Verifica n.29

Lunedi' 27 Giugno 2012 - ore 9.30-11.30

Si consideri il telaio di Figura, e per esso si calcolino le reazioni vincolari, operando le opportune verifiche, e si disegni il diagramma del taglio e del momento

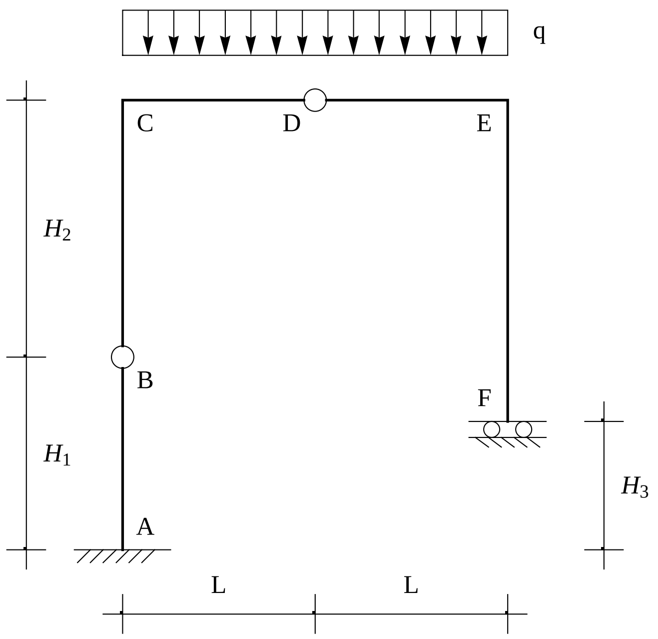

Figura 1 - Lo schema di calcolo

Soluzione

Il telaio e' costituito da tre tratti rigidi, connessi tramite due cerniere in B ed in D, e vincolati al suolo tramite un incastro in A ed un bipendolo a piano di scorrimento orizzontale in F.

- **Analisi cinematica**

Rimuovendo i vincoli, i tre tratti rigidi hanno nove possibilita' di movimento. Reintroducendo l'incastro si possono scrivere tre equazioni di vincolo, rimuovendo cosi' tre possibilita' di movimento, il bipendolo in F proibisce sia la rotazione che l'abbassamento, e ciascuna delle due cerniere proibisce gli spostamenti relativi, sia verticali che orizzontali. Si ha cosi' il pareggio tra i possibili moti rigidi del sistema senza vincoli (3t = 9), ed il numero dei gradi di liberta' soppressi da vincoli (s = 3+2+2+2=9); la struttura e' potenzialmente isostatica: 3t - s = 0

- **Analisi statica**

Per ciascun tratto rigido e' possibile scrivere tre equazioni di equilibrio, per un totale di 3t = 9 equazioni. Le relative incognite sono le tre reazioni dell'incastro (reazione verticale, reazione orizzontale, coppia reattiva), le due reazioni del bipendolo (reazione verticale e coppia reattiva), lo sforzo normale ed il taglio in ciascuna delle due cerniere, per un totale di s = 3+2+2+2 incognite. Si conferma il risultato dell'analisi cinematica: 3t - s = 0

Il calcolo delle reazioni

Poiche' la struttura e' isostatica, il calcolo delle reazioni puo' essere condotto con l'ausilio delle sole equazioni della statica. Sostituendo ai vincoli le rispettive incognite reattive si ottiene il diagramma di Figura 2, su cui e' immediato scrivere le nove equazioni di equilibrio:

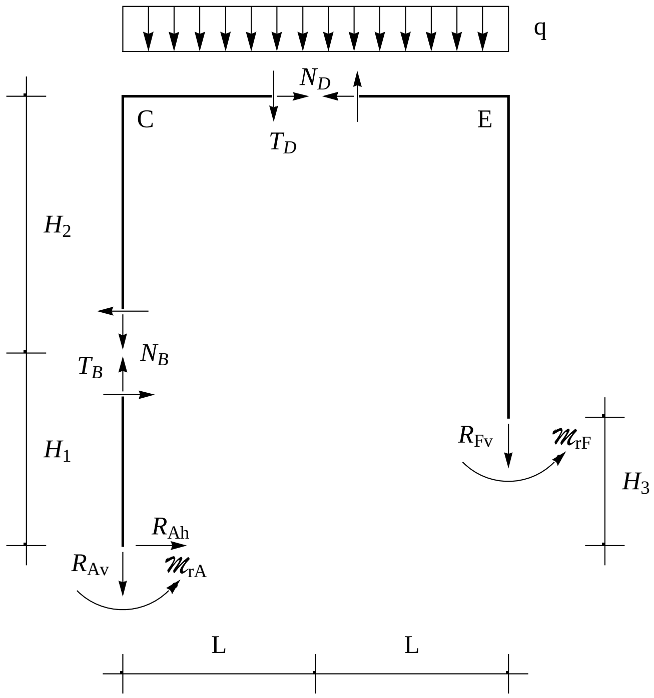

Figura 2 - Le reazioni incognite

$$-N_B + R_{Av} = 0 \tag{1}$$

$$T_B + R_{Ah} = 0 \tag{2}$$

$$\mathcal{M}_{rA} - T_B H_1 = 0 \tag{3}$$

$$-T_B + N_D = 0 \tag{4}$$

$$N_B + T_D + q L = 0 \tag{5}$$

$$-T_D L - N_D H_2 - q L \frac{L}{2} = 0 \tag{6}$$

$$-N_D = 0 \tag{7}$$

$$R_{Fv} - T_D + q L = 0 \tag{8}$$

$$\mathcal{M}_{rF} - R_{Fv} L - q L \frac{L}{2} = 0 \tag{9}$$

avendo scelto i tre poli in A, in B ed in D, rispettivamente. La soluzione di queste equazioni e' immediata, in quanto:

$$N_D = T_B = \mathcal{M}_{rA} = R_{Ah} = 0 \tag{10}$$

$$T_D = -q \frac{L}{2} \tag{11}$$

$$N_B = -q \frac{L}{2} \tag{12}$$

$$R_{Av} = -q \frac{L}{2} \tag{13}$$

$$R_{Fv} = T_D - q\,L = -\frac{3}{2}\,q\,L \tag{14}$$

$$\mathcal{M}_{rF} = R_{Fv}\,L + q\,L\,\frac{L}{2} = -q\,L^2 \tag{15}$$

Una verifica

La struttura e' globalmente equilibrata, in quanto puo' facilmente verificarsi che:

$$R_{Ah} = 0 \tag{16}$$

$$R_{Av} + R_{Fv} + 2\,q\,L = -q\,\frac{L}{2} - \frac{3}{2}\,q\,L + 2\,q\,L = 0 \tag{17}$$

$$\mathcal{M}_{rA} + \mathcal{M}_{rF} - R_{Fv}\,2\,L - 2\,q\,L\,L = -q\,L^2 + 3\,q\,L^2 - 2\,q\,L^2 = 0 \tag{18}$$

I diagrammi di taglio e momento

La reazione orizzontale nell'incastro e' nulla, e quindi risulta nullo il taglio lungo il piedritto AC. Analogamente, nullo sara' il taglio lungo l'altro piedritto EF. Ne segue che il diagramma del taglio sara' limitato al traverso CE, dove variera' con legge lineare, in quanto il carico e' costante. Poiche' si puo' dedurre, dall'equilibrio dei nodi C ed E:

$$T_{CD} + N_{CA} = 0 \tag{19}$$

$$-T_{EC} + N_{EF} = 0 \tag{20}$$

si hanno i due valori del taglio agli estremi del traverso:

$$T_{CD} = q\,\frac{L}{2} \tag{21}$$

$$T_{EC} = -\frac{3}{2}\,q\,L \tag{22}$$

Il diagramma si presenta quindi come in Figura 3. Si noti che una banale similitudine tra triangoli permette di asserire che il diagramma del taglio si annulla in L/2.

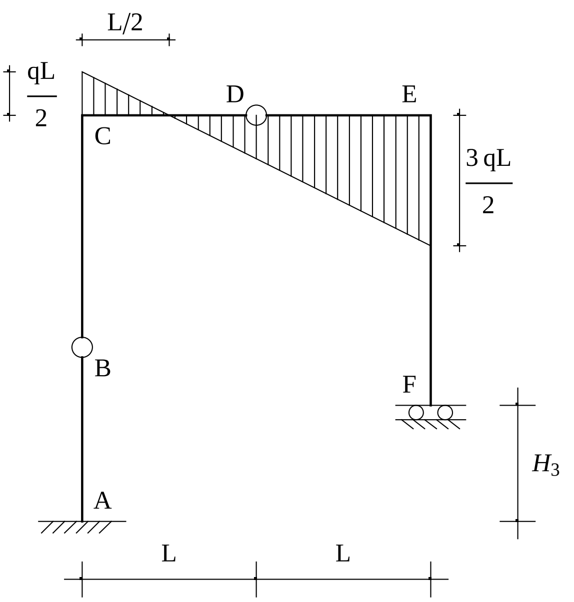

Figura 3 - Il diagramma del taglio

Il diagramma del momento sara' nullo sul piedritto AC, in quanto la coppia reattiva dell'incastro e' nulla, e sara' costante lungo il piedritto EF, con valore pari alla coppia reattiva del bipendolo. Ne segue che - per l'equilibrio del concio in E, il momento in E sul traverso sara' pari a:

$$M_{ED} = M_{EF} = -q\ L^2 \tag{23}$$

E' noto inoltre che il momento sul traverso sara' distribuito con legge quadratica, annullandosi in C ed in D. Cio' basta a tracciare il diagramma, che dovra' avere anche un punto di massimo in L/2. Il diagramma si presenta quindi come in Figura 4.

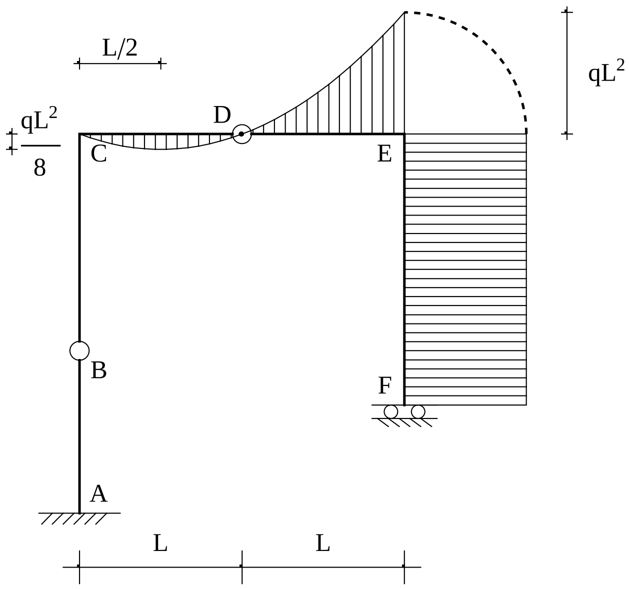

Figura 4 - Il diagramma del momento

Figure