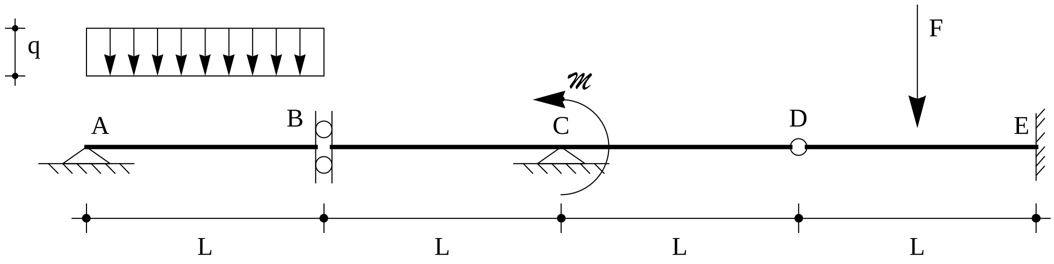
Verifica n.21

Mercoledi' 21 Settembre 2011 - ore 9.30-11.30

Si consideri la trave di Figura, di luce 4L, vincolata all'esterno con un appoggio a sinistra, un appoggio in mezzeria ed un incastro a destra, e caricata da una stesa di carico uniformemente distribuito, di intensita' q, sulla prima luce, con una coppia concentrata di intensita' $\mathcal{M}$ in corrispondenza dell'appoggio di mezzeria, e con una forza concentrata di intensita' F in mezzeria dell'ultima campata. Per essa:

1. si calcolino le reazioni vincolari

2. Nell'ipotesi in cui $\mathcal{M} = qL^2$ ed $F = qL$, si disegnino i diagrammi di taglio e momento flettente



Soluzione

La trave e' costituita da tre tratti rigidi, connessi tra loro da un bipendolo interno in B ed una cerniera in D. Ne segue che i suoi gradi di liberta' - in assenza di vincoli - sono pari a 6. I vincoli esterni eliminano 4 possibilita' di movimento, uno in ciascuno degli appoggi e due in corrispondenza degli incastri. Inoltre, le due sconnessioni semplici in B e D aggiungono ulteriori due restrizioni di movimento, e la struttura risulta isostatica: 2t - 2 = 6 - 6 = 0. Le reazioni vincolari si possono calcolare utilizzando le equazioni della statica.

Le equazioni di equilibrio

Per il primo tratto si puo' scrivere, scegliendo il polo in A

$$R_A + q\,L = 0 \tag{1}$$

$$M_B - \frac{q\,L^2}{2} = 0 \tag{2}$$

Per il secondo tratto, si ha, scegliendo il polo in D:

$$R_C + T_D = 0 \tag{3}$$

$$-M_B + \mathcal{M} + R_C\,L = 0 \tag{4}$$

Infine, per il terzo tratto si potra' scrivere, scegliendo il polo in E:

$$-T_D + F + R_E = 0 \tag{5}$$

$$\mathcal{M}_{rE} - R_D\,L + F\,\frac{L}{2} = 0 \tag{6}$$

La soluzione di queste equazioni e' banale:

$$R_A = -q\,L \tag{7}$$

$$M_B = \frac{q\,L^2}{2} \tag{8}$$

$$-M_B + \mathcal{M} + R_C\,L = 0 \longrightarrow R_C = \frac{M_B}{L} - \frac{\mathcal{M}}{L} = \frac{q\,L}{2} - \frac{\mathcal{M}}{L} \tag{9}$$

$$T_D = -R_C = -\frac{q\,L}{2} + \frac{\mathcal{M}}{L} \tag{10}$$

$$R_E = T_D - F = -\frac{q\,L}{2} + \frac{\mathcal{M}}{L} - F \tag{11}$$

$$\mathcal{M}_{rE} = T_D\,L - F\,\frac{L}{2} = -\frac{q\,L^2}{2} + \mathcal{M} - F\,\frac{L}{2} \tag{12}$$

I diagrammi delle caratteristiche

Nell'ipotesi in cui $\mathcal{M} = qL^2$ ed $F = qL$, le reazioni divengono:

$$R_A = -q\,L \tag{13}$$

$$M_B = \frac{q\,L^2}{2} \tag{14}$$

$$R_C = -\frac{q\,L}{2} \tag{15}$$

$$T_D = \frac{q\,L}{2} \tag{16}$$

$$R_E = -\frac{q\,L}{2} \tag{17}$$

$$\mathcal{M}_{rE} = 0 \tag{18}$$

Il tracciamento del diagramma del taglio parte dalle considerazioni preliminari:

1. in A il taglio e' uguale e contrario alla reazione R_A, in B (nel bipendolo) e' nullo, e tra A e B ha andamento lineare (in quanto q e' costante). Cio' basta a tracciare il taglio in AB

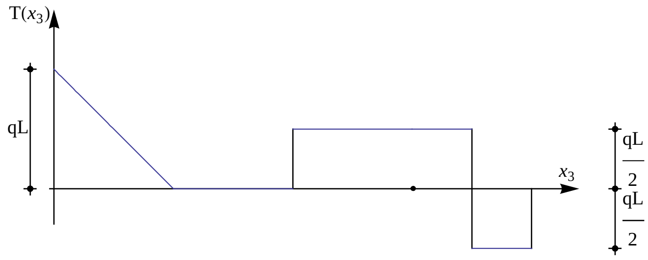
2. nel tratto BC il taglio e' costante, e quindi nullo

3. in C il taglio ha una discontinuita' pari al valore della reazione, e dall'equilibrio del concio si evince che il taglio, immediatamente a destra dell'appoggio, vale $qL/2$

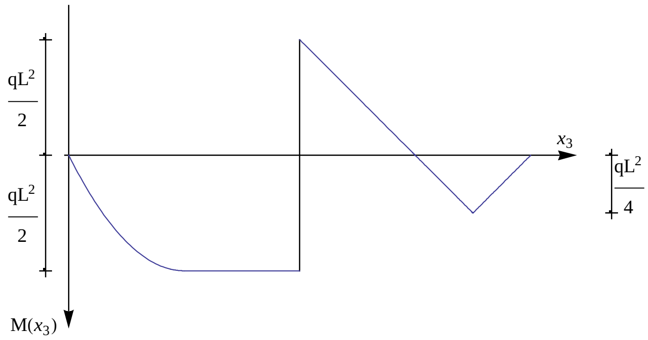
4. da C all'ascissa dove agisce la forza, il taglio resta costante, e pari a $qL/2$

5. in corrispondenza della forza, si ha una discontinuita' pari ad $F = q\,L$, e dall'equilibrio del concio sottostante la forza, si puo' concludere che il taglio a destra di F e' pari a - $qL/2$

6. il taglio prosegue costante fino all'incastro, dove dovra' essere pari ad R_E. Tutto cio' e' sintetizzato nel diagramma seguente:



Per il tracciamento del diagramma del momento, ci si puo' aiutare anche col diagramma del taglio, che ne rappresenta la derivata. Quindi nel primo tratto esso variera' con legge parabolica, giungendo in B con tangenza orizzontale, nel tratto BC sara' costante, nei tratti seguenti variera' con legge lineare, crescendo tra C e la forza, decrescendo dalla forza all'incastro. In base ai vincoli si puo' senz'altro asserire che il diagramma del momento ha un punto di nullo in A ed in D, e la presenza della coppia applicata in C implica una discontinuita' di prima specie:



Figure