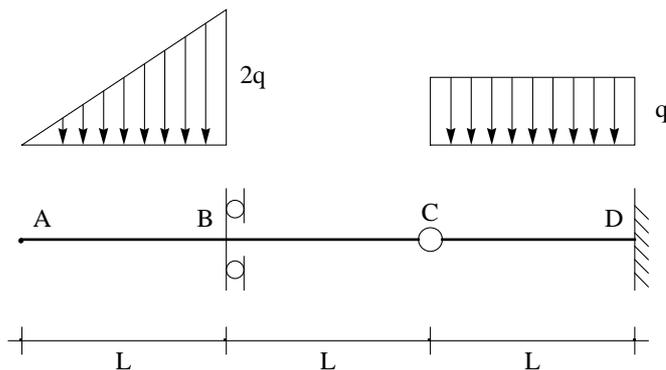


Verifica n.32

Giovedì 27 Settembre 2012 - ore 9.30-11.30

Si consideri la trave di Figura 1, libera in A, e vincolata con un bipendolo esterno in B, una cerniera in C ed un incastro in D. La trave è soggetta ad un carico triangolare sullo sbalzo, variabile con legge lineare tra 0 in A e $2q$ in B, e da una stesa di carico uniforme, di intensità q sulla campata CD

Si calcolino e si disegnino i diagrammi di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli



Soluzione

Poiché si desidera l'intero diagramma degli spostamenti, delle rotazioni, dei momenti e dei tagli, si utilizza la metodologia della linea elastica. Introdotta allora le tre incognite spostamento u_2 , v_2 e w_2 , si hanno le tre equazioni differenziali:

$$u_2''' = 2 \frac{q}{EI} \frac{x_3}{L} \quad (1)$$

$$v_2''' = 0 \quad (2)$$

$$w_2''' = \frac{q}{EI} \quad (3)$$

con soluzione:

$$u_2 = \frac{q x_3^5}{60 EI L} + a_0 x_3^3 + a_1 x_3^2 + a_2 x_3 + a_3 \quad (4)$$

$$v_2 = b_0 x_3^3 + b_1 x_3^2 + b_2 x_3 + b_3 \quad (5)$$

$$w_2 = \frac{q x_3^4}{24 EI} + c_0 x_3^3 + c_1 x_3^2 + c_2 x_3 + c_3 \quad (6)$$

Le successive derivate si scrivono quindi:

$$u_2' = \frac{q x_3^4}{12 EI L} + 3 a_0 x_3^2 + 2 a_1 x_3 + a_2 \quad (7)$$

$$u_2'' = \frac{q x_3^3}{3 EI L} + 6 a_0 x_3 + 2 a_1 \quad (8)$$

$$u_2''' = \frac{q x_3^2}{EI L} + 6 a_0 \quad (9)$$

$$v_2' = 3 b_0 x_3^2 + 2 b_1 x_3 + b_2 \quad (10)$$

$$v_2'' = 6 b_0 x_3 + 2 b_1 \quad (11)$$

$$v_2''' = 6 b_0 \quad (12)$$

$$w_2' = \frac{q x_3^3}{6 EI} + 3 c_0 x_3^2 + 2 c_1 x_3 + c_2 \quad (13)$$

$$w_2'' = \frac{q x_3^2}{2 EI} + 6 c_0 x_3 + 2 c_1 \quad (14)$$

$$w_2''' = \frac{q x_3}{EI} + 6 c_0 \quad (15)$$

Le costanti di integrazione si ottengono imponendo le condizioni ai limiti in corrispondenza dei punti di discontinuita':

- nell'estremo libero A, momento e taglio nulli:

$$-EI u_2''(x_3 = 0) = 0 \rightarrow a_1 = 0 \quad (16)$$

$$-EI u_2'''(x_3 = 0) = 0 \rightarrow a_0 = 0 \quad (17)$$

- in corrispondenza del bipendolo esterno, continuita' dell'abbassamento, annullamento della rotazione, continuita' dei tagli:

$$u_2(x_3 = L) = v_2(x_3 = 0) \rightarrow \frac{q L^4}{60 EI} + a_2 L + a_3 = b_3 \quad (18)$$

$$u_2'(x_3 = L) = 0 \rightarrow \frac{q L^3}{12 EI} + a_2 = 0 \rightarrow a_2 = -\frac{q L^3}{12 EI} \quad (19)$$

$$v_2'(x_3 = 0) = 0 \rightarrow b_2 = 0 \quad (20)$$

$$-EI u_2'''(x_3 = L) = -EI v_2'''(x_3 = 0) \rightarrow \frac{q L}{EI} + 6 a_0 = 6 b_0 \rightarrow b_0 = \frac{q L}{6 EI} \quad (21)$$

- in corrispondenza della cerniera, continuita' degli spostamenti, annullarsi dei momenti, continuita' dei tagli:

$$v_2(x_3 = L) = w_2(x_3 = 0) \rightarrow b_0 L^3 + b_1 L^2 + b_3 = c_3 \quad (22)$$

$$-EI v_2''(x_3 = L) = 0 \rightarrow 6 b_0 L + 2 b_1 = 0 \rightarrow b_1 = -\frac{q L^2}{2 EI} \quad (23)$$

$$-EI w_2''(x_3 = 0) = 0 \rightarrow c_1 = 0 \quad (24)$$

$$-EI v_2'''(x_3 = L) = -EI w_2'''(x_3 = 0) \rightarrow b_0 = c_0 \rightarrow c_0 = \frac{q L}{6 EI} \quad (25)$$

- in corrispondenza dell'incastro, annullarsi di spostamento e rotazione:

$$w_2(x_3 = L) = 0 \rightarrow \frac{q L^4}{24 EI} + c_0 L^3 + c_2 L + c_3 = 0 \quad (26)$$

$$w_2'(x_3 = L) = 0 \rightarrow \frac{q L^3}{6 EI} + 3 c_0 L^2 + c_2 = 0 \rightarrow c_2 = -\frac{2 q L^3}{3 EI} \quad (27)$$

Restano da calcolare le sole incognite a_3 per la prima linea elastica, b_3 per la seconda linea elastica, c_3 per la terza linea elastica. Dalla (26) si ha subito:

$$c_3 = \frac{11 q L^4}{24 EI} \quad (28)$$

e dalla (22) si ottiene:

$$b_3 = c_3 - b_0 L^3 - b_1 L^2 = \frac{19 q L^4}{24 EI} \quad (29)$$

Infine, a_3 si ottiene dalla (18):

$$a_3 = b_3 - \frac{qL^4}{60EI} - a_2L = \frac{103}{120} \frac{qL^4}{EI} \quad (30)$$

In realta', quindi, le costanti possono in questo caso calcolarsi senza risolvere alcun sistema di equazioni.

■ L'espressione di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli

Le tre linee elastiche possono scriversi immediatamente come:

$$u_2 = \frac{qx_3^5}{60EI} - \frac{qL^3}{12EI}x_3 + \frac{103}{120} \frac{qL^4}{EI} \quad (31)$$

$$v_2 = \frac{qL}{6EI}x_3^3 - \frac{qL^2}{2EI}x_3^2 + \frac{19}{24} \frac{qL^4}{EI} \quad (32)$$

$$w_2 = \frac{qx_3^4}{24EI} + \frac{qL}{6EI}x_3^3 - \frac{2qL^3}{3EI}x_3 + \frac{11}{24} \frac{qL^4}{EI} \quad (33)$$

Le rotazioni sono calcolabili derivando e cambiando di segno:

$$\phi^{(1)} = -\frac{qx_3^4}{12EI} + \frac{qL^3}{12EI} \quad (34)$$

$$\phi^{(2)} = -\frac{qL}{2EI}x_3^2 + \frac{qL^2}{EI}x_3 \quad (35)$$

$$\phi^{(3)} = -\frac{qx_3^3}{6EI} - \frac{qL}{2EI}x_3^2 + \frac{2qL^3}{3EI} \quad (36)$$

I momenti possono calcolarsi a partire dagli abbassamenti, derivando due volte, oppure a partire dalle rotazioni:

$$M^{(1)} = -\frac{qx_3^3}{3L} \quad (37)$$

$$M^{(2)} = -qLx_3 + qL^2 \quad (38)$$

$$M^{(3)} = -\frac{qx_3^2}{2} - qLx_3 \quad (39)$$

Infine, i tagli sono forniti da:

$$T^{(1)} = -\frac{qx_3^2}{L} \quad (40)$$

$$T^{(2)} = -qL \quad (41)$$

$$T^{(3)} = -qx_3 - qL \quad (42)$$

■ I diagrammi

Il diagramma del taglio ha andamento parabolico da A a B, poi prosegue costante lungo BC, per poi variare con legge lineare nell'ultimo tratto CD. In A il taglio ha valore nullo, e partira' con tangenza orizzontale, in quanto il carico si annulla in A, in B si ha il valore $-qL$, che si conserva fino a C, mentre in D si avra' il valore $-2qL$. Il diagramma e' quindi immediato:

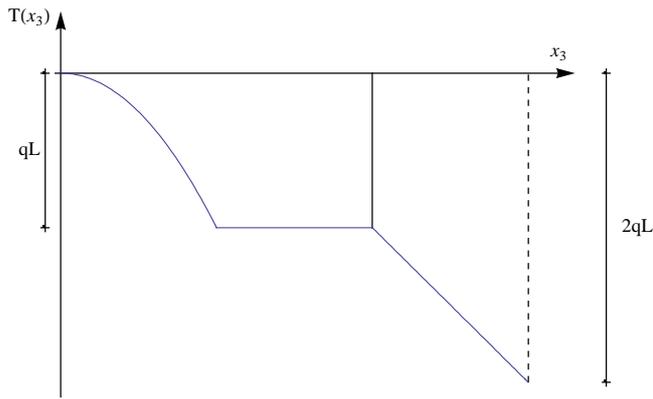


Figura 2 - Il diagramma del taglio

Il diagramma del momento avrà andamento cubico in AB, annullandosi in A insieme alla sua derivata prima e seconda, avrà andamento lineare nel tratto scarico BC, per poi variare con legge quadratica nell'ultimo tratto CD. Inoltre, esso dovrà avere una discontinuità in corrispondenza del bipendolo esterno, che introduce una coppia reattiva, e dovrà annullarsi nella cerniera in C. I valori immediatamente a sinistra e a destra del bipendolo sono:

$$M_{Bsin} = -\frac{qL^2}{3} \quad (43)$$

$$M_{Bdes} = qL^2 \quad (44)$$

mentre nell'incastro si ha:

$$M_D = -\frac{3qL^2}{2} \quad (45)$$

Il diagramma si presenta ovunque decrescente, in quanto il taglio è ovunque negativo:

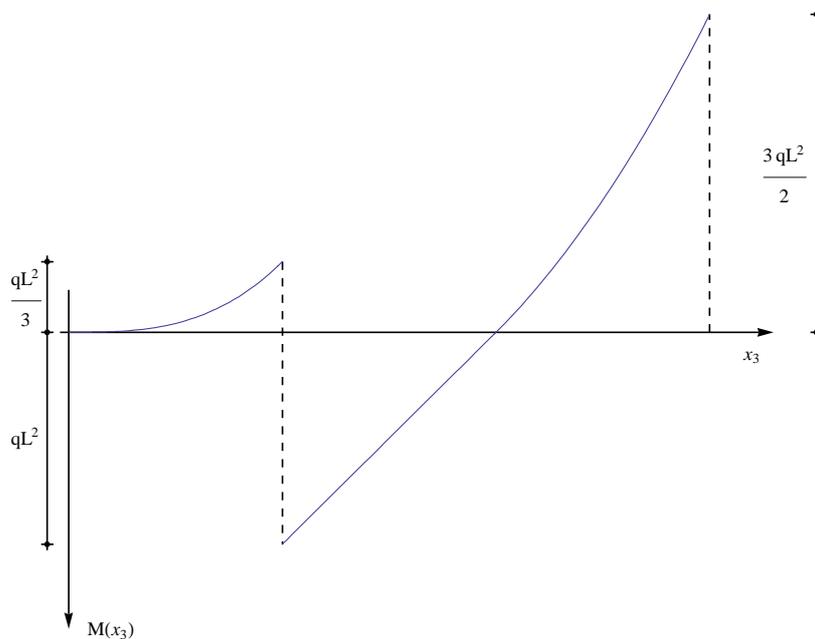


Figura 3 - Il diagramma del momento

Per tracciare il diagramma delle rotazioni, si hanno le seguenti informazioni: in A la rotazione assume il valore:

$$\phi_A = \frac{qL^3}{12EI} \quad (46)$$

ed il diagramma partira' con tangenza orizzontale. In B la rotazione e' nulla, con discontinuita' angolare (dovuta alla discontinuita' del diagramma del momento), in C si avranno i due valori:

$$\phi_{Csin} = \frac{q L^3}{2 EI}; \quad \phi_{Cdes} = \frac{2 q L^3}{3 EI} \quad (47)$$

immediatamente a sinistra ed a destra della cerniera. Infine, nell'incastro la rotazione sara' nulla:

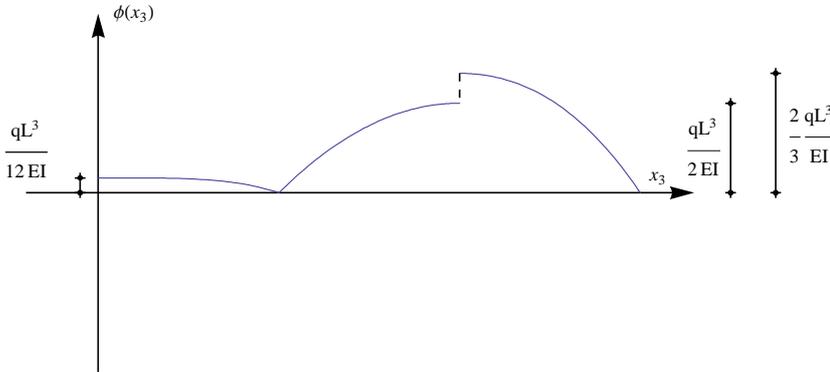


Figura 4 - Il diagramma delle rotazioni

Infine, il diagramma degli abbassamenti potra' tracciarsi tenendo conto che si conosce il valore dell'abbassamento in A:

$$u_{2A} = \frac{103 q L^4}{120 EI} \quad (48)$$

che il diagramma dovra' presentare tangenza orizzontale in corrispondenza del bipendolo esterno, che dovra' cambiare curvatura in corrispondenza della cerniera, che dovra' essere ovunque decrescente, e che dovra' annullarsi in D, dove arrivera' con tangenza orizzontale:

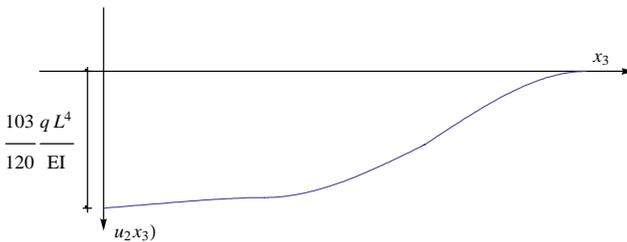


Figura 5 - Il diagramma degli spostamenti

Figure