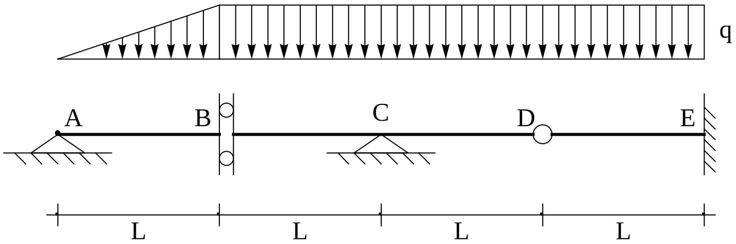
Verifica n.33

Lunedi' 19 Novembre 2012 - ore 9.30-11.30

1. Si calcolino, si disegnino e si commentino i diagrammi di momenti e tagli per la trave di Figura
2. Si calcoli il momento in corrispondenza dell'appoggio in C
3. si calcoli il valore massimo del momento in CE



Soluzione

La struttura e' costituita da tre tratti, e possono quindi scriversi sei equazioni di equilibrio. Le relative incognite statiche sono la reazione verticale dell'appoggio in A e dell'appoggio in C, la reazione verticale e la coppia reattiva dell'incastro in E, il momento in B ed il taglio in D. La struttura e' quindi potenzialmente isostatica.

Il calcolo delle reazioni

Eliminando i vincoli, e sostituendo ad essi le reazioni e le caratteristiche incognite, si giunge al diagramma di Figura 2, su cui e' immediato scrivere le sei equazioni di equilibrio:

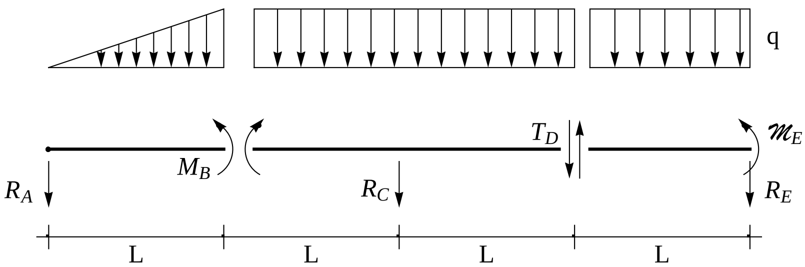


Figura 2 - Le reazioni incognite

$$R_A + \frac{1}{2} q L = 0 \tag{1}$$

$$M_B - \frac{1}{2} q L \frac{2}{3} L = 0 \tag{2}$$

avendo scelto il polo in A,

$$R_C + T_D + 2 q L = 0 \tag{3}$$

$$-M_B - T_D L = 0 \tag{4}$$

avendo scelto il polo in C,

$$R_E - T_D + q L = 0 \tag{5}$$

$$\mathcal{M}_E - T_D\, L \ + q\, L\, \frac{L}{2} \ = 0 \tag{6}$$

avendo scelto il polo in E.

La soluzione delle equazioni e' immediata:

$$R_A = -\frac{1}{2}\, q\, L \tag{7}$$

$$M_B = \frac{1}{3}\, q\, L^2 \tag{8}$$

$$T_D \ = -\frac{1}{3}\, q\, L \tag{9}$$

$$R_C = -T_D - 2\, q\, L = \ -\frac{5}{3}\, q\, L \tag{10}$$

$$R_E = T_D - q\, L = -\frac{4}{3}\, q\, L \tag{11}$$

$$\mathcal{M}_E = -\frac{5}{6}\, q\, L^2 \tag{12}$$

I diagrammi

Il diagramma del taglio ha andamento parabolico da A a B, dove si annulla; in A esso vale $-R_A$, e poiche' il carico e' nullo, il diagramma parte con tangenza orizzontale. Da B a C il diagramma procede con andamento lineare e pendenza pari a -q, giungendoi quindi in C con un valore negativo, e pari a -qL. In corrispondenza dell'appoggio in C si ha una discontinuita', dovuta alla presenza della reazione dell'appoggio, per poi proseguire con andamento lineare e pendenza pari a -q fino all'incastro.

Nella sezione a destra dell'appoggio in C, quindi, il taglio avra' un valore positivo, e pari a $\frac{2}{3}$ qL, mentre nell'incastro sara' pari ad $R_E = \frac{4}{3}$qL. Una semplice proporzione geometrica permette allora di asserire che il tagliuo si annullera' nella sezione all'ascissa $x_G = 2\, L + \frac{2}{3}\, L$:

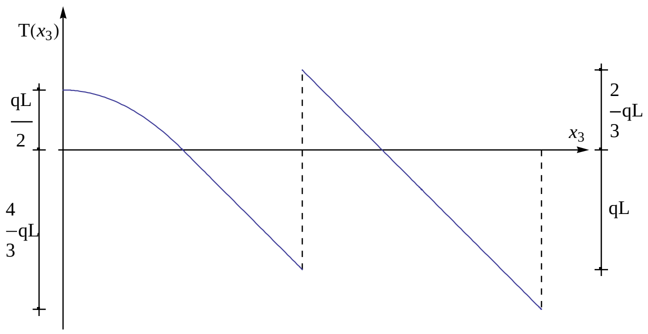


Figura 2 - Il diagramma del taglio

Il diagramma del momento si annullera' in A, avra' andamento cubico in AB, per giungere in B con valore M_B e tangenza orizzontale. Nel tratto BC proseguira' con andamento quadratico, ed il suo valore in C puo' calcolarsi con una equazione di equilibrio da scriversi sul diagramma di Figura 3 (polo in C):

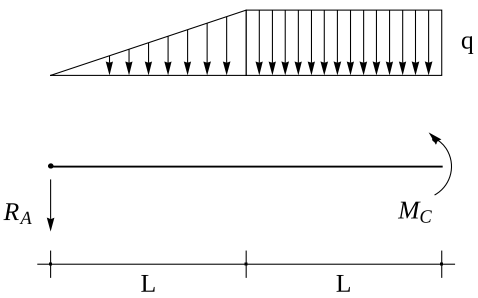


Figura 3 - Il calcolo del momento in C

$$M_C + 2\, R_A\, L + \frac{1}{2}\, q\, L \left(\frac{L}{3} + L\right) + q\, L\, \frac{L}{2} = 0 \tag{13}$$

da cui subito:

$$M_C = -\frac{q\, L^2}{6} \tag{14}$$

Nel restante tratto CE il momento varia con legge parabolica, si annulla in D e raggiunge il suo valore massimo in corrispondenza dell'ascissa di taglio nullo, ossia in 2L+ $\frac{2}{3}\, L$. In corrispondenza di tale ascissa si avra':

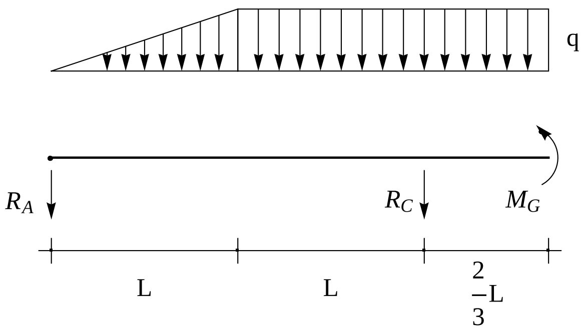


Figura 4 - Il calcolo del momento in G

$$M_G + R_A \left(2\, L + \frac{2}{3}\, L\right) + R_C \left(\frac{2}{3}\, L\right) + \frac{1}{2}\, q\, L \left(\frac{L}{3} + L + \frac{2}{3}\, L\right) + q \left(L + \frac{2}{3}\, L\right) \frac{1}{2} \left(L + \frac{2}{3}\, L\right) = 0 \tag{15}$$

da cui:

$$M_G = \frac{1}{2}\, q\, L \left(2\, L + \frac{2}{3}\, L\right) + \frac{5}{3}\, q\, L \left(\frac{2}{3}\, L\right) - \frac{1}{2}\, q\, L \left(\frac{L}{3} + L + \frac{2}{3}\, L\right) - q \left(L + \frac{2}{3}\, L\right) \frac{1}{2} \left(L + \frac{2}{3}\, L\right) \tag{16}$$

ossia, infine:

$$M_G = \frac{q\, L^2}{18} \tag{17}$$

Il momento, infine, raggiunge il valore $-\frac{5}{6}\, q\, L^2$ in E, e si presenta come:

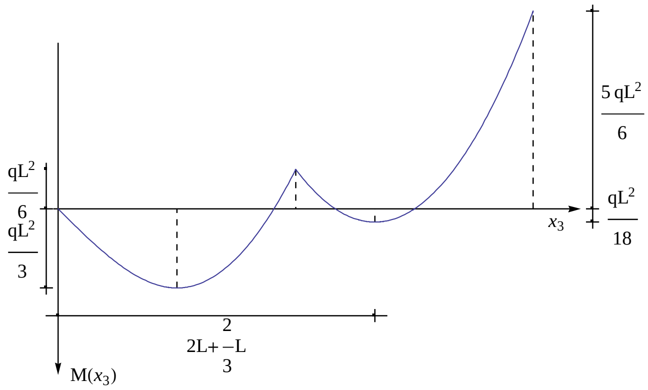


Figura 5 - Il diagramma del momento

Figure