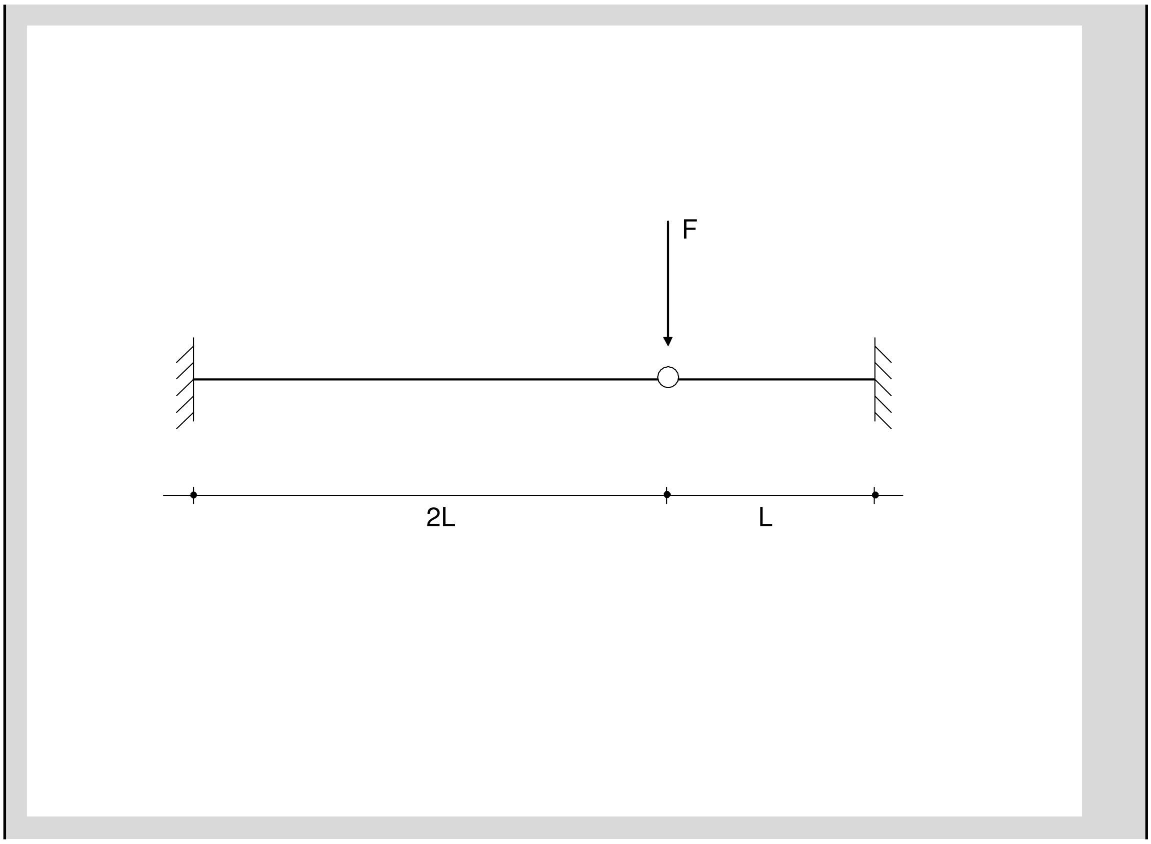
Esame 28 aprile 2010

Si consideri la trave a due campate disuguali di Figura, incastrata agli estremi e con cerniera a 2/3 della luce, e si supponga che essa sia caricata da una forza di intensita' F in corrispondenza della cerniera. Si richiede il tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche, delle rotazioni e degli abbassamenti, nonche' il valore dell'abbassamento e della rotazione relativa in corrispondenza della cerniera



Passo 1 - Scelta del metodo solutivo

La trave e' iperstatica, con grado di iperstaticita' pari ad 1, in quanto possono scriversi quattro equazioni di equilibrio indipendenti, nelle cinque incognite reattive (due reazioni verticali in corrispondenza dei due incastri, due coppie reattive ancora in corrispondenza degli incastri, il taglio in corrispondenza della cerniera). Si scrivono e si risolvono le equazioni differenziali del quarto ordine della linea elastica

Passo 2 - Scrittura e soluzione delle equazioni differenziali della linea elastica

La trave non e' soggetta a carichi distribuiti, quindi le due equazioni differenziali negli spostamenti u_2 e v_2 sono omogenee:

$$u_2''''(x_3) = 0 \qquad v_2''''(x_3) = 0 \tag{1}$$

con soluzioni:

$$u_2(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \tag{2}$$

$$v_2(x_3) = b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 \tag{3}$$

Le otto condizioni ai limiti dovranno esprimere due condizioni di congruenza nell'incastro:

$$u_2(0) = 0 \qquad u_2'(0) = 0 \tag{4}$$

quattro condizioni nell'appoggio intermedio:

$$\begin{aligned} &u_2(2L) = v_2(0)\\ &u_2''(2L) = 0\\ &v_2''(0) = 0\\ &EIu_2'''(2L) - EIv_2'''(0) + F = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

ed ancora due condizioni di congruenza nell'incastro di destra:

$$\begin{aligned} &v_2(L) = 0\\ &v_2'(L) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Si noti che la prima condizioni in corrispondenza della cerniera esprime la congruenza degli abbassamenti, l'annullarsi dei momenti e' conseguenza della sconnessione, mentre l'ultima esprime l'equilibrio alla traslazione verticale tra i tagli e la forza applicata.

Derivando opportunamente le (2) e (3) e valutando le (4-6), si giunge a scrivere il sistema di otto equazioni nelle otto costanti di integrazione a_i e b_i :

$$\begin{aligned} &a_0 = 0\\ &a_1 = 0\\ &a_0 + a_1(2L) + a_2(2L)^2 + a_3(2L)^3 = b_0\\ &2a_2 + 6a_3(2L) = 0\\ &2b_2 = 0\\ &6EIa_3 - 6EIb_3 + F = 0\\ &b_0 + b_1L + b_2L^2 + b_3L^3 = 0\\ &b_1 + 2b_2L + 3b_3L^2 = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Tale sistema si riduce immediatamente ad un sistema di cinque equazioni:

$$\begin{aligned} &4a_2L^2 + 8a_3L^3 = b_0\\ &a_2 + 6a_3L = 0\\ &a_3 - b_3 + \frac{F}{6EI} = 0\\ &b_0 + b_1L + b_3L^3 = 0\\ &b_1 + 3b_3L^2 = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

facilmente risolvibile inserendo i valori di b_0, a_2 e b_3 nelle ultime due equazioni:

$$\begin{aligned} &4(-6a_3L)L^2 + 8a_3L^3 + b_1L + \left(a_3 + \frac{F}{6EI}\right)L^3 = 0\\ &b_1 + 3\left(a_3 + \frac{F}{6EI}\right)L^2 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

ossia, semplificando :

$$\begin{aligned} &-15a_3L^3 + b_1L + \frac{FL^3}{6EI} = 0\\ &b_1 + 3a_3L^2 + \frac{FL^2}{2EI} = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

da cui subito:

$$\begin{aligned} &a_3 = -\frac{F}{54EI}\\ &b_1 = -\frac{4}{9}\frac{FL^2}{EI} \end{aligned} \tag{11}$$

Gli altri valori seguono in cascata :

$$b_0 = \frac{8}{27}\frac{FL^3}{EI};\ b_3 = \frac{4}{27}\frac{F}{EI};\ a_2 = \frac{FL}{9\,EI} \tag{12}$$

Gli spostamenti lungo la trave sono forniti quindi da:

$$u_2\,(x_3) = \frac{FL}{9\,EI}x_3^2 - \frac{F}{54\,EI}x_3^3 \tag{13}$$

$$v_2\,(x_3) = \frac{8}{27}\frac{FL^3}{EI} - \frac{4\,FL^2}{9\,EI}x_3 + \frac{4\,F}{27\,EI}x_3^3 \tag{14}$$

le rotazioni sono pari a:

$$\phi^{(1)}\,(x_3) = -\frac{2\,FL}{9\,EI}x_3 + \frac{F}{18\,EI}x_3^2 \tag{15}$$

$$\phi^{(2)}\,(x_3) = \frac{4\,FL^2}{9\,EI} - \frac{4\,F}{9\,EI}x_3^2 \tag{16}$$

il momento flettente e' esprimibile come:

$$M_1^{(1)}\,(x_3) = -\frac{2\,FL}{9} + \frac{F}{9}x_3 \tag{17}$$

$$M_1^{(2)}\,(x_3) = -\frac{8\,F}{9}x_3 \tag{18}$$

Infine, il taglio e' pari a:

$$T_2^{(1)}\,(x_3) = \frac{F}{9} \tag{19}$$

$$T_2^{(2)}\,(x_3) = -\frac{8}{9}F \tag{20}$$

■ Passo 3 - Tracciamento diagramma del taglio e del momento flettente

Il diagramma del taglio sara' costante lungo il primo tratto, e pari ad un nono della forza applicata, mentre sara' costante, negativo, e pari ad 8/9 della forza applicata, nel secondo tratto. In corrispondenza della cerniera si avra' quindi una discontinutita' pari al valore della forza F.

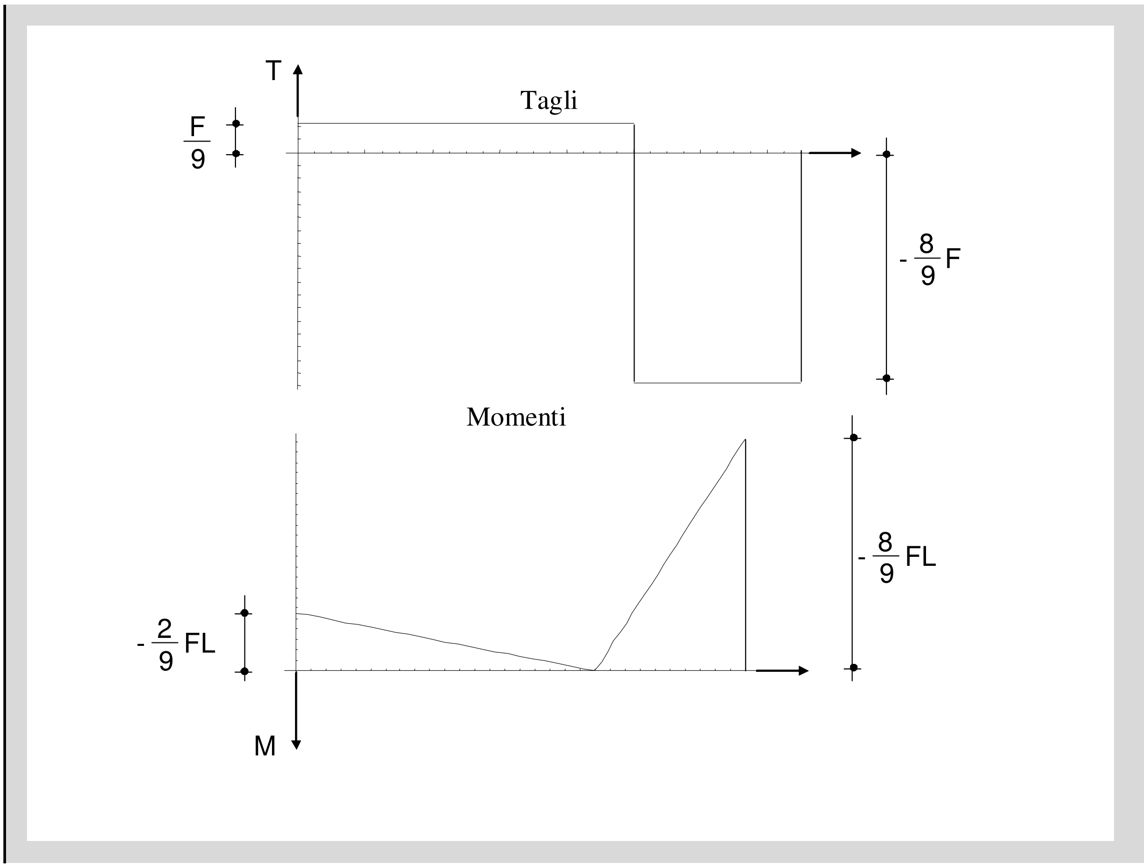
Il momento si annulla in corrispondenza della cerniera e variera' linearmente lungo il primo tratto, attingendo il valore

$$M_1^{(1)}\,(0) = -\frac{2\,FL}{9} \tag{21}$$

in corrispondenza dell'incastro di sinistra. In corrispondenza della cerniera si avra' anche una discontinuita' angolare del diagramma del momento, e raggiungera' il valore

$$M_1^{(2)}\,(L) = -\frac{8\,FL}{9} \tag{22}$$

nell' incastro di destra.



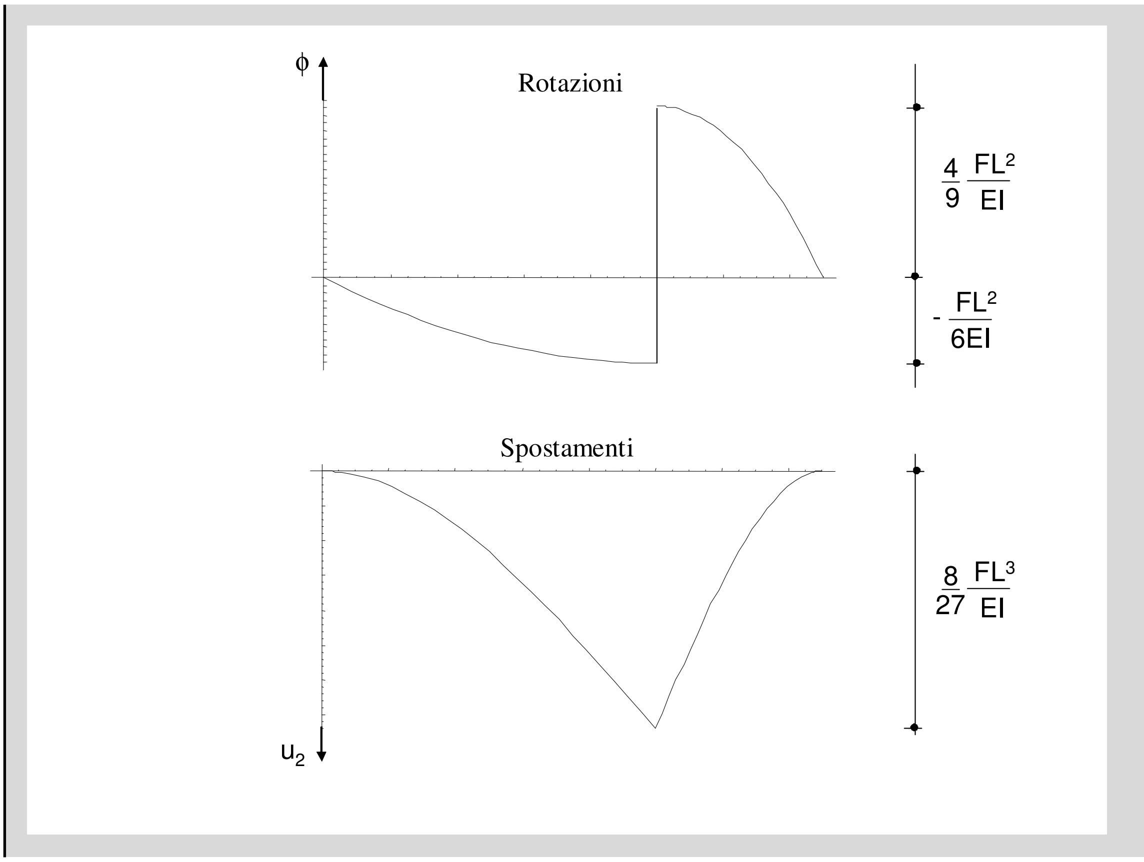
■ Passo 4 - Tracciamento del diagramma di rotazione e spostamento

Per tracciare il diagramma delle rotazioni e degli spostamenti si hanno le seguenti informazioni:

1. il diagramma delle rotazioni sara' quadratico

2. il diagramma delle rotazioni dovra' annullarsi in corrispondenza degli incastri, ed avra' tangenza orizzontale in corrispondenza della cerniera.

3. il diagramma degli spostamenti si annulla negli incastri, dove avra' tangenza orizzontale, e non vi saranno punti di flesso



Passo 5 - Determinazione del valore massimo dello spostamento

La rotazione relativa tra le due facce della cerniera e' calcolabile come:

$$\Delta\phi = \phi_{des} - \phi_{sin} = \frac{4\,FL^2}{9\,EI} + \frac{FL^2}{6\,EI} = \frac{11\,FL^2}{18\,EI} \tag{23}$$

mentre l'abbassamento della cerniera e' pari a:

$$v_{2\,max} = v_2\,(0) = \frac{8\,FL^3}{27\,EI} \tag{24}$$