

Verifica n.45 - 12 crediti

23 aprile 2014 - Mercoledì 9.30 - 11.30

Si consideri il telaio di Figura 1, vincolato con due appoggi al piede e disconnesso con un bipendolo interno ad asse verticale nella mezziera del traverso. Il carico q , costante, agisce sulla semiluce di sinistra verso il basso, e sulla semiluce di destra verso l'alto. Si vuole calcolare lo spostamento relativo tra le due facce del bipendolo

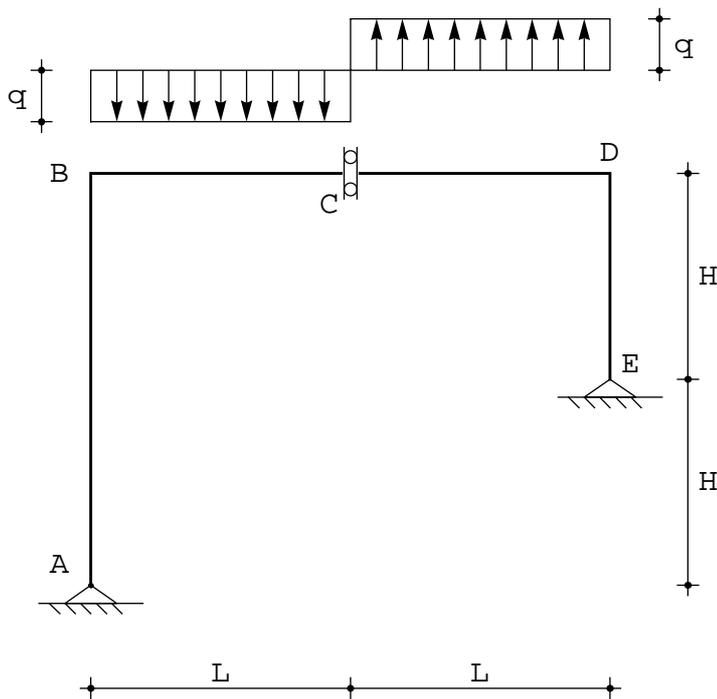


Figura 1 - Un telaio isostatico di esempio per il calcolo di spostamenti

Prima soluzione: principio dei lavori virtuali

Utilizzando il principio dei lavori virtuali, si assume quale insieme di spostamenti quello risultante dallo schema (reale) di Figura 1, mentre il sistema di forze (virtuali) sarà quello di Figura 2, in cui due forze uguali e contrarie, di valore unitario, agiscono sulle due facce del bipendolo. Si avrà quindi:

$$\int_s M' \frac{M ds}{EI} = F (u_{2Bdes} - F u_{2Bsin}) = F \Delta u_{2B} \quad (1)$$

dove M' è il momento dovuto al sistema di Figura 2, ed M è il momento dovuto al sistema 1.

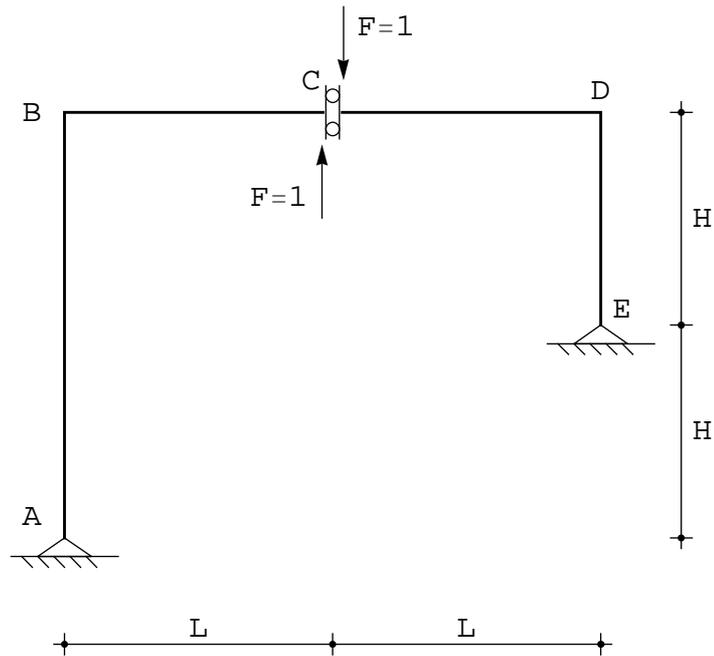


Figura 2 - Il sistema di forze virtuali per il calcolo dello spostamento relativo in C

■ Il momento M

Il calcolo delle reazioni sul sistema di Figura 1 porta a scrivere :

$$\begin{aligned}
 R_{AH} + N_C &= 0 \\
 R_{AV} + qL &= 0 \\
 M_C - 2 N_C H - \frac{qL^2}{2} &= 0 \\
 R_{EV} - qL &= 0 \\
 R_{EH} - N_C &= 0 \\
 -M_C + N_C H - \frac{qL^2}{2} &= 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

Dalla seconda e dalla quarta si ha subito :

$$\begin{aligned}
 R_{AV} &= -qL \\
 R_{EV} &= qL
 \end{aligned} \tag{3}$$

mentre la terza e la sesta conducono a :

$$N_C = -q \frac{L^2}{H} \tag{4}$$

da cui le due reazioni orizzontali :

$$\begin{aligned}
 R_{AH} &= q \frac{L^2}{H} \\
 R_{EH} &= -q \frac{L^2}{H}
 \end{aligned} \tag{5}$$

ed infine :

$$M_C = 2 N_C H + \frac{qL^2}{2} = -2 qL^2 + \frac{qL^2}{2} = -\frac{3 q L^2}{2} \quad (6)$$

Il diagramma del momento si presenta come in Figura 3:

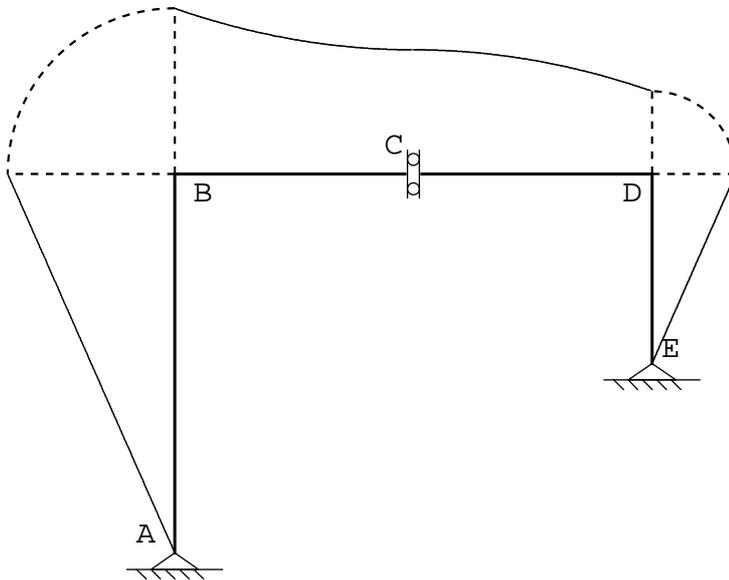


Figura 3 - Il diagramma del momento dovuto ai carichi q

Le espressioni analitiche del momento, nei vari tratti, possono trarsi immediatamente:

$$M_{BA}(x_3) = -\frac{L^2 q (2H - x_3)}{H} \quad (7)$$

$$M_{DE}(x_3) = -\frac{L^2 q (-H + x_3)}{H} \quad (8)$$

$$M_{BC}(x_3) = -\frac{1}{2} q (4L^2 - 2Lx_3 + x_3^2) \quad (9)$$

$$M_{CD}(x_3) = \frac{1}{2} q (-3L^2 + x_3^2) \quad (10)$$

Nota - Per l'espressione del momento in BC si è considerato che:

$$\begin{aligned} M_{BC}(0) &= T_A 2H = -R_{AH} 2H = -2qL^2 \\ M_{BC}(L) &= -\frac{3}{2} qL^2 \end{aligned} \quad (11)$$

$$T_{BC}(L) = 0$$

mentre per il momento in CD si è considerato che :

$$\begin{aligned} M_{CD}(0) &= -\frac{3}{2} qL^2 \\ M_{CD}(L) &= T_E H = R_{EH} H = -qL^2 \\ T_{CD}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

■ Il momento M'

Il calcolo delle reazioni sul sistema di Figura 2 porta a scrivere :

$$\begin{aligned}
 R_{AH} + N_C &= 0 \\
 R_{AV} - F &= 0 \\
 M_C - 2 N_C H + FL &= 0 \\
 R_{EV} + F &= 0 \\
 R_{EH} - N_C &= 0 \\
 -M_C + N_C H + FL &= 0
 \end{aligned} \tag{13}$$

Dalla seconda e dalla quarta si ha subito :

$$\begin{aligned}
 R_{AV} &= F \\
 R_{EV} &= -F
 \end{aligned} \tag{14}$$

mentre sommando la terza e la sesta si ha :

$$N_C = 2 \frac{F L}{H} \tag{15}$$

da cui le due reazioni orizzontali :

$$\begin{aligned}
 R_{AH} &= -2 \frac{F L}{H} \\
 R_{EH} &= 2 \frac{F L}{H}
 \end{aligned} \tag{16}$$

Il diagramma del momento si presenta come in Figura 4:

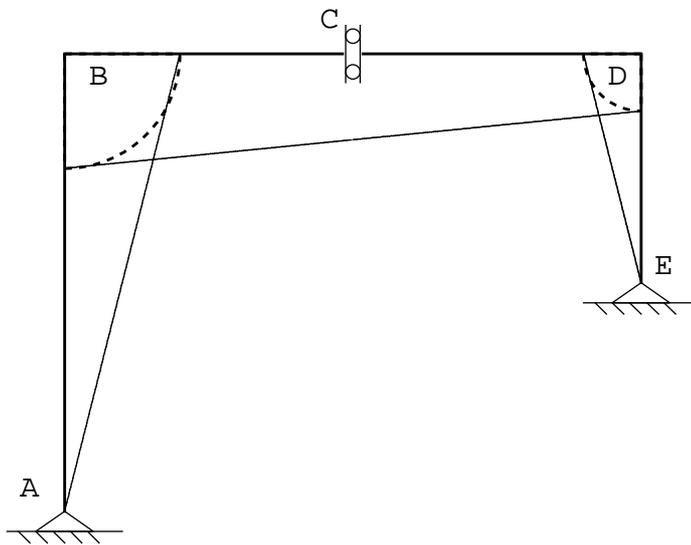


Figura 4 - Il diagramma del momento dovuto alle forze virtuali

Le espressioni analitiche del momento, nei vari tratti, possono trarsi immediatamente:

$$M_{BA}(x_3) = 4 F L \left(1 - \frac{x_3}{2 H} \right) \tag{17}$$

$$M_{DE}(x_3) = -2 F L \left(1 - \frac{x_3}{H} \right) \tag{18}$$

$$M_{BC}(x_3) = 3FL + FL \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \quad (19)$$

$$M_{CD}(x_3) = 2FL + FL \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \quad (20)$$

Nota - L'espressione del momento lungo il traverso e' stata divisa in due diverse formule, in vista dell'applicazione del principio dei lavori virtuali

■ Il calcolo dello spostamento

Si puo' suddividere l'integrale nelle sue quattro parti, ottenendo

$$\begin{aligned} \Delta u_{2B} &= \int_s M' \frac{M ds}{EI} = \int_0^{2H} \left(-\frac{L^2 q (2H - x_3)}{H} \right) \left(4FL \left(1 - \frac{x_3}{2H}\right) \right) \frac{dx_3}{EI} + \\ &\int_0^L \left(-\frac{1}{2} q (4L^2 - 2Lx_3 + x_3^2) \right) \left(3FL + FL \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \right) \frac{dx_3}{EI} + \\ &\int_0^L \left(\frac{1}{2} q (-3L^2 + x_3^2) \right) \left(2FL + FL \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \right) \frac{dx_3}{EI} + \\ &\int_0^H \left(-\frac{L^2 q (-H + x_3)}{H} \right) \left(-2FL \left(1 - \frac{x_3}{H}\right) \right) \frac{dx_3}{EI} = \\ &-\frac{16}{3} \frac{qHL^3}{EI} - \frac{47L^4q}{8EI} - \frac{27L^4q}{8EI} - \frac{2qHL^3}{3EI} = -\frac{6HL^3q}{EI} - \frac{37L^4q}{4EI} \end{aligned} \quad (21)$$

Seconda soluzione: metodo della linea elastica

Così come nell'espressione del principio dei lavori virtuali si è trascurato il termine del lavoro dovuto allo sforzo normale, occorre ora ipotizzare che il telaio sia rigido assialmente, ossia che le aste conservino la loro lunghezza, e trarre le opportune conclusioni nei confronti dei relativi spostamenti assiali. Ad esempio, nel telaio di Figura 1, l'inestensibilità assiale e la presenza degli appoggi in A ed ed in E implica che:

$$\begin{aligned} w_{BA}(x_3) &= 0 \\ w_{DE}(x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Inoltre, l'inestensibilità assiale implica che i due tratti orizzontali traslino di una quantità costante, e la presenza del bipendolo ad asse verticale implica che questa quantità sarà unica. Ne segue che potrà porsi:

$$\begin{aligned} w_{BC}(x_3) &= \delta \\ w_{CD}(x_3) &= \delta \end{aligned} \quad (23)$$

A partire dai momenti, si ricavano rotazioni e spostamenti, attraverso due integrazioni successive: , introducendo quindi le otto costanti di integrazione ϕ_i e v_i , che potranno calcolarsi, insieme allo spostamento incognito δ , imponendo le nove condizioni ai limiti relative alla funzione u_2 ed alla sua derivata prima:

$$\begin{aligned} \phi_{BA} &= \frac{1}{EI} \int m_{BA} dx_3 + \phi_1 = \frac{2L^2q}{EI} x_3 - \frac{L^2q}{2EI} \frac{x_3^2}{H} + \phi_1 \\ \phi_{BC} &= \frac{1}{EI} \int m_{BC} dx_3 + \phi_2 = -\frac{2qL^2}{EI} x_3 + \frac{qL}{2EI} x_3^2 - \frac{q}{6EI} x_3^3 + \phi_2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\phi_{CD} = \frac{1}{EI} \int m_{CD} dx_3 + \phi_3 = -\frac{3 q L^2}{2 EI} x_3 + \frac{q x_3^3}{6 EI} + \phi_3$$

$$\phi_{DE} = \frac{1}{EI} \int m_{DE} dx_3 + \phi_4 = -\frac{q L^2}{EI} x_3 + \frac{q L^2 x_3^2}{2 H EI} + \phi_4$$

ed ancora :

$$v_{BA} = -\int \phi_{BA} dx_3 + v_1 = -\frac{q L^2 x_3^2}{EI} + \frac{q L^2 x_3^3}{6 EI H} - \phi_1 x_3 + v_1$$

$$v_{BC} = -\int \phi_{BC} dx_3 + v_2 = \frac{q L^2 x_3^2}{EI} - \frac{q L x_3^3}{6 EI} + \frac{q x_3^4}{24 EI} - x_3 \phi_2 + v_2 \quad (25)$$

$$v_{CD} = -\int \phi_{CD} dx_3 + v_3 = \frac{3 q L^2 x_3^2}{4 EI} - \frac{q x_3^4}{24 EI} - x_3 \phi_3 + v_3$$

$$v_{DE} = -\int \phi_{DE} dx_3 + v_4 = \frac{q L^2 x_3^2}{2 EI} - \frac{q L^2 x_3^3}{6 EI H} - x_3 \phi_4 + v_4$$

Si sono introdotte quindi le otto costanti di integrazione ϕ_i e v_i , che potranno calcolarsi, insieme allo spostamento incognito δ , imponendo le nove condizioni ai limiti relative alla funzione u_2 ed alla sua derivata prima:

In corrispondenza dell'appoggio in A, viene proibita la traslazione:

$$u_{2 BA} (2 H) = 0 \quad (26)$$

Nel nodo B si ha, ipotizzando che δ sia positivo se verso destra:

$$\begin{aligned} u_{2 BC} (0) &= 0 \\ u_{2 BA} (0) &= -\delta \\ \phi_{BA} (0) &= \phi_{BC} (0) \end{aligned} \quad (27)$$

In corrispondenza del bipendolo:

$$\phi_{BC} (L) = \phi_{CD} (0) \quad (28)$$

Nel nodo D si ha:

$$\begin{aligned} u_{2 CD} (L) &= 0 \\ u_{2 DE} (0) &= -\delta \\ \phi_{CD} (L) &= \phi_{DE} (0) \end{aligned} \quad (29)$$

Infine, in corrispondenza dell'appoggio E :

$$u_{2 DE} (H) = 0 \quad (30)$$

Utilizzando le (42 - 43) si giunge ad un sistema di nove equazioni in nove incognite, che fornisce:

$$v_1 = -\frac{2 H L^2 (5 H + 9 L) q}{3 EI}$$

$$v_2 = 0$$

$$v_3 = -\frac{L^3 (24 H + 43 L) q}{8 EI}$$

$$v_4 = -\frac{2 H L^2 (5 H + 9 L) q}{3 EI}$$

$$\phi_1 = - \frac{3 L^2 (H + L) q}{EI}$$

$$\phi_2 = - \frac{3 L^2 (H + L) q}{EI}$$

$$\phi_3 = - \frac{L^2 (9 H + 14 L) q}{3 EI}$$

$$\phi_4 = - \frac{3 L^2 (H + 2 L) q}{EI}$$

$$\delta = \frac{2 H L^2 (5 H + 9 L) q}{3 EI}$$

Lo spostamento del tratto BC puo' quindi scriversi :

$$v_{BC} = \frac{qL^2 x_3^2}{EI} - \frac{qL x_3^3}{6 EI} + \frac{q x_3^4}{24 EI} + \frac{3 L^2 (H + L) q}{EI} x_3 \quad (32)$$

mentre nel tratto CD si avra':

$$v_{CD} = \frac{3 qL^2 x_3^2}{4 EI} - \frac{q x_3^4}{24 EI} + \frac{L^2 (9 H + 14 L) q}{3 EI} x_3 - \frac{L^3 (24 H + 43 L) q}{8 EI} \quad (33)$$

Infine, la richiesta variazione di spostamento sara' data da :

$$\Delta u_{2C} = v_{CD} (0) - v_{BC} (L) =$$

$$- \frac{L^3 (24 H + 43 L) q}{8 EI} - \frac{L^3 (24 H + 31 L) q}{8 EI} = - \frac{L^3 (24 H + 37 L) q}{4 EI} \quad (34)$$

Nota - Il telaio illustrato e' definito "telaio ad un nodo spostabile"