

Verifica n.23

Venerdi' 20 Gennaio 2012 - ore 8.30-10.30

Si consideri la trave di Figura 1, di luce complessiva $4L$, vincolata all'esterno con un incastro a sinistra, un appoggio a $3/4$ della luce ed un ulteriore appoggio a destra, e caricata da una coppia concentrata di intensita' \mathcal{M} in corrispondenza dell'appoggio di destra. Per essa:

1. si calcolino le reazioni vincolari
2. si disegnino i diagrammi di taglio e momento flettente

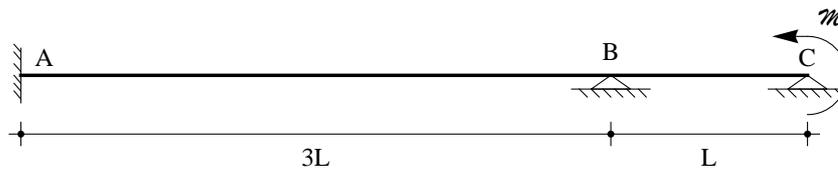


Figura 1 - Lo schema iniziale

Soluzione

La trave e' costituita da un solo tratto, e per essa si possono scrivere due equazioni di equilibrio. Le incognite statiche sono quattro, ossia la reazione verticale R_A e la coppia reattiva \mathcal{M}_{rA} nell'incastro in A, le due reazioni verticali R_B ed R_C dei due appoggi in B e C. Ne segue che la trave e' doppiamente iperstatica.

Per il calcolo delle quattro reazioni si puo' utilizzare il metodo della soluzione dell'equazione differenziale della linea elastica, calcolando gli spostamenti, e poi le rotazioni, i momenti ed i tagli. E' pero' molto piu' semplice ed immediato utilizzare il metodo della scrittura diretta delle equazioni di congruenza, utilizzando come sistema isostatico equivalente (SIE) la trave di partenza in cui sono state inserite due cerniere in A ed in B. La struttura isostatica equivalente si presenta come in Figura 2, ed e' identica a quella di partenza, *a patto* che le due incognite iperstatiche X_1 ed X_2 siano tali da soddisfare le condizioni di congruenza:

$$\phi_A = 0 \quad (1)$$

$$\phi_{Bsin} = \phi_{Bdes} \quad (2)$$

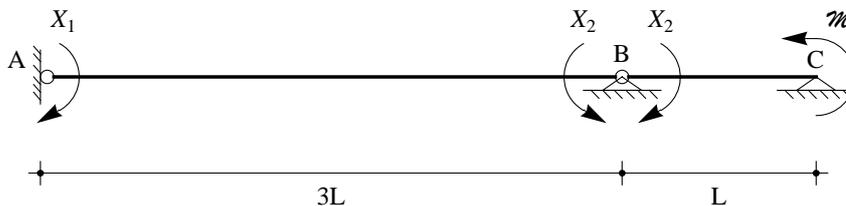


Figura 2 - Il sistema isostatico equivalente

■ La soluzione delle equazioni di congruenza

La rotazione in A e la rotazione a sinistra di B sono calcolabili sullo schema di Figura 3, e sono riconducibili ad alcuni risultati notevoli:



Figura 3 - Lo schema per il calcolo di ϕ_A e ϕ_{Bsin}

Si avra':

$$\phi_A = -\frac{X_1(3L)}{3EI} - \frac{X_2(3L)}{6EI} \quad (3)$$

$$\phi_{Bsin} = \frac{X_1(3L)}{6EI} + \frac{X_2(3L)}{3EI} \quad (4)$$

La rotazione a destra di B puo' invece calcolarsi sullo schema di Figura 4, ed e' anch'essa immediatamente deducibile:

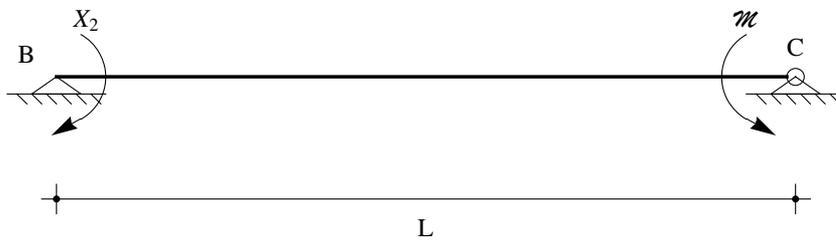


Figura 4 - Lo schema per il calcolo di ϕ_{Bdes}

$$\phi_{Bdes} = -\frac{X_2L}{3EI} - \frac{ML}{6EI} \quad (5)$$

Le equazioni di congruenza (1-2) si scrivono quindi:

$$-\frac{X_1(3L)}{3EI} - \frac{X_2(3L)}{6EI} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{X_1(3L)}{6EI} + \frac{X_2(3L)}{3EI} = -\frac{X_2L}{3EI} - \frac{ML}{6EI} \quad (7)$$

e la loro soluzione e' banale:

$$X_1 = \frac{M}{13} \quad (8)$$

$$X_2 = -\frac{2}{13}M \quad (9)$$

Le reazioni verticali possono calcolarsi dalle equazioni di equilibrio alla rotazione. Sullo schema di Figura 3 scriveremo:

$$-X_1 + X_2 + R_A 3L = 0 \quad (10)$$

da cui:

$$R_A = \frac{1}{13} \frac{M}{L} \quad (11)$$

e dallo schema di Figura 3:

$$-X_2 + M - R_C L = 0 \quad (12)$$

da cui:

$$R_C = \frac{15 \mathcal{M}}{13 L} \quad (13)$$

Cio' basta a disegnare i diagrammi di taglio e momento

■ I diagrammi delle caratteristiche

Il diagramma del taglio sara' costante a tratti, con una discontinuita' in corrispondenza dell'appoggio intermedio. Poiche' poi si conosce il taglio in A, uguale e contrario alla reazione R_A , ed il taglio in C, uguale alla reazione R_C , si potra' tracciare il diagramma lungo la trave.

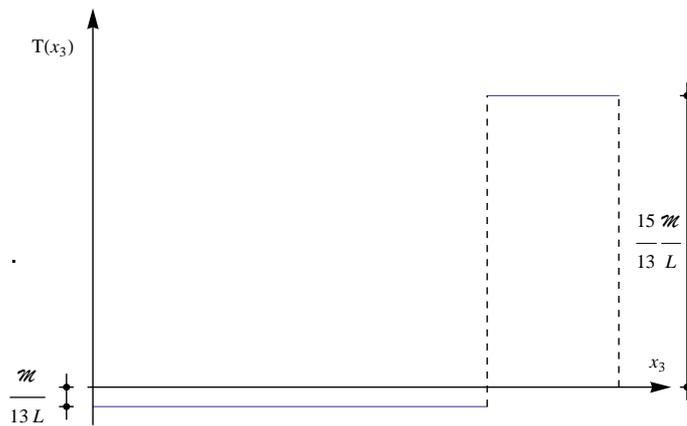


Figura 5 - Il diagramma del taglio

Dal diagramma e' anche immediato leggere il valore della reazione in B, pari a:

$$R_B = -\frac{16 \mathcal{M}}{13 L} \quad (14)$$

Il diagramma del momento e' ancora piu' facile, in quanto e' costituito da due tratti lineari, da A a B, e da B a C, rispettivamente, e sono noti i valori di M_A , M_B ed M_C :

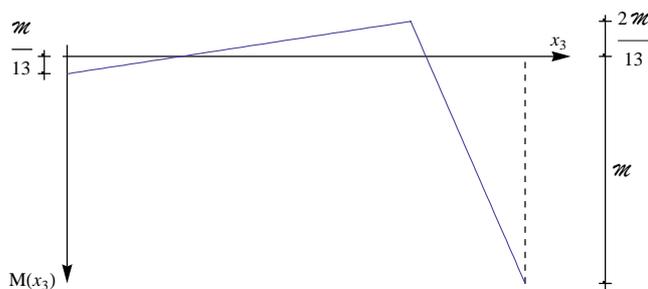


Figura 6 - Il diagramma del momento

Figure