto cio' e' sintetizzato nel diagramma seguente:



Per il tracciamento del diagramma del momento, ci si puo' aiutare anche col diagramma del taglio, che ne rappresenta la derivata. Quindi nel primo tratto esso variera' con legge parabolica, partendo da A con tangenza orizzontale e decresendo fino all'appoggio (zona di taglio negativo); nel tratto BC sara' ancora parabolicoi, ma crescente fino a z^*, dove raggiungera' un valore massimo, per poi tornare a decrescere fino a C.



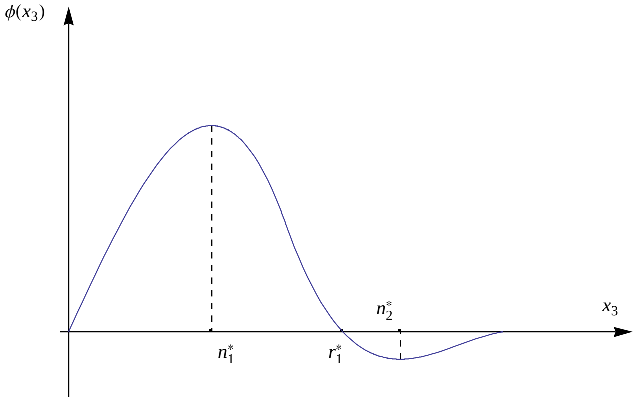
I due punti di nullo del diagramma del momento sono sitati alle ascisse $n_1^* = 0.66\,L$ ed $n_2^* = 1.53\,L$. Ambedue questi valori saranno utili per il tracciamento dei diagrammi di rotazioni (corrispondono a valori di estremo delle rotazioni) e spostamenti (corrispondono a curvature nulle).

Per le rotazioni si hanno le seguenti informazioni;

1. Il diagramma delle rotazioni avra' andamento cubico

2. Le rotazioni saranno nulle sia nel bipendolo in A che nell'incastro in C

3. Le rotazioni cresceranno da 0 fino ad n_1^*, ossia nella zona di momento positivo, poi decresceranno fino ad n_2^*, ossia nella zona di momento negativo, per poi crescere di nuovo, ed annullarsi in C



Sia i valori minimi e massimi delle rotazioni, sia il punto di nullo in r_1^* possono essere facilmente calcolati a partire dalle espressioni analitiche

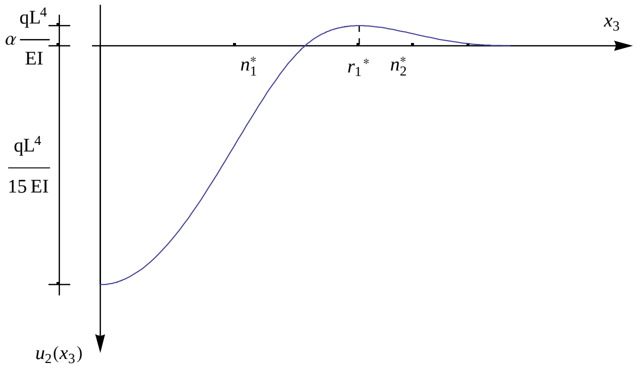
Sul diagramma degli spostamenti, infine, si puo' preliminarmente affermare che:

1. il diagramma avra' andamento quartico

2. il diagramma avra' un punto di nullo in corrispondenza dell'appoggio di mezzeria, ed un punto di nullo nell'incastro

3. il diagramma avra' tangenza orizzontale in A, in corrispondenza del bipendolo, ed in r_1^*, dove si annullano le rotazioni

4. in corrispondenza dei punti di nullo n_1^* ed n_2^* del diagramma del momento, il diagramma degli spostamenti presenta un punto di nullo della curvatura.



Il valore del coefficiente α, corrispondente al valore del massimo innalzamento, puo' essere facilmente calcolato a pertire dall'espressione analitica dello spostamento nella seconda campata:

$$\alpha = -\frac{\left(169 + 38\sqrt{19}\right)}{60\,000} \approx 0.005577 \tag{45}$$

Figure