Verifica n.45 (8-9 crediti)

Mercoledì 23 aprile 2014 - ore 9.30-11.30

Calcolare la variazione di spostamento verticale tra le due facce del bipendolo in C

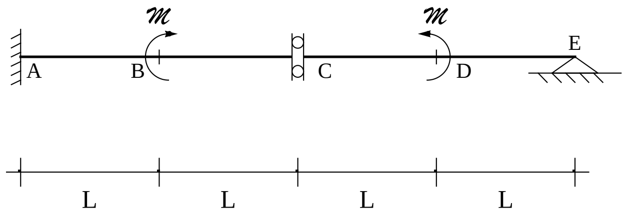

Figura 1 - Lo schema di partenza

Soluzione

La struttura e' costituita da due tratti, e possono quindi scriversi quattro equazioni di equilibrio. Le relative incognite statiche sono le reazioni verticali in A ed in E, la coppia reattiva in A, ed il momento in C. La struttura e' quindi isostatica, e lo spostamento relativo in C puo' essere facilmente calcolato utilizzando il principio dei lavori virtuali. Alternativamente, il metodo dell'analogia di Mohr si presta egregiamente, in quanto il diagamma del momento sulla struttura di Figura 1 e' molto semplice. Viceversa, non sembra opportuno affrontare il problema attraverso la scrittura dell'equazione della linea elastica, che comporta l'impostazione e la soluzione di un sistema di sedice equazioni.

Volendo affrontare il calcolo dell'abbassamento relativo in C attraverso l'applicazione delle analogie di Mohr, occorre:

1. calcolare il diagramma $M(x_3)$ del momento sullo schema di Figura 1

2, costruire la trave fittizia, caricandola con il carico fittizio $q^*(x_3) = \frac{M(x_3)}{\mathrm{EI}}$

3. calcolare la coppia reattiva fittizia $\mathcal{M}_C^*$ del bipendolo esterno in C

Il primo passo e' facile, in quanto le equazioni di equilibrio si scrivono:

$$R_A = 0 \tag{1}$$

$$\mathcal{M} - \mathcal{M} + M_C = 0 \tag{2}$$

$$R_E = 0 \tag{3}$$

$$\mathcal{M} - M_C = 0 \tag{4}$$

con soluzione immediata:

$$R_A = R_E = \mathcal{M}_{\mathrm{rA}} = 0 \tag{5}$$

$$M_C = \mathcal{M} \tag{6}$$

Il diagramma del momento, quindi, si estende da B a D, e' costante, positivo, e pari ad $\mathcal{M}$. Il carico fittizio quindi, potra' scriversi come:

$$q^*(x_3) = \frac{\mathcal{M}}{\mathrm{EI}} \tag{7}$$

relativamente al solo tratto BD, ed agira' sulla trave fittizia di Figura 2, in cui l'incastro si e' tramutato in un estremo libero, ed il bipendolo interno e' diventato un bipendolo esterno.

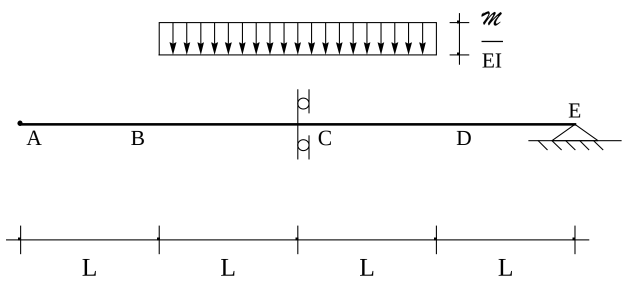

Figura 2 - La trave ausiliaria con il suo carico fittizio

Lo spostamento relativo tra le due facce del bipendolo si potra' allora calcolare, in base alle analogie di Mohr, come:

$$\Delta u_{2C} = u_{2\,\mathrm{Cdes}} - u_{2\,\mathrm{Csin}} = M^*_{\mathrm{Cdes}} - M^*_{\mathrm{Csin}} = -\mathcal{M}_{\mathrm{rC}} \tag{8}$$

Occorre quindi dedurre la coppia reattiva del bipendolo in C, e cambiarla di segno. Le equazioni di equilibrio per la trave di Figura 2 porgono (polo in C):

$$R_E + \frac{2\,\mathcal{M}L}{\mathrm{EI}} = 0 \tag{9}$$

$$\mathcal{M}_{\mathrm{rC}} - R_E\,2\,L = 0 \tag{10}$$

e quindi:

$$\mathcal{M}_{\mathrm{rC}} = -\frac{4\,\mathcal{M}L^2}{\mathrm{EI}} \tag{11}$$

Infine, il richiesto spostamento relativo e' pari a:

$$\Delta u_{2C} = \frac{4\,\mathcal{M}L^2}{\mathrm{EI}} \tag{12}$$