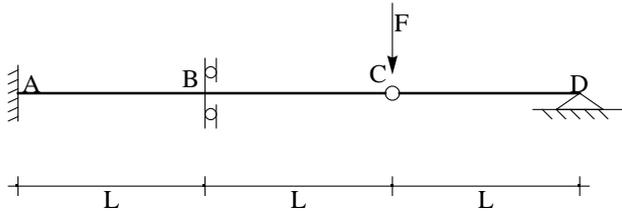


# Verifica n.41

Venerdi' 18 Ottobre 2013 - ore 8.30-10.30

Per la trave di Figura:

1. Calcolare la coppia reattiva del bipendolo
2. Calcolare lo spostamento della cerniera, e la rotazione relativa tra le due facce della cerniera stessa.
3. Disegnare i diagrammi di taglio, momento, rotazioni e spostamento



## Soluzione

La trave e' una volta iperstatica, e poiche' sono richiesti i diagrammi delle caratteristiche, delle rotazioni e degli spostamenti, e' preferibile utilizzare le equazioni differenziali della linea elastica.

Si devono scrivere tre diverse equazioni, per definire le linee elastiche  $u_2(x_3)$ ,  $v_2(x_3)$  e  $w_2(x_3)$ , valide da A a B, da B a C e da C a D, rispettivamente:

$$u_2''' = 0 \quad (1)$$

$$v_2''' = 0 \quad (2)$$

$$w_2''' = 0 \quad (3)$$

con soluzioni cubiche:

$$u_2(x_3) = b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 \quad (4)$$

$$v_2(x_3) = c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \quad (5)$$

$$w_2(x_3) = d_0 + d_1 x_3 + d_2 x_3^2 + d_3 x_3^3 \quad (6)$$

Le costanti di integrazione si calcolano imponendo le condizioni ai limiti nell'incastro, nel bipendolo, nella cerniera e nell'appoggio

### ■ La soluzione delle equazioni della linea elastica

**Incastro in A** : occorrera' annullare spostamenti e rotazioni:

$$u_2(0) = 0 \quad (7)$$

$$u_2'(0) = 0 \quad (8)$$

**Bipendolo in B** : le condizioni di congruenza dovranno imporre la continuita' degli abbassamenti, e l'annullarsi della rotazione. Invece, l'equilibrio del concio impone la continuita' del taglio:

$$u_2(L) = v_2(0) \quad (9)$$

$$u_2'(L) = 0 \quad (10)$$

$$v_2'(0) = 0 \quad (11)$$

$$-EI u_2''(L) = -EI v_2''(0) \quad (12)$$

**Cerniera in C** : l'unica condizione di congruenza impone la continuita' degli abbassamenti. L'equilibrio del concio impone l'annullarsi del momento flettente ed una relazione tra taglio e forza applicata:

$$v_2(L) = w_2(0) \quad (13)$$

$$-EI v_2''(L) = 0 \quad (14)$$

$$-EI w_2''(0) = 0 \quad (15)$$

$$EI v_2''(L) - EI w_2''(0) + F = 0 \quad (16)$$

**Appoggio in D** : la congruenza impone l'annullamento degli abbassamenti, l'equilibrio l'annullamento dei momenti:

$$w_2(L) = 0 \quad (17)$$

$$-EI w_2''(L) = 0 \quad (18)$$

Queste dodici condizioni si tramutano nel sistema di dodici equazioni nelle dodici costanti di integrazione:

$$b_0 = 0 \quad (19)$$

$$b_1 = 0 \quad (20)$$

$$b_0 + b_1 L + b_2 L^2 + b_3 L^3 = c_0 \quad (21)$$

$$b_1 + 2 b_2 L + 3 b_3 L^2 = 0 \quad (22)$$

$$c_1 = 0 \quad (23)$$

$$b_3 = c_3 \quad (24)$$

$$c_0 + c_1 L + c_2 L^2 + c_3 L^3 = d_0 \quad (25)$$

$$2 c_2 + 6 c_3 L = 0 \quad (26)$$

$$d_2 = 0 \quad (27)$$

$$c_3 - d_3 + \frac{F}{6 EI} = 0 \quad (28)$$

$$d_0 + d_1 L + d_2 L^2 + d_3 L^3 = 0 \quad (29)$$

$$2 d_2 + 6 d_3 L = 0 \quad (30)$$

che si tramutano immediatamente in un sistema di sei equazioni in sei incognite:

$$b_2 L^2 + b_3 L^3 = c_0 \quad (31)$$

$$2 b_2 + 3 b_3 L = 0 \quad (32)$$

$$c_0 + c_2 L^2 + b_3 L^3 = d_0 \quad (33)$$

$$c_2 + 3 b_3 L = 0 \quad (34)$$

$$b_3 + \frac{F}{6 EI} = 0 \quad (35)$$

$$d_0 + d_1 L = 0 \quad (36)$$

Dalla penultima si ricava  $b_3$  :

$$b_3 = -\frac{F}{6 EI} \quad (37)$$

mentre  $c_2$  puo' ricavarsi dalla (34)

$$c_2 = -3 b_3 L = \frac{F L}{2 EI} \quad (38)$$

e  $b_2$  puo' ricavarsi dalla (32)

$$b_2 = -\frac{3}{2} b_3 L = \frac{FL}{4EI} \quad (39)$$

La (31) permette il calcolo di  $c_0$  :

$$c_0 = \frac{FL^3}{4EI} - \frac{FL^3}{6EI} = \frac{FL^3}{12EI} \quad (40)$$

La (33) fornisce  $d_0$ :

$$d_0 = \frac{FL^3}{12EI} + \frac{FL^3}{2EI} - \frac{FL^3}{6EI} = \frac{5}{12} \frac{FL^3}{EI} \quad (41)$$

ed infine la (36) definisce  $d_1$ :

$$d_1 = -\frac{5}{12} \frac{FL^2}{EI} \quad (42)$$

### ■ La deduzione di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli

Utilizzando i valori delle costanti di integrazione appena dedotti, si potranno scrivere gli spostamenti come:

$$u_2(x_3) = \frac{FL}{4EI} x_3^2 - \frac{F}{6EI} x_3^3 \quad (43)$$

$$v_2(x_3) = \frac{FL^3}{12EI} + \frac{FL}{2EI} x_3^2 - \frac{F}{6EI} x_3^3 \quad (44)$$

$$w_2(x_3) = \frac{5}{12} \frac{FL^3}{EI} - \frac{5}{12} \frac{FL^2}{EI} x_3 \quad (45)$$

da cui le rotazioni:

$$\phi^{(1)}(x_3) = -\frac{FL}{2EI} x_3 + \frac{F}{2EI} x_3^2 \quad (46)$$

$$\phi^{(2)}(x_3) = -\frac{FL}{EI} x_3 + \frac{F}{2EI} x_3^2 \quad (47)$$

$$\phi^{(3)}(x_3) = \frac{5}{12} \frac{FL^2}{EI} \quad (48)$$

ed ancora i momenti:

$$M^{(1)}(x_3) = -\frac{FL}{2} + F x_3 \quad (49)$$

$$M^{(2)}(x_3) = -FL + F x_3 \quad (50)$$

ed infine i tagli:

$$T^{(1)}(x_3) = F \quad (51)$$

$$T^{(2)}(x_3) = F \quad (52)$$

### ■ Il tracciamento dei diagrammi di tagli e momenti

Sia il taglio che il momento sono nulli a destra della forza, il taglio sarà costante, ed ovunque pari ad F. Ne segue che il momento sarà una funzione crescente, con derivata costante e pari ad F. Esso inoltre presenterà un punto di nullo nella mezzeria del primo tratto, mentre la discontinuità in corrispondenza del bipendolo (coppia reattiva del bipendolo) vale:

$$\mathcal{M}_B = \frac{3}{2} FL \quad (53)$$

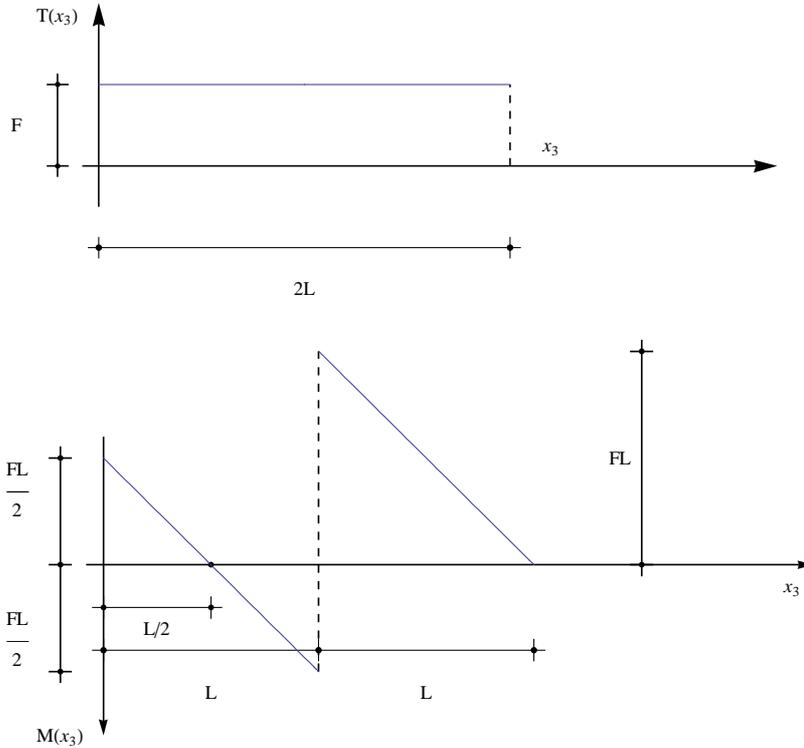
Lo spostamento della cerniera è immediatamente leggibile come

$$w_C = \frac{5}{12} \frac{FL^3}{EI} \quad (54)$$

mentre la sua rotazione relativa sarà pari a:

$$\Delta\phi_C = \phi_{Cdes} - \phi_{Csin} = \frac{5}{12} \frac{FL^2}{EI} + \frac{1}{2} \frac{FL^2}{EI} = \frac{11}{12} \frac{FL^2}{EI} \quad (55)$$

Il diagramma del taglio e del momento sono banali, e si presenteranno come:

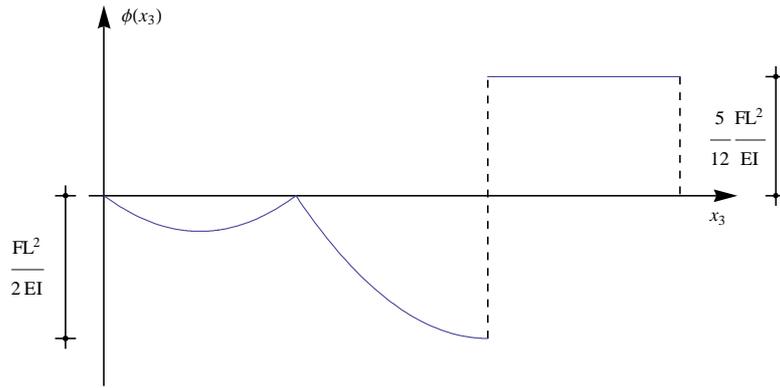


### ■ Il tracciamento dei diagrammi di rotazione ed abbassamento

Per tracciare il diagramma delle rotazioni, si hanno le seguenti informazioni:

1. l'andamento sarà quadratico da A a C, costante da C a D
2. in A ed in B la rotazione è nulla
3. in mezz'aria del tratto AB, ed in C, il diagramma presenterà tangenza orizzontale, in corrispondenza dei punti di nullo del momento
4. in C si ha una discontinuità, dovuta alla presenza della cerniera

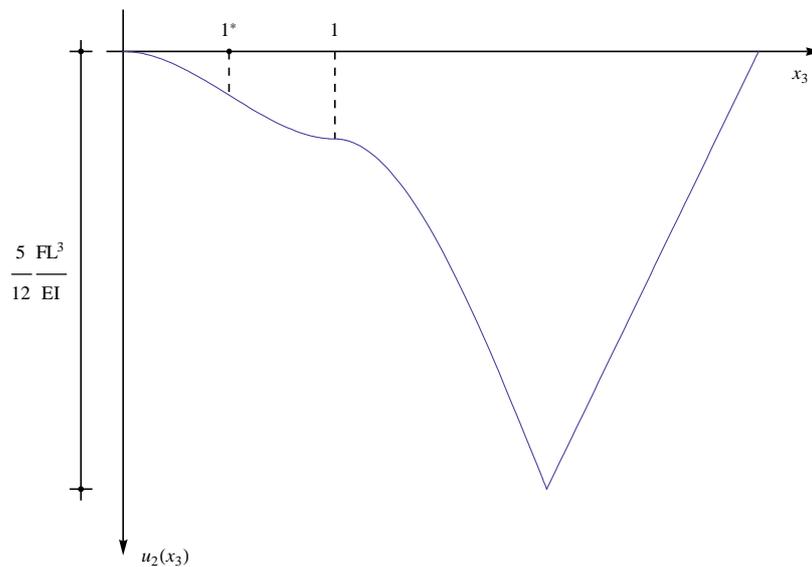
Ciò basta a definire l'andamento delle rotazioni:



Infine, il diagramma degli spostamenti puo' essere disegnato a partire dalle seguenti informazioni:

1. nell'incastro il diagramma ha un punto di nullo, ed una tangente orizzontale
2. in mezzeria del tratto AB si ha un cambio di curvatura (punto  $1^*$ )
3. in B si ha una tangenza orizzontale (punto 1)
4. in C il diagramma ha una discontinuita' angolare
5. da A a C la funzione spostamento e' crescente (rotazione negativa), mentre cresce da C a D
6. nell'appoggio lo spostamento e' nullo
7. da C a D il diagramma varia con legge lineare

Ne segue il diagramma di Figura:



**Figure**