

# Verifica n.38

Mercoledì 22 maggio 2013 - ore 9.30-11.30

Calcolare lo spostamento verticale della cerniera in B

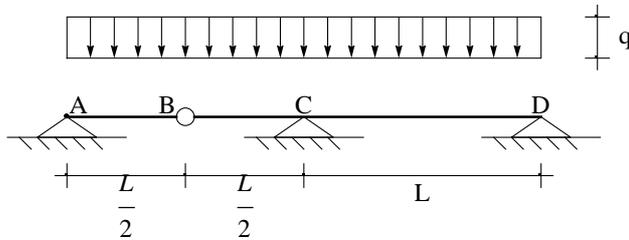


Figura 1 - Lo schema di partenza

## Soluzione

La struttura è costituita da due tratti, e possono quindi scriversi quattro equazioni di equilibrio. Le relative incognite statiche sono le reazioni verticali degli appoggi in A, C e D, nonché lo sforzo di taglio in B. La struttura è quindi isostatica, e lo spostamento in B può essere facilmente calcolato utilizzando il principio dei lavori virtuali. Alternativamente, il metodo dell'analogia di Mohr si presta egregiamente. Infine, può utilizzarsi il metodo della doppia integrazione, o addirittura il metodo della linea elastica del quarto ordine.

### Primo metodo: il principio dei lavori virtuali

Si sceglie il sistema di Figura 1, ossia il sistema reale, quale sistema di spostamenti, ed il sistema di Figura 2 quale sistema di forze.

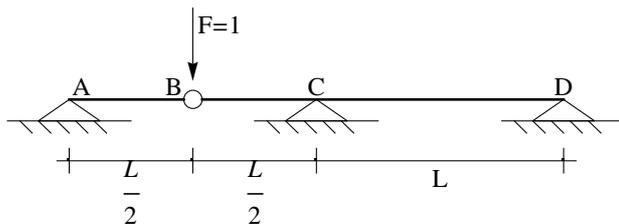


Figura 2 - Lo schema delle forze virtuali

Il principio dei lavori virtuali si scriverà allora:

$$1 \cdot u_{2B} = \frac{1}{EI} \int_0^{2L} M M' dx_3 + \frac{1}{GA_s} \int_0^{2L} T T' dx_3 \quad (1)$$

Restano quindi da calcolare i diagrammi di taglio e momento sui due schemi di Figura 1 e Figura 2, e svolgere gli integrali.

#### ■ Il calcolo dei momenti M e dei tagli T sullo schema di Figura 1

Le reazioni possono calcolarsi risolvendo le equazioni di equilibrio dei due tratti AB e BD:

$$R_A + T_B + \frac{qL}{2} = 0 \quad (2)$$

$$R_A \frac{L}{2} + \frac{qL}{2} \frac{L}{4} = 0 \quad (3)$$

$$-T_B + R_C + R_D + \frac{3}{2} qL = 0 \quad (4)$$

$$-R_C \frac{L}{2} - R_D \frac{3}{2} L - \frac{3}{2} qL \left( \frac{3}{4} L \right) = 0 \quad (5)$$

con soluzione:

$$R_A = -q \frac{L}{4} = -T_A \quad (6)$$

$$R_C = -\frac{3}{2} qL \quad (7)$$

$$R_D = -q \frac{L}{4} = T_D \quad (8)$$

$$T_B = -q \frac{L}{4} \quad (9)$$

Poiche' la legge di variazione del taglio e' lineare in AC, ed ancora in CD, il relativo diagramma risulta immediato:

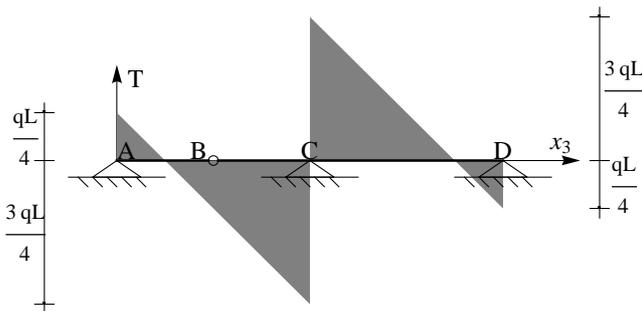


Figura 3 - Il diagramma del taglio sullo schema degli spostamenti

Esso e' esprimibile analiticamente come:

$$T(x_3) = q \frac{L}{4} - q x_3 \quad (10)$$

in AC, e:

$$T(x_3) = -\frac{3}{4} qL - q x_3 \quad (11)$$

in CD.

Ne segue che il momento in AC puo' scriversi:

$$M(x_3) = q \frac{L}{4} x_3 - q \frac{x_3^2}{2} \quad (12)$$

in quanto la costante di integrazione si annulla, per la presenza dell'appoggio in A. Dalla (12) puo' calcolarsi il valore del momento in C:

$$M_C = -q \frac{L^2}{4} \quad (13)$$

ed infine dalla (11) si ha il momento in CD:

$$M(x_3) = -q \frac{L^2}{4} + \frac{3}{4} q L x_3 - q \frac{x_3^2}{2} \quad (14)$$

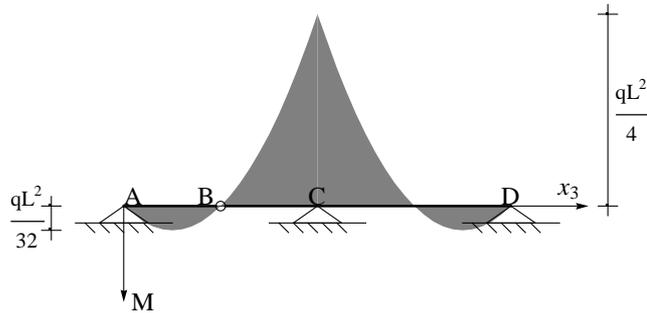


Figura 4 - Il diagramma dei momenti sullo schema degli spostamenti

### ■ Il calcolo dei momenti $M'$ e dei tagli $T'$ sullo schema di Figura 2

Il calcolo dei momenti e dei tagli sullo schema delle forze fittizie e' ancora piu' agevole. E' immediato infatti realizzare che la reazione in A e' nulla, e che il diagramma del momento varia linearmente dal valore nullo in corrispondenza della forza al valore  $-F \frac{L}{2}$  in C, mentre nel tratto CD si annullera' in D, variando ancora linearmente:

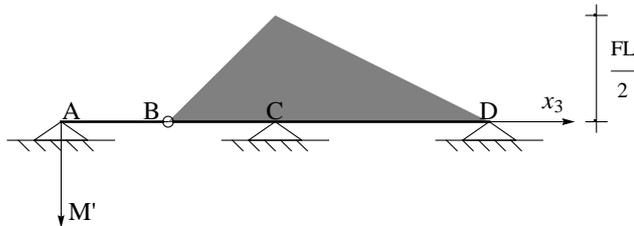


Figura 5 - Il diagramma dei momenti sullo schema delle forze

Esso e' esprimibile analiticamente come:

$$M'(x_3) = -F x_3 \quad (15)$$

in BC, e:

$$M'(x_3) = -F \frac{L}{2} + \frac{F}{2} x_3 \quad (16)$$

in CD.

Ne segue che il taglio in BC e' pari a  $-F$ , mentre in CD e' pari ad  $\frac{F}{2}$ .

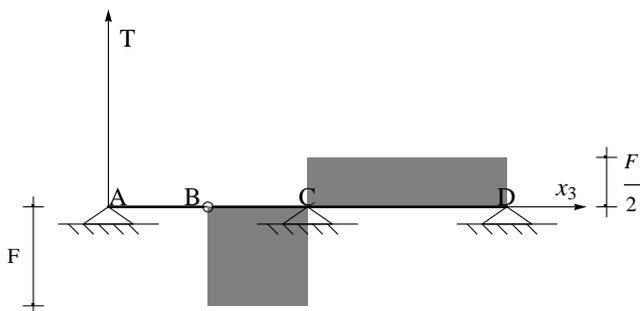


Figura 6 - Il diagramma del taglio sullo schema delle forze

## ■ Il calcolo degli integrali

Utilizzando la (1) si potrà scrivere, tenendo conto del solo effetto flessionale:

$$u_{2B}^{(F)} = \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left( q \frac{L}{4} x_3 - q \frac{x_3^2}{2} \right) \left( -x_3 + \frac{L}{2} \right) dx_3 + \frac{1}{EI} \int_0^L \left( -q \frac{L^2}{4} + \frac{3}{4} q L x_3 - q \frac{x_3^2}{2} \right) \left( -\frac{L}{2} + \frac{1}{2} x_3 \right) dx_3 = \frac{5}{128} \frac{q L^4}{EI} \quad (17)$$

Si osservi che nel primo integrale il momento (15) è stato espresso riportando l'origine in A. L'influenza delle deformazioni taglianti è poi facilmente valutabile come:

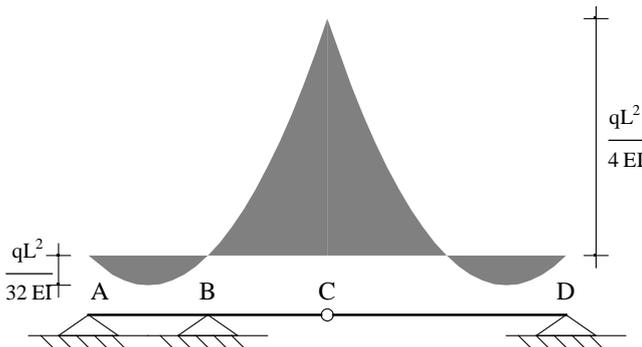
$$u_{2B}^{(T)} = \frac{1}{GA_s} \int_{L/2}^L \left( q \frac{L}{4} - q x_3 \right) (-1) dx_3 + \frac{1}{GA_s} \int_0^L \left( \frac{3}{4} q L - q x_3 \right) \left( \frac{1}{2} \right) dx_3 = \frac{3}{8} \frac{q L^2}{GA_s} \quad (18)$$

## Secondo metodo: l'analogia di Mohr

Volendo affrontare il calcolo dell'abbassamento in B attraverso l'applicazione delle analogie di Mohr, occorre:

1. calcolare il diagramma  $M(x_3)$  del momento sullo schema di Figura 1
2. costruire la trave fittizia, caricandola con il carico fittizio  $q^*(x_3) = \frac{M(x_3)}{EI}$
3. calcolare il momento fittizio  $M_B^*$

Il primo passo è stato già compiuto, e porta al diagramma di Figura 4. La trave fittizia prevede uno scambio di ruolo tra cerniera interna ed appoggio interno, sicché la trave ausiliaria si presenta come in Figura 7:



In base alle (12) e (14) il carico fittizio può scriversi:

$$q^*(x_3) = q \frac{L}{4 EI} x_3 - q \frac{x_3^2}{2 EI} \quad (19)$$

in AC, e:

$$q^*(x_3) = -q \frac{L^2}{4 EI} + \frac{3}{4 EI} q L x_3 - \frac{q}{EI} \frac{x_3^2}{2} \quad (20)$$

in CD. Per il calcolo del momento in B, si scrivono le equazioni di equilibrio:

$$R_A^* + R_B^* + T_C^* + \int_0^L q^*(x_3) dx_3 = 0 \quad (21)$$

$$-R_B^* \frac{L}{2} - T_C^* L - \int_0^L q^*(x_3) x_3 dx_3 = 0 \quad (22)$$

$$-T_C^* + R_D^* + \int_0^L q^*(x_3) dx_3 = 0 \quad (23)$$

$$-R_D^* L - \int_0^L q^*(x_3) x_3 dx_3 = 0 \quad (24)$$

ossia:

$$R_A^* + R_B^* + T_C^* = \frac{q L^3}{24 EI} \quad (25)$$

$$R_B^* \frac{L}{2} + T_C^* L = \frac{q L^4}{24 EI} \quad (26)$$

$$-T_C^* + R_D^* = \frac{q L^3}{24 EI} \quad (27)$$

$$-R_D^* L = 0 \quad (28)$$

con soluzione:

$$R_A^* = -q \frac{L^3}{12 EI} \quad (29)$$

$$R_B^* = q \frac{L^3}{6 EI} \quad (30)$$

$$T_C^* = -q \frac{L^3}{24 EI} \quad (31)$$

$$R_D^* = 0 \quad (32)$$

Infine, il momento fittizio in B si calcola come:

$$R_A^* \frac{L}{2} + \int_0^{L/2} q^*(x_3) \left( \frac{L}{2} - x_3 \right) dx_3 + M_B^* = 0 \quad (33)$$

da cui:

$$M_B^* = -R_A^* \frac{L}{2} - \int_0^{L/2} q^*(x_3) \left( \frac{L}{2} - x_3 \right) dx_3 = \frac{q L^3}{12 EI} \frac{L}{2} - q \frac{q L^4}{384 EI} = \frac{5}{128} \frac{q L^4}{EI} \quad (34)$$

valore coincidente con la (17).

### Terzo metodo: la doppia integrazione di Saviotti

---

Partendo dalle relazioni di equilibrio:

$$\frac{dT}{dx_3} = -q \quad (35)$$

$$\frac{dM}{dx_3} = T \quad (36)$$

si potrà scrivere:

$$T_{AB}(x_3) = -q x_3 + T_A \quad (37)$$

$$M_{AB}(x_3) = -q \frac{x_3^2}{2} + T_A x_3 + M_A \quad (38)$$

$$T_{BC}(x_3) = -q x_3 + T_B \quad (39)$$

$$M_{BC}(x_3) = -q \frac{x_3^2}{2} + T_B x_3 + M_B \quad (40)$$

$$T_{CD}(x_3) = -q x_3 + T_C \quad (41)$$

$$M_{CD}(x_3) = -q \frac{x_3^2}{2} + T_C x_3 + M_C \quad (42)$$

Le costanti di integrazione si calcolano imponendo le condizioni di equilibrio ai limiti:

$$M_{AB}(0) = 0 \longrightarrow M_A = 0 \quad (43)$$

$$M_{AB}\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \rightarrow -q \frac{L}{8} + T_A \frac{L}{2} + M_A = 0 \quad (44)$$

$$M_{BC}(0) = 0 \rightarrow M_B = 0 \quad (45)$$

$$T_{AB}\left(\frac{L}{2}\right) = T_{BC}(0) \rightarrow -q \frac{L}{2} + T_A = T_B \quad (46)$$

$$M_{BC}\left(\frac{L}{2}\right) = M_{CD}(0) \rightarrow -q \frac{L^2}{8} + T_B \frac{L}{2} + M_B = M_C \quad (47)$$

$$M_{BC}(L) = 0 \rightarrow -q \frac{L^2}{2} + T_C L + M_C = 0 \quad (48)$$

con soluzione:

$$M_A = 0 \quad (49)$$

$$T_A = q \frac{L}{4} \quad (50)$$

$$M_B = 0 \quad (51)$$

$$T_B = -q \frac{L}{4} \quad (52)$$

$$M_C = -q \frac{L^2}{4} \quad (53)$$

$$T_C = \frac{3}{4} q L \quad (54)$$

e quindi, in definitiva:

$$T_{AB}(x_3) = -q x_3 + q \frac{L}{4} \quad (55)$$

$$M_{AB}(x_3) = -q \frac{x_3^2}{2} + q \frac{L}{4} x_3 \quad (56)$$

$$T_{BC}(x_3) = -q x_3 - q \frac{L}{4} \quad (57)$$

$$M_{BC}(x_3) = -q \frac{x_3^2}{2} - q \frac{L}{4} x_3 \quad (58)$$

$$T_{CD}(x_3) = -q x_3 + \frac{3}{4} q L \quad (59)$$

$$M_{CD}(x_3) = -q \frac{x_3^2}{2} + \frac{3}{4} q L x_3 - q \frac{L^2}{4} \quad (60)$$

Si parta ora dalle condizioni:

$$\frac{d\phi}{dx_3} = \frac{M}{EI} \quad (61)$$

$$\frac{du_2}{dx_3} = -\phi \quad (62)$$

che forniscono:

$$\phi_{AB}(x_3) = -q \frac{x_3^3}{6EI} + q \frac{L}{8EI} x_3^2 + \phi_A \quad (63)$$

$$u_{2AB}(x_3) = q \frac{x_3^4}{24EI} - q \frac{L}{24EI} x_3^3 - \phi_A x_3 + u_A \quad (64)$$

$$\phi_{BC}(x_3) = -q \frac{x_3^3}{6EI} - q \frac{L}{8EI} x_3^2 + \phi_B \quad (65)$$

$$u_{2BC}(x_3) = q \frac{x_3^4}{24EI} + q \frac{L}{24EI} x_3^3 - \phi_B x_3 + u_B \quad (66)$$

$$\phi_{CD}(x_3) = -q \frac{x_3^3}{6EI} + \frac{3}{8EI} q L x_3^2 - q \frac{L^2}{4EI} x_3 + \phi_C \quad (67)$$

$$u_{2CD}(x_3) = q \frac{x_3^4}{24EI} - \frac{qL}{8EI} x_3^3 + q \frac{L^2}{8EI} x_3^2 - \phi_C x_3 + u_C \quad (68)$$

Le costanti di integrazione si determinano imponendo le condizioni di congruenza:

$$u_{2AB}(0) = 0 \rightarrow u_A = 0 \quad (69)$$

$$u_{2AB}\left(\frac{L}{2}\right) = u_{2BC}(0) \rightarrow q \frac{L^4}{16 \times 24EI} - q \frac{L^4}{8 \times 24EI} - \phi_A \frac{L}{2} + u_A = u_B \quad (70)$$

$$u_{2BC}\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \rightarrow q \frac{L^4}{16 \times 24EI} + q \frac{L^4}{8 \times 24EI} - \phi_B \frac{L}{2} + u_B = 0 \quad (71)$$

$$u_{2CD}(0) = 0 \rightarrow u_C = 0 \quad (72)$$

$$\phi_{BC}\left(\frac{L}{2}\right) = \phi_{CD}(0) \rightarrow -q \frac{L^3}{8 \times 6EI} - q \frac{L^3}{4 \times 8EI} + \phi_B = \phi_C \quad (73)$$

$$u_{2CD}(L) = 0 \rightarrow q \frac{L^4}{24EI} - \frac{qL^4}{8EI} + q \frac{L^4}{8EI} - \phi_C L + u_C = 0 \quad (74)$$

con soluzione:

$$\phi_A = -q \frac{L^3}{12EI} \quad (75)$$

$$u_A = 0 \quad (76)$$

$$\phi_B = \frac{3}{32} \frac{qL^3}{EI} \quad (77)$$

$$u_B = \frac{5}{128} \frac{qL^4}{EI} \quad (78)$$

$$\phi_C = q \frac{L^3}{24EI} \quad (79)$$

$$u_C = 0 \quad (80)$$

$$(81)$$

ritrovando il valore dell'abbassamento in corrispondenza della cerniera

## Conclusioni

Il principio dei lavori virtuali permette facilmente di aggiungere all'effetto flessionale il contributo della deformazione tagliante. Inoltre il tracciamento dei diagrammi dei momenti risulta agevole, e l'integrale e' di immediata soluzione

Il metodo dei corollari di Mohr risulta probabilmente il piu' agevole, anche se appesantito dall'andamento quadratico del carico fittizio

Il metodo di Saviotti costringe al calcolo dell'intero schema strutturale, imponendo la soluzione di un doppio sistema di sei equazioni in sei incognite.

**Figure**

---

**Vincoli**

---