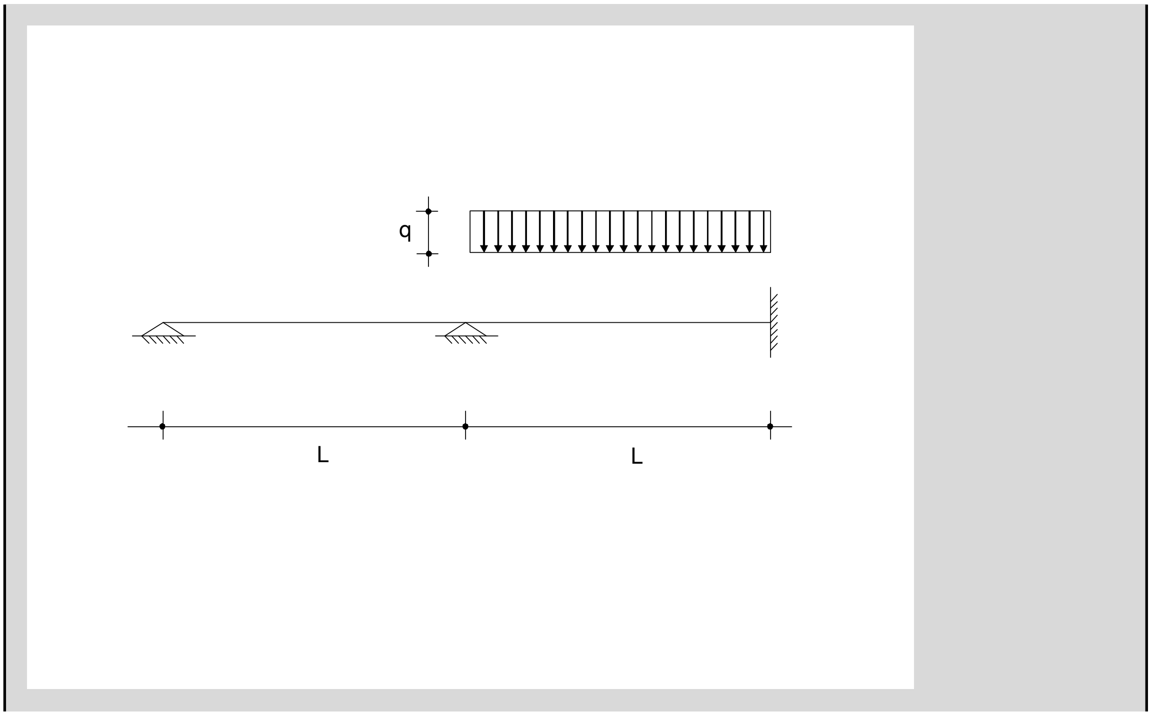
Verifica n.9

Lunedi' 21 dicembre 2009 - ore 9.30-11.30

Si consideri la trave incastrata appoggiata, con appoggio intermedio in mezzeria, soggetta ad un carico uniforme di intensita' q sulla semiluce di destra. Per essa, si calcolino e disegnino i diagrammi di tagli, momenti e spostamenti. Si calcolino inoltre le reazioni vincolari



Soluzione

Si riconosce immediatamente che la trave presenta due gradi di iperstaticita' (trave a mensola con due appoggi), e quindi il calcolo delle reazioni non puo' basarsi sulle sole equazioni di equilibrio. Dovendosi poi tracciare il diagramma degli spostamenti, sembra opportuno utilizzare il metodo della linea elastica, risolvendo le due equazioni differenziali del quarto ordine:

$$\begin{aligned} EI\, u_2''''(x_3) &= 0 \\ EI\, v_2''''(x_3) &= q \end{aligned} \qquad (1)$$

La prima di queste equazioni descrive la funzione abbassamento nella prima campata, scarica, la seconda invece e' relativa alla seconda campata, caricata da un carico q uniformemente distribuito. Le soluzioni delle (1) possono scriversi:

$$u_2(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \qquad (2)$$

$$v_2(x_3) = b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 + \frac{q x_3^4}{24\, EI} \qquad (3)$$

Le otto costanti di integrazione si calcolano imponendo le condizioni ai limiti nell'appoggio e nell'incastro di estremita', e le condizioni di continuita' in corrispondenza dell'appoggio intermedio.

Nell'appoggio di sinistra si devono annullare spostamenti (congruenza) e momenti flettenti (equilibrio):

$$u_2(0) = 0 \qquad u_2''(0) = 0 \tag{4}$$

In corrispondenza dell'appoggio intermedio occorre imporre che lo spostamento si annulli, che le rotazioni abbiano un valore unico (per la congruenza) e che anche il momento flettente abbia un unico valore (per l'equilibrio):

$$\begin{aligned} &u_2(L) = 0 \\ &v_2(0) = 0 \\ &u_2'(L) = v_2'(0) \\ &u_2''(L) = v_2''(0) \end{aligned} \tag{5}$$

Infine, nell'incastro di destra lo spostamento e la rotazione dovranno, per definizione, essere nulli:

$$\begin{aligned} &v_2(L) = 0 \\ &v_2'(L) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Queste otto equazioni si tramutano, utilizzando le (2-3), nelle otto equazioni lineari nelle otto incognite a_i, b_i :

$$\begin{aligned} &a_0 = 0 \\ &a_2 = 0 \\ &a_0 + a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3 = 0 \\ &b_0 = 0 \\ &a_1 + 2 a_2 L + 3 a_3 L^2 = b_1 \\ &2 a_2 + 6 a_3 L = 2 b_2 \\ &b_0 + b_1 L + b_2 L^2 + b_3 L^3 + \frac{qL^4}{24\,EI} = 0 \\ &b_1 + 2 b_2 L + 3 b_3 L^2 + \frac{qL^3}{6\,EI} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

E' immediato ridurre il sistema ad un sistema di cinque equazioni nelle incognite a_1, a_3, b_1, b_2, b_3:

$$\begin{aligned} &a_1 + a_3 L^2 = 0 \\ &a_1 + 3 a_3 L^2 = b_1 \\ &3 a_3 L = b_2 \\ &b_1 + b_2 L + b_3 L^2 + \frac{qL^3}{24\,EI} = 0 \\ &b_1 + 2 b_2 L + 3 b_3 L^2 + \frac{qL^3}{6\,EI} = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Utilizzando la seconda e la terza equazione si giunge ad un sistema di tre equazioni nelle tre incognite a_1, a_3, b_3 :

$$\begin{aligned} &a_1 + a_3 L^2 = 0 \\ &a_1 + 6 a_3 L^2 + b_3 L^2 + \frac{qL^3}{24\,EI} = 0 \\ &a_1 + 9 a_3 L^2 + 3 b_3 L^2 + \frac{qL^3}{6\,EI} = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Utilizzando la prima equazione si ha poi il sistema in a_3 e b_3 :

$$\begin{aligned} &5 a_3 + b_3 = -\frac{qL}{24\,EI} \\ &8 a_3 + 3 b_3 = -\frac{qL}{6\,EI} \end{aligned} \tag{10}$$

che puo' essere subito risolto a fornire:

$$a_3 = \frac{qL}{168\,EI} \qquad b_3 = -\frac{qL}{14\,EI} \tag{11}$$

In cascata di ottengono ora:

$$a_1 = -a_3\,L^2 = -\frac{qL^3}{168\,EI} \tag{12}$$

$$b_1 = a_1 + 3\,a_3\,L^2 = -\frac{qL^3}{168\,EI} + \frac{3\,qL^3}{168\,EI} = \frac{qL^3}{84\,EI} \qquad b_2 = 3\,a_3\,L = \frac{qL^2}{56\,EI} \tag{13}$$

Ne seguono spostamenti, rotazioni, momenti e tagli nelle due campate:

$$u_2\,(x_3) = -\frac{qL^3}{168\,EI}\,x_3 + \frac{qL}{168\,EI}\,x_3^3 = \frac{qL}{168\,EI}\left(x_3^3 - L^2\,x_3\right) \tag{14}$$

$$\phi^{(1)}\,(x_3) = \frac{qL}{168\,EI}\left(L^2 - 3\,x_3^2\right) \tag{15}$$

$$M^{(1)}\,(x_3) = -\frac{qL}{28}\,x_3 \tag{16}$$

$$T^{(1)}\,(x_3) = -\frac{qL}{28} \tag{17}$$

$$v_2\,(x_3) = \frac{qL^3}{84\,EI}\,x_3 + \frac{qL^2}{56\,EI}\,x_3^2 - \frac{qL}{14\,EI}\,x_3^3 + \frac{qx_3^4}{24\,EI} \tag{18}$$

$$\phi^{(2)}\,(x_3) = -\frac{qL^3}{84\,EI} - \frac{qL^2}{28\,EI}\,x_3 + \frac{3\,qL}{14\,EI}\,x_3^2 - \frac{qx_3^3}{6\,EI} \tag{19}$$

$$M^{(2)}\,(x_3) = -\frac{qL^2}{28} + \frac{3\,qL}{7}\,x_3 - \frac{qx_3^2}{2} \tag{20}$$

$$T^{(2)}\,(x_3) = \frac{3\,qL}{7} - qx_3 \tag{21}$$

Come era da attendersi, lungo la campata scarica il taglio e' costante, il momento varia lineramente, la rotazione e' una funzione quadratica, lo spostamento una cubica, mentre laddove il carico e' presente, il taglio varia con legge lineare, il momento e' quadratico, la rotazione cubica e lo spostamento quartico.
Per il tracciamento dei diagrammi, si parta dal diagramma del taglio, che puo' essere dedotto a partire dai seguenti dati:

- primo tratto, andamento costante, e pari a -qL/2
- secondo tratto, andamento lineare tra i valori $T^{(2)}(0) = 3\,qL/7$ e $T^{(2)}(L) = -4\,qL/7$

Per il momento, nella prima campata si ha un andamento lineare tra i valori 0 nell'appoggio di sinistra e $M^{(2)}(0) = -qL^2/28$ sull'appoggio intermedio. Nella campata di destra, invece, il momento varia con legge quadratica, il suo valore a sinistra e' ancora pari ad $M^{(2)}(0) = -qL^2/28$, mentre nell'incastro vale $M^{(2)}(L) = -3\,qL^2/28$. Inoltre, e' immediato calcolare il punto di nullo del diagramma del taglio, corrispondente alla tangenza orizzontale del diagramma del momento:

$$T^{(2)}\,(x_3^*) = \frac{3\,qL}{7} - qx_3^* = 0 \longrightarrow x_3^* = \frac{3\,L}{7} \tag{22}$$

Il valore del momento in tale ascissa e' pari a :

$$M^{(2)}\,(x_3^*) = \frac{11}{196}\,qL^2 \tag{23}$$

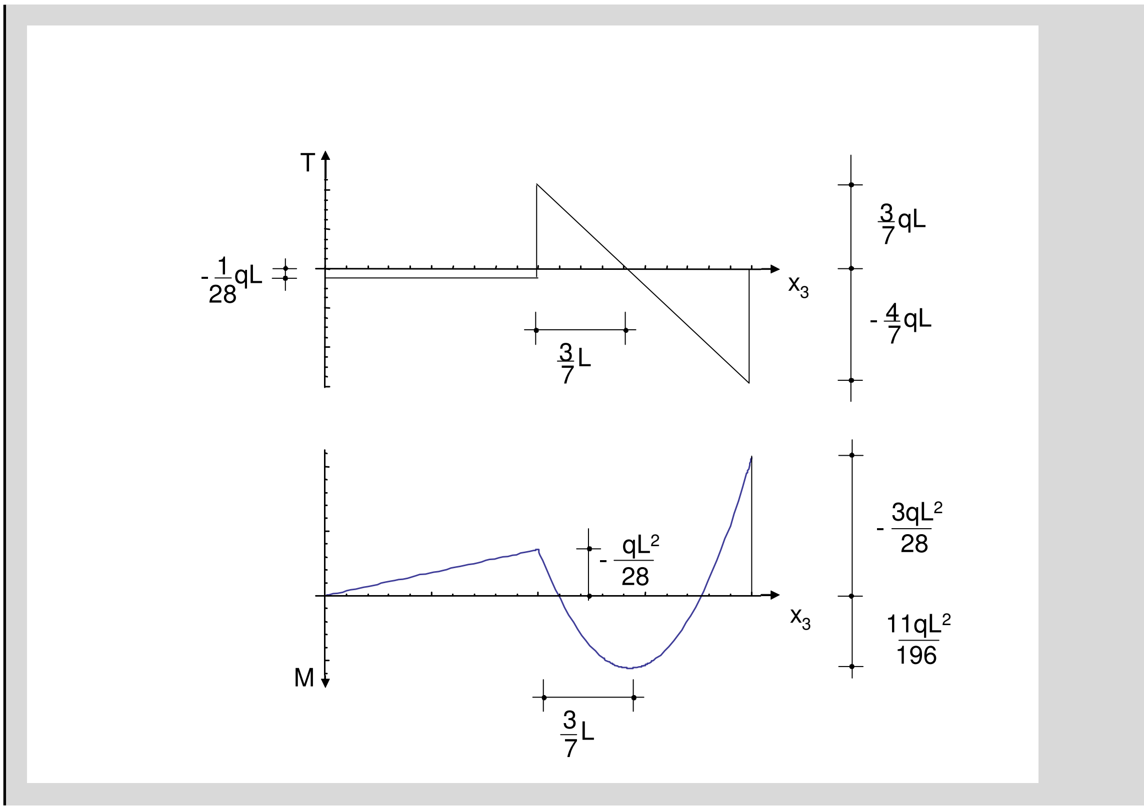


Figura 2 - I diagrammi del taglio e del momento flettente

Per il diagramma degli spostamenti abbiamo a disposizione le seguenti informazioni:

- lo spostamento e' nullo in corrispondenza dei due appoggi e dell'incastro
- lo spostamento ha tangenza orizzontale in corrispondenza dell'incastro
- la curvatura del diagramma nella seconda campata si annulla nei due punti in cui il momento si annulla

Infine, le reazioni possono calcolarsi a partire dalle funzioni del taglio e del momento flettente:

- sull'appoggio di sinistra:

$$R_A = -T^{(1)}\,(0) = \frac{qL}{28} \tag{24}$$

- sull'appoggio intermedio:

$$R_B = T^{(1)}\,(L) - T^{(2)}\,(0) = -\frac{qL}{28} - \frac{3\,qL}{7} = -\frac{13\,qL}{28} \tag{25}$$

- sull'incastro di destra:

$$R_C = T^{(2)}\,(L) = -\frac{4\,qL}{7} \tag{26}$$

$$M_C = M^{(2)}\,(L) = -\frac{3\,qL^2}{28} \tag{27}$$

Per verifica, le equazioni di equilibrio della trave sono soddisfatte.

$$R_A + R_B + R_C + qL = \frac{qL}{28} - \frac{13\,qL}{28} - \frac{4\,qL}{7} + qL = 0$$

$$R_A\,L - R_C\,L + M_C - qL\,\frac{L}{2} = \frac{qL^2}{28} + \frac{4\,qL^2}{7} - \frac{3\,qL^2}{28} - \frac{qL^2}{2} = 0$$

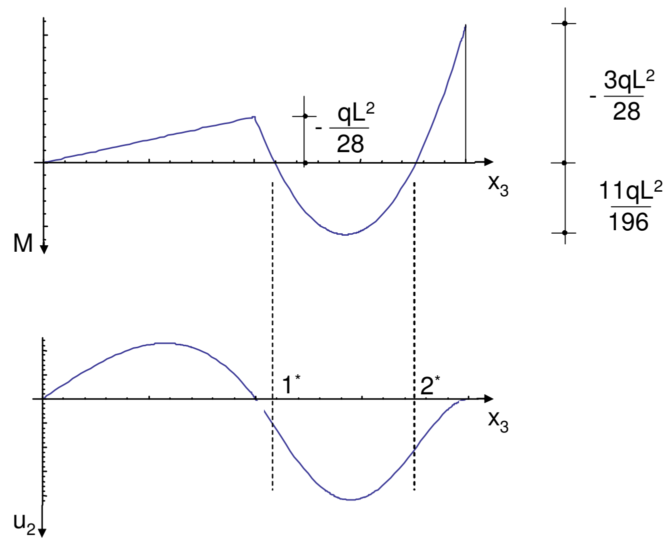


Figura 3 - I diagrammi del momento flettente e dell'abbassamento