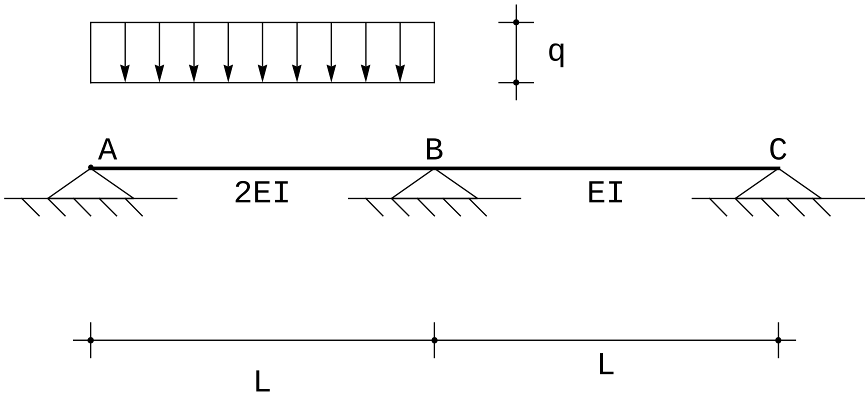
Verifica n.35 - Scienza delle Costruzioni 12 crediti

Venerdi' 21 Dicembre 2012 - ore 9.30-11.30

Per la trave di Figura:



1. calcolare e disegnare i diagrammi del taglio, del momento flettente, della rotazione e dello spostamento

Soluzione

La trave e' costituita da un solo tratto, mentre le incognite statiche sono tre, ossia le tre reazioni degli appoggi. La trave e' quindi iperstatica, ed il metodo di soluzione piu' semplice e' la scrittura dell'equazione differenziale del quarto ordine.

■ La scrittura dell'equazione differenziale e delle condizioni ai limiti

Nel punto B la reazione dell'appoggio introduce una discontinuita' nel taglio, la sezione varia bruscamente, ed il carico si annulla. Occorre quindi scrivere due equazioni differenziuali, valide da A a B, e da B a C, rispettivamente:

$$u_2'''' = \frac{q}{2\,\mathrm{EI}} \tag{1}$$

$$v_2'''' = 0 \tag{2}$$

con soluzione:

$$u_2 = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + a_4 z^3 + \frac{q}{48\,\mathrm{EI}} z^4 \tag{3}$$

$$v_2 = b_1 + b_2 z' + b_3 z'^2 + b_4 z'^3 \tag{4}$$

Le condizioni ai limiti possono scriversi come:

$$u_2(z = 0) = 0 \tag{5}$$

$$u_2''(z = 0) = 0 \tag{6}$$

nell'appoggio in A,

$$u_2(z = L) = 0 \tag{7}$$

$$v_2(z' = 0) = 0 \tag{8}$$

$$u_2'(z = L) = v_2'(z' = 0) \tag{9}$$

$$2\, u_2''(z = L) = v_2''(z' = 0) \tag{10}$$

nell'appoggio centrale, e:

$$v_2(z' = L) = 0 \tag{11}$$

$$v_2''(z' = L) = 0 \tag{12}$$

nell'appoggio di destra.

■ La deduzione delle costanti di integrazione

Derivando opportunamente le (3-4), e valutandole in A, B e C si puo' scrivere il sistema di otto equazioni nelle otto costanti di integrazione:

$$a_1 = 0 \tag{13}$$

$$a_3 = 0 \tag{14}$$

$$a_1 + a_2\, L + a_3\, L^2 + a_4\, L^3 + \frac{q}{48\, \mathrm{EI}} L^4 = 0 \tag{15}$$

$$b_1 = 0 \tag{16}$$

$$a_2 + 2\, a_3\, L + 3\, a_4\, L^2 + \frac{q}{12\, \mathrm{EI}} L^3 = b_2 \tag{17}$$

$$2\left(2\, a_3 + 6\, a_4\, L + \frac{q}{4\, \mathrm{EI}} L^2\right) = 2\, b_3 \tag{18}$$

$$b_1 + b_2\, L + b_3\, L^2 + b_4\, L^3 = 0 \tag{19}$$

$$2\, b_3 + 6\, b_4\, L = 0 \tag{20}$$

immediatamente riconducibile ad un sistema di cinque equazioni in cinque incognite:

$$a_2\, L + a_4\, L^3 + \frac{q}{48\, \mathrm{EI}} L^4 = 0 \tag{21}$$

$$a_2 + 3\, a_4\, L^2 + \frac{q}{12\, \mathrm{EI}} L^3 = b_2 \tag{22}$$

$$6\, a_4\, L + \frac{q}{4\, \mathrm{EI}} L^2 = b_3 \tag{23}$$

$$b_2\, L + b_3\, L^2 + b_4\, L^3 = 0 \tag{24}$$

$$b_3 + 3\, b_4\, L = 0 \tag{25}$$

Eliminando b_2 e b_3 si riduce il sistema a dimensione tre:

$$a_2 + a_4\, L^2 + \frac{q}{48\, \mathrm{EI}} L^3 = 0 \tag{26}$$

$$a_2 + 9\, a_4\, L^2 + + b_4\, L^2 + \frac{q}{3\, \mathrm{EI}} L^3 = 0 \tag{27}$$

$$2\, a_4 + b_4 + \frac{q}{12\, \mathrm{EI}} L = 0 \tag{28}$$

con soluzione :

$$a_4 = -\frac{11\, q\, L}{288\, \mathrm{EI}};\; b_4 = -\frac{q\, L}{144\, \mathrm{EI}} \tag{29}$$

ed in cascata :

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{q\, L^2}{48\, \mathrm{EI}} \\ b_2 &= -\frac{q\, L^3}{72\, \mathrm{EI}} \\ a_2 &= \frac{5\, q\, L^3}{288\, \mathrm{EI}} \end{aligned} \tag{30}$$

In definitiva, le due linee elastiche sono esprimibili come:

$$u_2 = \frac{q}{\mathrm{EI}} \left(\frac{5\, L^3}{288} z - \frac{11\, L}{288} z^3 + \frac{z^4}{48} \right) \tag{31}$$

$$v_2 = -\frac{q}{\mathrm{EI}} \left(\frac{L^3}{72} z - \frac{L^2}{48} z^2 + \frac{L}{144} z^3 \right) \tag{32}$$

da cui, in cascata, rotazioni, momenti e tagli:

$$\phi^{(1)} = \frac{q}{\mathrm{EI}} \left(-\frac{5\, L^3}{288} + \frac{33\, L}{288} z^2 - \frac{z^3}{12} \right) \tag{33}$$

$$\phi^{(2)} = \frac{q}{\mathrm{EI}} \left(\frac{L^3}{72} - \frac{L^2}{24} z + \frac{3\, L}{144} z^2 \right) \tag{34}$$

$$M^{(1)} = q \left(\frac{11\, L}{24} z - \frac{z^2}{2} \right) \tag{35}$$

$$M^{(2)} = q\left(-\frac{L^2}{24} + \frac{L}{24}\, z\right) \tag{36}$$

$$T^{(1)} = q\left(\frac{11\, L}{24} - z\right) \tag{37}$$

$$T^{(2)} = \frac{q\, L}{24} \tag{38}$$

■ Le reazioni

La reazione dell'appoggio in A e' pari al taglio in A, cambiato di segno:

$$R_{\mathrm{Av}} = -T^{(1)}(z = 0) = -\frac{11}{24}\, q\, L \tag{39}$$

La reazione dell'appoggio a destra sara' fornita dal taglio in C:

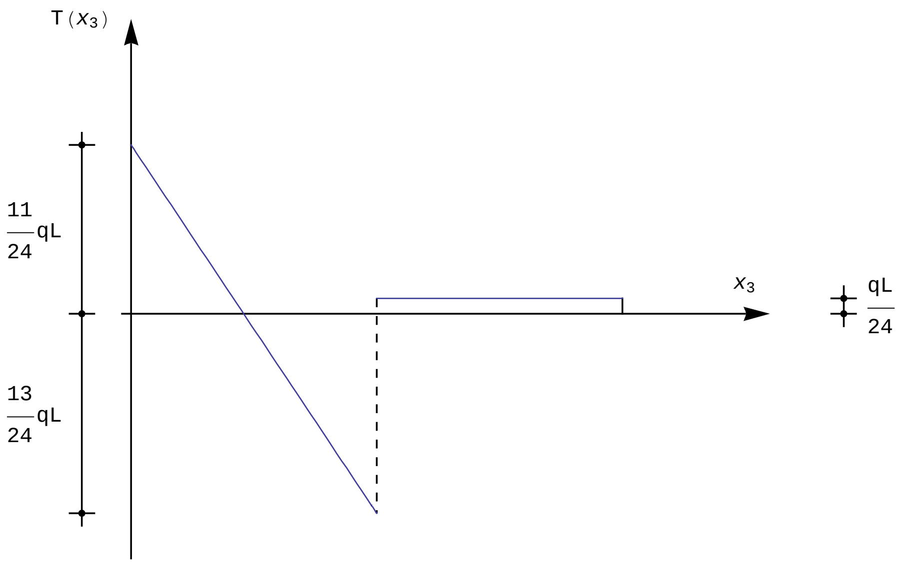
$$R_{\mathrm{Cv}} = T^{(2)}(z = L) = \frac{q\, L}{24} \tag{40}$$

La reazione dell'appoggio centrale puo' dedursi dall'equilibrio del concio, o dall'equilibrio alla traslazione verticale dell'intera trave:

$$R_{\mathrm{Bv}} = -q\, L - R_{\mathrm{Av}} - R_{\mathrm{Bv}} = q\, L\left(-1 + \frac{11}{24} - \frac{1}{24}\right) = -\frac{7}{12}\, q\, L \tag{41}$$

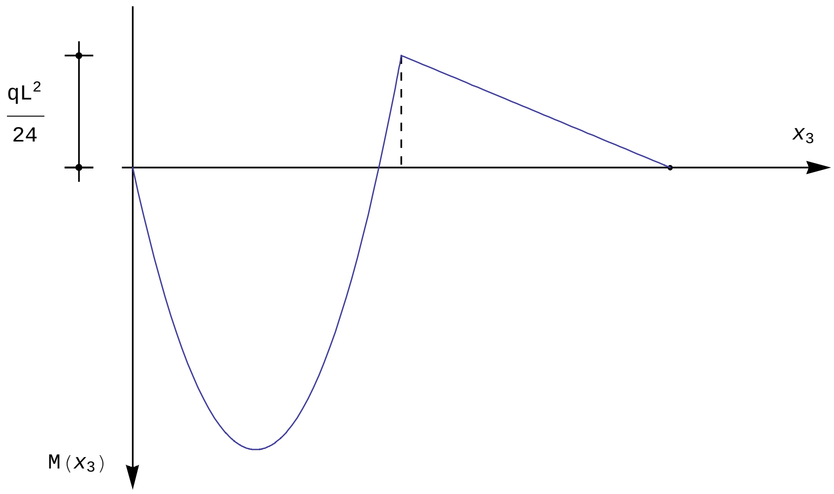
I diagrammi

Il tracciamento del taglio e' immediato, in quanto nella prima campata il diagramma sara' lineare, nella seconda campata sara' costante, i valori agli estremi sono noti, e quindi:



Il punto di nullo del diagramma del taglio e' situato ad $x_3 = \frac{11}{24}\, L$.

Per il tracciamento del diagramma del momento, ci si puo' aiutare anche col diagramma del taglio, che ne rappresenta la derivata. Quindi nel primo tratto esso variera' con legge parabolica, partendo da 0 in A, crescendo finche' il taglio e' positivo, poi descrescendo. Nel secondo tratto, invece, l'andamento sara' lineare, annullandosi in corrispondenza dell'appoggio in C. Il punto di nullo del diagramma del taglio e' situato ad $x_3 = \frac{11}{24} L$.



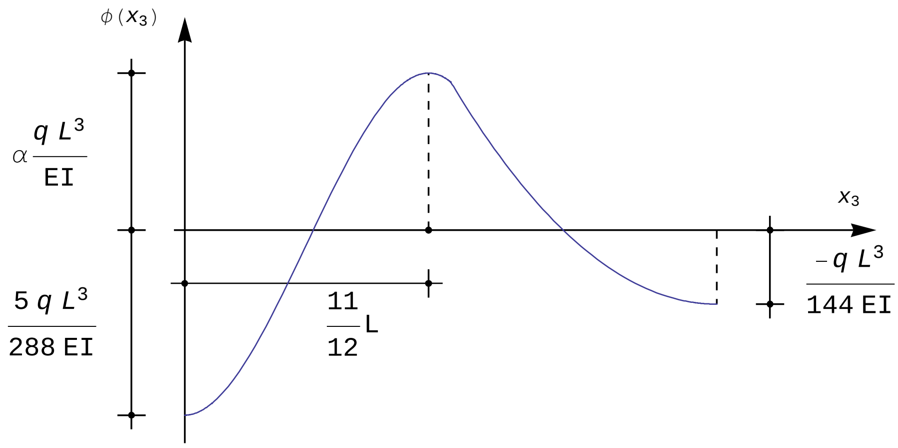
Il punto di nullo del diagramma del momento e' situato ad $x_3 = \frac{11}{12} L$.

Per le rotazioni si hanno le seguenti informazioni;

1. Il diagramma delle rotazioni avra' andamento cubico in AB, quadratico in BC

2. In A ed in C il diagramma avra' tangenza orizzontale

3. Le rotazioni cresceranno da 0 fino ad $\frac{11}{12} L$, ossia nella zona di momento positivo, poi decresceranno fino all'appoggio C



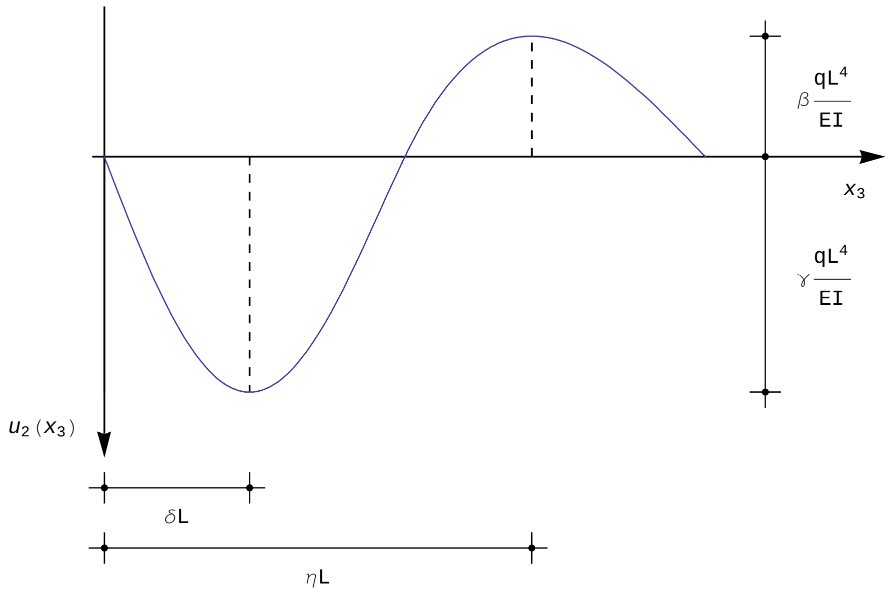
Sia i valori minimi e massimi delle rotazioni, sia i punti di nullo possono essere calcolati a partire dalle espressioni analitiche

Sul diagramma degli spostamenti, infine, si puo' preliminarmente affermare che:

1. il diagramma avra' andamento quartico

2. il diagramma avra' tre punti di nullo in corrispondenza dei tre appoggi

3. il diagramma avra' tangenza orizzontale nei due punti di nullo del diagramma delle rotazioni



Il valore dei coefficienti numerici α, β, γ, δ ed η possono essere calcolati a partire dalle espressioni analitiche di rotazioni e spostamenti:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.0147328 \\ \beta &= 0.0026729 \\ \gamma &= 0.005215 \\ \delta &= 0.42265 \\ \eta &= 1.42265 \end{aligned} \tag{42}$$

Figure