Verifica n.7

Mercoledi' 23 settembre 2009 - ore 9.30-11.30

Studiare le tensioni tangenziali agenti in un punto P di un solido S caratterizzato dalla seguente matrice delle tensioni:

$$S = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} 10^2\ \mathrm{Kg} / \mathrm{cm}^2 \tag{1}$$

In particolare:

a) determinare le minime e massime tensioni tangenziali, insieme ai piani su cui esse agiscono
b) se esistono stati tensionali caratterizzati da sole tensioni tangenziali, calcolare il loro valore, ed identificare i piani sui cui agiscono

Soluzione

Per calcolare le minime e massime tensioni tangenziali, e' opportuno dedurre le tensioni principali. Cio' risulta immediato nel presente caso, in quanto una tensione principale sara' certamente pari a $\sigma_1 = -3\ 10^2\ \mathrm{Kg/cm^2}$, come puo' dedursi dalla forma della prima riga e della prima colonna, ed una seconda tensione principale sara' certamente $\sigma_2 = 0$, in quanto il determinante di S e' nullo (la seconda e la terza riga sono manifestamente linearmente dipendenti). Partendo infine dall'espressione dell'invariante lineare:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \tag{2}$$

si puo' dedurre la terza tensione principale $\sigma_3 = 5\ 10^2\ \mathrm{Kg/cm^2}$.

$$\begin{aligned} -3\, n_1 &= 0 \\ n_2 + 2\, n_3 &= 0 \\ 2\, n_2 + 4\, n_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Dalla prima equazione traggo $n_1 = 0$, dalla seconda (o dalla terza, che e' equivalente) traggo $n_2 = -2\, n_3$. La seconda direzione principale ha allora coseni direttori (0,-2,1).

Infine la terza direzione principale si ottiene dalla soluzione del sistema :

$$\begin{aligned} -8\, n_1 &= 0 \\ -4\, n_2 + 2\, n_3 &= 0 \\ 2\, n_2 - n_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Ancora una volta, $n_1 = 0$, mentre dalla terza (o dalla seconda) equazione si trae $n_3 = 2\, n_2$. La terza direzione principale ha quindi coseni direttori (0,1,2).

Si disegnino ora, per comodita' di visualizzazione, i tre cerchi principali di Mohr:

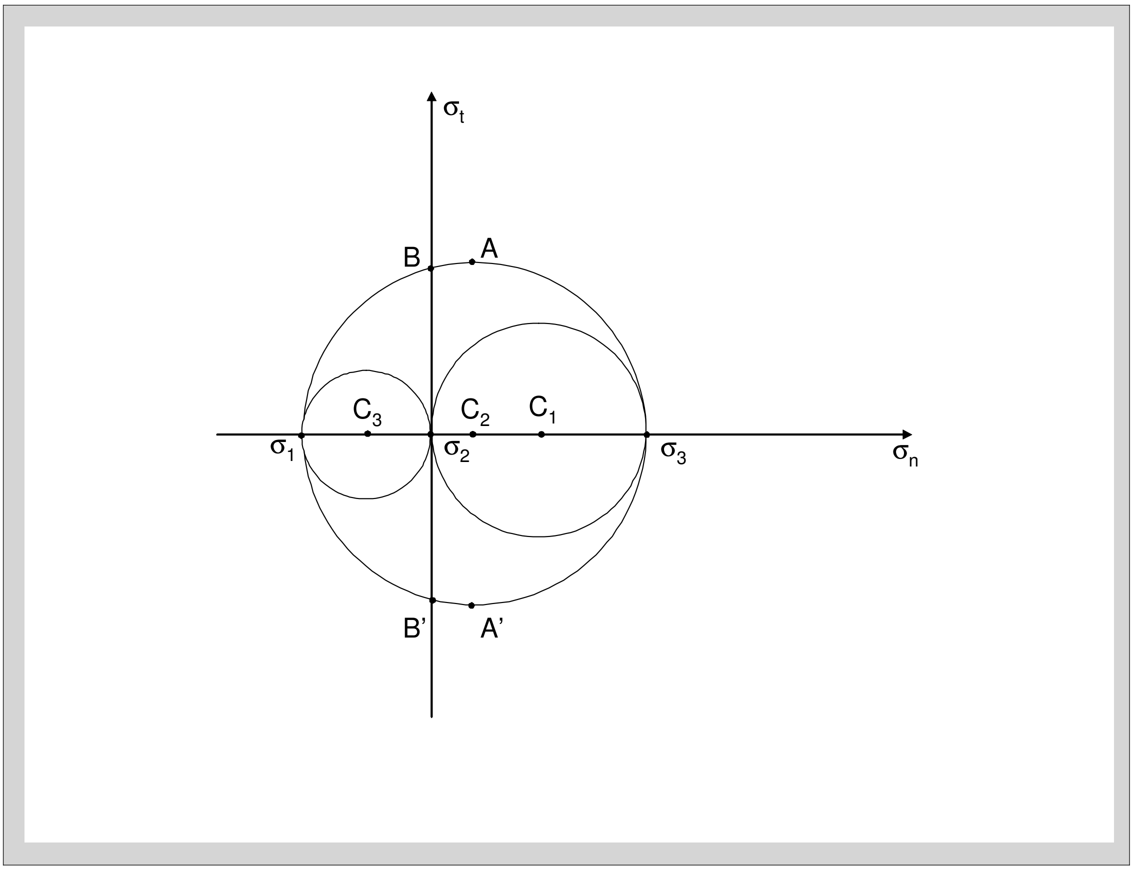

Fig. 1 - I tre cerchi principali di Mohr

Gli stati tensionali caratterizzati da tensioni tangenziali massime sono stati indicati con i simboli A ed A', sono relativi al cerchio di centro C_2 e diametro $\sigma_3 - \sigma_1$. Ne segue che le tensioni tangenziali massime hanno valore ±4 10^2 Kg/cm^2. Inoltre, le giaciture su cui queste tensioni vengono attinte sono ottenibili congiungendo il polo (σ_3, 0) con i punti A ed A'.

Si noti che le due giaciture sono inclinate di 45 gradi rispetto all'asse orizzontale, e che lo stato tensionale prevede la presenza contemporanea di una tensione di trazione pari a 1 10^2 Kg/cm^2.

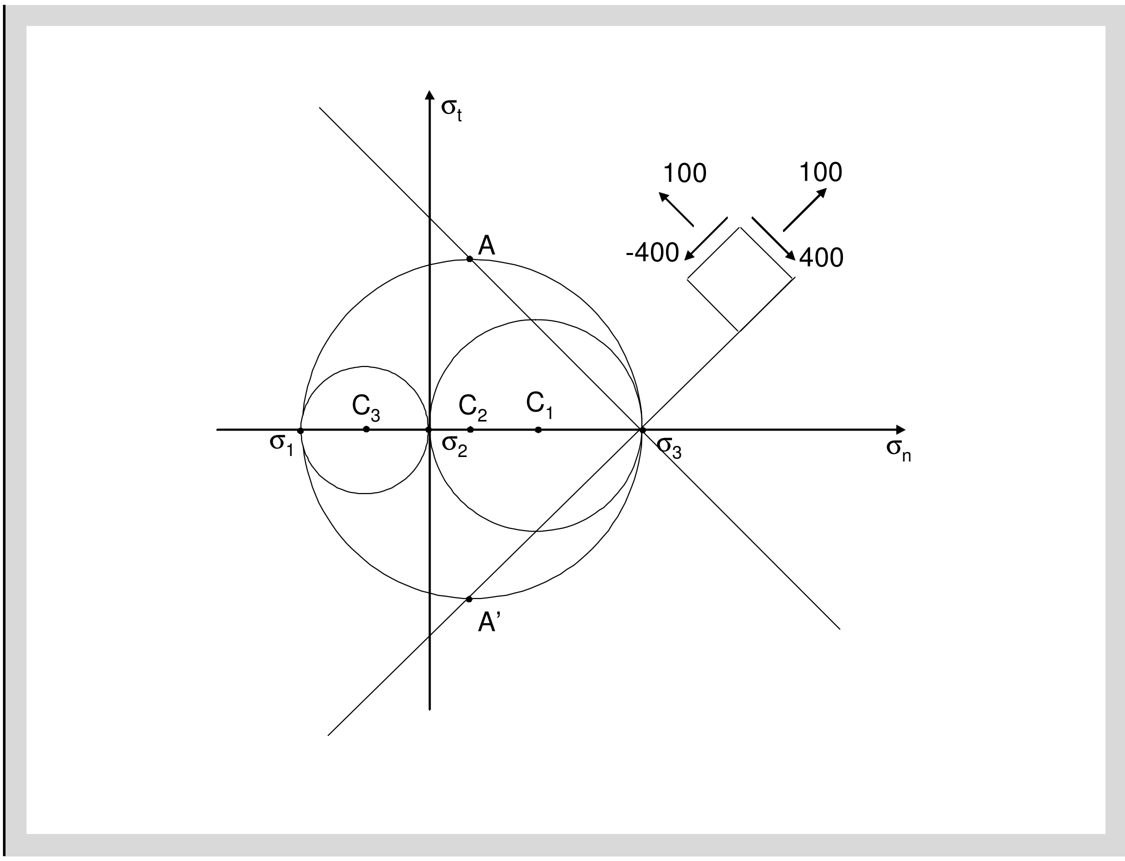

Fig.2 - Le due giaciture su cui si ottengono le tensioni tangenziali massime

2. Gli stati tensionali indicati con B e B' in Figura 1 sono caratterizzati da assenza di tensioni normali. Per ottenere il valore delle tensioni tangenziali non resta che intersecare il cerchio di raggio R= $(\sigma_3 - \sigma_1)/2$ e centro C_2= $((\sigma_1 + \sigma_3)/2,\ 0)$ con l'asse verticale. Si ottiene il sistema:

$$\begin{aligned} &(\sigma_n - 100)^2 + \sigma_t^2 = 400^2 \\ &\sigma_n = 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

da cui subito:

$$\sigma_t^2 = 400^2 - 100^2 \qquad (6)$$

e quindi $\sigma_t \ = \ \pm \ 3.87\ 10^2\ \mathrm{Kg/cm^2}$

Le corrispondenti giaciture si ottengono, come usuale, collegando il polo con B e B'.