Verifica n.5

Mercoledi' 17 giugno 2009 - ore 10.30-12.30

Assegnato lo stato tensionale in un punto P:

$$S = \begin{pmatrix} 10 & -20 & -1 \\ -20 & 40 & 2 \\ -1 & 2 & 46 \end{pmatrix} Kg / cm^2 \quad (1)$$

calcolare:

1. le tensioni principali e le corrispondenti direzioni principali di tensione
2. disegnare i cerchi principali di Mohr
3. calcolare la massima e minima tensione tangenziale agente nel punto P
4. calcolare le tensioni normali minime e massime associate alle tensioni di cui al punto 3.

Soluzione

Per il punto 1, si calcolino i tre invarianti di tensione. Uno sguardo alla matrice permette di dedurre subito che l'invariante cubico e' nullo, in quanto le prime due righe sono linearmente dipendenti. Si ha quindi:

$$I_1 = 10 + 40 + 46 = 96\ Kg / cm^2 \quad (2)$$

$$I_2 = 10 \cdot 40 + 40 \cdot 46 + 10 \cdot 46 - 20^2 - 1^2 - 2^2 = 2295\ Kg^2 / cm^4 \quad (3)$$

$$I_3 = 0 \quad (4)$$

e l'equazione secolare si scrive:

$$-\sigma^3 + 96\, \sigma^2 - 2295\, \sigma = 0 \quad (5)$$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0 \\ \sigma_2 &= 45\ kg / cm^2 \\ \sigma_3 &= 51\ kg / cm^2 \end{aligned} \quad (6)$$

In corrispondenza della prima tensione principale, si ha quindi il sistema a determinante nullo:

$$\begin{pmatrix} 10 & -20 & -1 \\ -20 & 40 & 2 \\ -1 & 2 & 46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{11} \\ n_{21} \\ n_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

che permette di determinare i tre coseni direttori della prima direzione principale di tensione. Poiche' la seconda equazione e' null'altro che la prima equazione moltiplicata per -2, si considerano solo la prima e la terza equazione, scrivendo:

$$10 \frac{n_{11}}{n_{21}} - \frac{n_{31}}{n_{21}} = 20 \quad (8)$$

$$\frac{n_{11}}{n_{21}} - 46 \frac{n_{31}}{n_{21}} = 2 \quad (9)$$

Sara' quindi:

$$\frac{n_{11}}{n_{21}} = 2; \quad \frac{n_{31}}{n_{21}} = 0 \tag{10}$$

Una soluzione non normalizzata per i coseni direttori della prima direzione principale di tensione sara' quindi:

$$n_I = (2, 1, 0) \tag{11}$$

In corrispondenza della seconda tensione principale, si ha quindi il sistema a determinante nullo:

$$\begin{pmatrix} -35 & -20 & -1 \\ -20 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{12} \\ n_{22} \\ n_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

che permette di determinare i tre coseni direttori della seconda direzione principale di tensione, scrivendo:

$$-35 \frac{n_{12}}{n_{32}} - 20 \frac{n_{22}}{n_{32}} = 1 \tag{13}$$

$$20 \frac{n_{12}}{n_{32}} + 5 \frac{n_{22}}{n_{32}} = 2 \tag{14}$$

$$\frac{n_{12}}{n_{32}} - 2 \frac{n_{22}}{n_{32}} = 1 \tag{15}$$

Sara' quindi, utilizzando la terza equazione:

$$\frac{n_{12}}{n_{32}} = 1 + 2 \frac{n_{22}}{n_{32}} \tag{16}$$

che puo' essere sostituita nella seconda, a fornire:

$$\frac{n_{22}}{n_{32}} = -\frac{2}{5} \tag{17}$$

Infine, dalla (16):

$$\frac{n_{12}}{n_{32}} = \frac{1}{5} \tag{18}$$

Una soluzione non normalizzata per i coseni direttori della seconda direzione principale di tensione sara' quindi:

$$n_{II} = (1, -2, 5) \tag{19}$$

Infine, in corrispondenza della terza tensione principale, si ha il sistema a determinante nullo:

$$\begin{pmatrix} -41 & -20 & -1 \\ -20 & -11 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{13} \\ n_{23} \\ n_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

che permette di determinare i tre coseni direttori della seconda direzione principale di tensione, scrivendo:

$$41 \frac{n_{13}}{n_{33}} + 20 \frac{n_{23}}{n_{33}} + 1 = 0 \tag{21}$$

$$20 \frac{n_{13}}{n_{33}} + 11 \frac{n_{23}}{n_{33}} - 2 = 0 \tag{22}$$

$$\frac{n_{13}}{n_{33}} - 2 \frac{n_{23}}{n_{33}} + 5 = 0 \tag{23}$$

Sara' quindi, utilizzando la terza equazione:

$$\frac{n_{13}}{n_{33}} = -5 + 2 \frac{n_{23}}{n_{33}} \tag{24}$$

che puo' essere sostituita nella seconda, a fornire:

$$\frac{n_{23}}{n_{33}} = 2 \tag{25}$$

Infine, dalla (24):

$$\frac{n_{13}}{n_{33}} = -5 + 4 = -1 \tag{26}$$

Una soluzione non normalizzata per i coseni direttori della terza direzione principale di tensione sara' quindi:

$$n_{III} = (-1, 2, 1) \tag{27}$$

La matrice delle direzioni principali e' quindi:

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

ed e' ovviamente ortogonale.

I cerchi di Mohr principali sono riportati in Figura, e dal loro esame si evince immediatamente che le massime e minime tensioni tangenziali valgono $\pm 25.5\ \mathrm{Kg/cm^2}$, accompagnandosi ad una tensione normale di trazione pari anch'essa a $25.5\ \mathrm{Kg/cm^2}$.