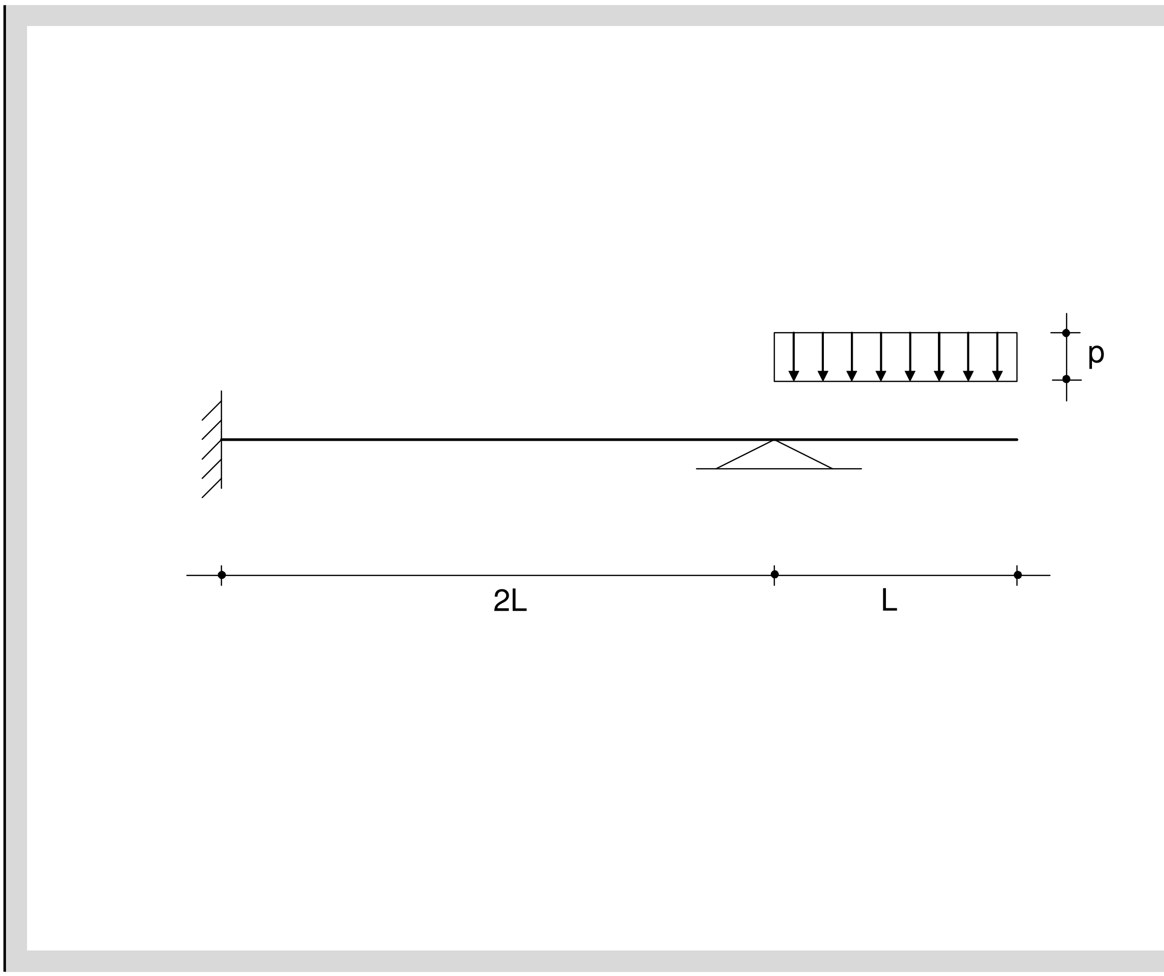
Esame 17 aprile 2009

Si consideri la trave a due campate disuguali di Figura, incastrata a sinistra e con appoggio intermedio a 2/3 della luce, e si supponga che solo lo sbalzo si caricato da una stesa di carico unformemente distribuito di intensita' p. Si richiede il tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche, delle rotazioni e degli abbassamenti, insieme al valore dell'abbassamento massimo.



Passo 1 - Scelta del metodo solutivo

La trave e' manifestamente una volta iperstatica, trattandosi di una mensola con appoggio intermedio. Poiche' sono richiesti anche i diagrammi di rotazioni e spostamenti, si preferisce scrivere le equazioni differenziali del quarto ordine della linea elastica, e risolverle imponendo le opportune condizioni ai limiti

Passo 2 - Scrittura e soluzione delle equazioni differenziali della linea elastica

La trave e' scarica nella sua prima campata, mentre e' soggetta ad un carico costante nella seconda campata. Le due equazioni differenziali negli spostamenti u_2 e v_2 sono quindi:

$$u_2''''(x_3) = 0$$
$$v_2''''(x_3) = \frac{p}{EI} \tag{1}$$

con soluzioni:

$$u_2(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \tag{2}$$

$$v_2(x_3) = b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 + \frac{p x_3^4}{24\,EI} \tag{3}$$

Le otto condizioni ai limiti dovranno esprimere due condizioni di congruenza nell'incastro:

$$\begin{aligned} &u_2(0) = 0 \\ &u_2'(0) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

quattro condizioni nell'appoggio intermedio:

$$\begin{aligned} &u_2(2L) = 0 \\ &v_2(0) = 0 \\ &u_2'(2L) = v_2'(0) \\ &u_2''(2L) = v_2''(0) \end{aligned} \tag{5}$$

due condizioni di equilibrio nell'estremo libero:

$$\begin{aligned} &v_2''(L) = 0 \\ &v_2'''(L) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Si noti che le prime tre condizioni in corrispondenza dell'appoggio esprimono la congruenza di abbassamenti e rotazioni, mentre l'ultima esprime l'equilibrio alla rotazione, ed impone la continuita' del momento flettente. Invece, il taglio variera' con discontinuita' per la presenza della reazione dell'appoggio.

Derivando opportunamente le (2) e (3) e valutando in corrispondenza dell'incastro, dell'appoggio e dell'estremo libero, si giunge a scrivere il sistema di otto equazioni nelle otto costanti di integrazione a_i e b_i :

$$\begin{aligned} &a_0 = 0 \\ &a_1 = 0 \\ &a_0 + 2 a_1 L + 4 a_2 L^2 + 8 a_3 L^3 = 0 \\ &b_0 = 0 \\ &a_1 + 4 a_2 L + 12 a_3 L^2 = b_1 \\ &2 a_2 + 12 a_3 L = 2 b_2 \\ &2 b_2 + 6 b_3 L + \frac{pL^2}{2\,EI} = 0 \\ &6 b_3 + \frac{pL}{EI} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Tale sistema si riduce immediatamente ad un sistema di cinque equazioni:

$$\begin{aligned} &a_2 + 2 a_3 L = 0 \\ &4 a_2 L + 12 a_3 L^2 = b_1 \\ &a_2 + 6 a_3 L = b_2 \\ &b_2 + 3 b_3 L + \frac{pL^2}{4\,EI} = 0 \\ &6 b_3 + \frac{pL}{EI} = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

facilmente risolvibile calcolando direttamente b_3 dall'ultima equazione e b_2 dalla penultima:

$$\begin{aligned} &b_3 = -\frac{pL}{6\,EI} \\ &b_2 = \frac{pL^2}{4\,EI} \end{aligned} \tag{9}$$

Il sistema di due equazioni in due incognite costituito dalla prima e dalla terza equazione permette di calcolare a_2 ed a_3 :

$$a_2 = -\frac{pL^2}{8\,EI} \qquad a_3 = \frac{pL}{16\,EI} \tag{10}$$

Infine, la terza equazione fornisce b_1 :

$$b_1 = \frac{pL^3}{4\,EI} \tag{11}$$

Gli spostamenti lungo la trave sono forniti quindi da:

$$u_2\,(x_3) = -\frac{pL^2}{8\,EI}\,x_3^2 + \frac{pL}{16\,EI}\,x_3^3 \tag{12}$$

$$v_2\,(x_3) = \frac{pL^3}{4\,EI}\,x_3 + \frac{pL^2}{4\,EI}\,x_3^2 - \frac{pL}{6\,EI}\,x_3^3 + \frac{px_3^4}{24\,EI} \tag{13}$$

le rotazioni sono pari a:

$$\phi^{(1)}\,(x_3) = \frac{pL^2}{4\,EI}\,x_3 - \frac{3\,pL}{16\,EI}\,x_3^2 \tag{14}$$

$$\phi^{(2)}\,(x_3) = -\frac{pL^3}{4\,EI} - \frac{pL^2}{2\,EI}\,x_3 + \frac{pL}{2\,EI}\,x_3^2 - \frac{px_3^3}{6\,EI} \tag{15}$$

il momento flettente e' esprimibile come:

$$M_1^{(1)}\,(x_3) = \frac{pL^2}{4} - \frac{3\,pL}{8}\,x_3 \tag{16}$$

$$M_1^{(2)}\,(x_3) = -\frac{pL^2}{2} + pL\,x_3 - \frac{px_3^2}{2} \tag{17}$$

Infine, il taglio e' pari a:

$$T_2^{(1)}\,(x_3) = -\frac{3\,pL}{8} \tag{18}$$

$$T_2^{(2)}\,(x_3) = pL - px_3 \tag{19}$$

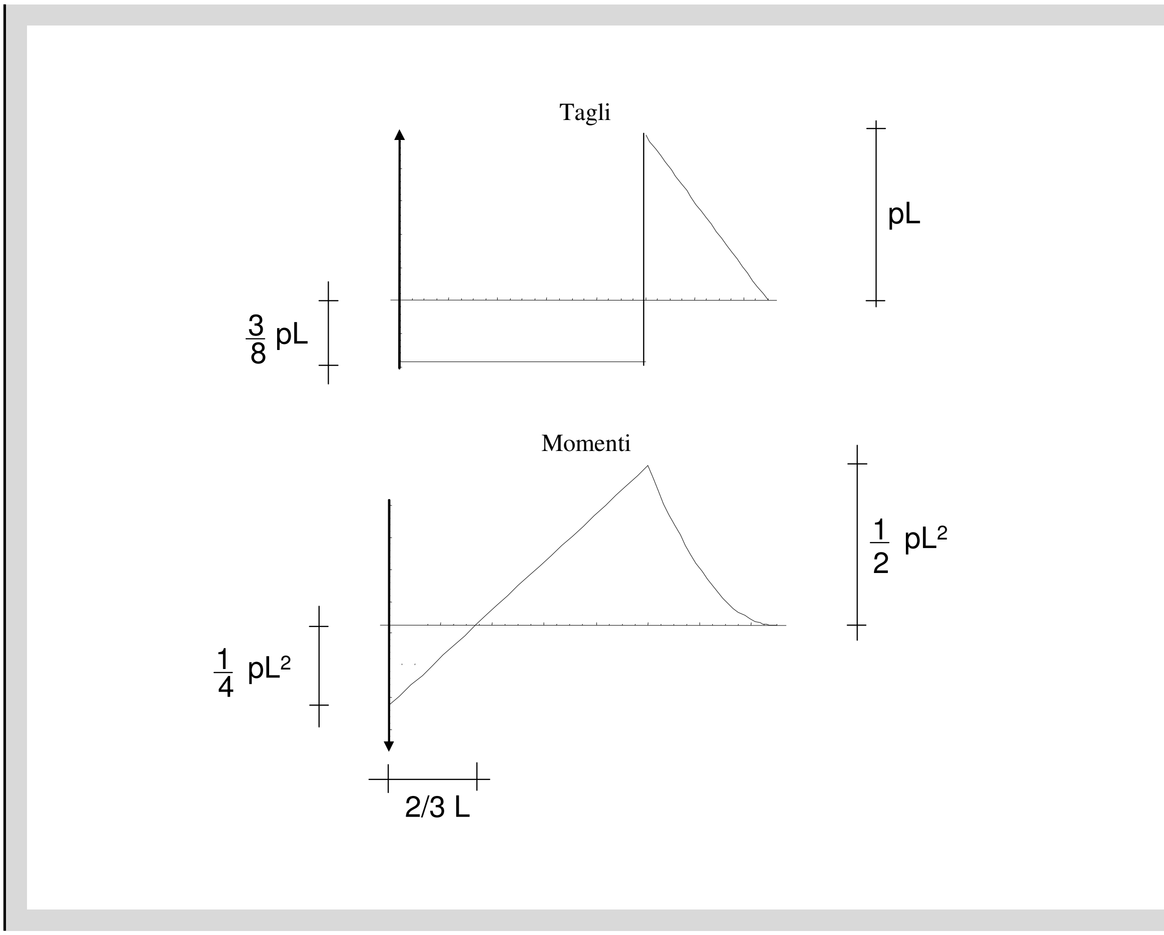
■ Passo 3 - Tracciamento diagramma del taglio e del momento flettente

Il diagramma del taglio sara' costante lungo il primo tratto, dove la trave e' scarica, e variera' con legge lineare lungo la seconda campata, caricata da un carico uniformemente distribuito. Inoltre esso dovra' annullarsi in corrispondenza dell'estremo libero. dalle (18) e (19) si trae anche che esso vale pL a destra dell'appoggio, e -3/4 pL a sinistra dell'appoggio stesso.

Il momento variera' linearmente lungo il primo tratto, e con legge quadratica nella seconda campata. Esso dovra' annullarsi in corrispondenza dell'estremo libero, arrivando in quel punto con tangenza orizzontale (taglio nullo). Inoltre, dalle (16-17) si trae subito che esso vale $pL^2/4$ nell'incastro e $-pL^2/2$ sull'appoggio. Cio' basta per poter tracciare il diagramma. Interessa anche l'ascissa di nullo del momento, che corrispondera' al punto di flesso del diagramma degli spostamenti. Essa si calcola imponendo:

$$M_1^{(1)}\,(x_3^*) = \frac{pL^2}{4} - \frac{3\,pL}{8}\,x_3^* = 0 \tag{20}$$

e quindi il punto richiesto ha ascissa $x_3^* = \frac{2}{3}\,L$



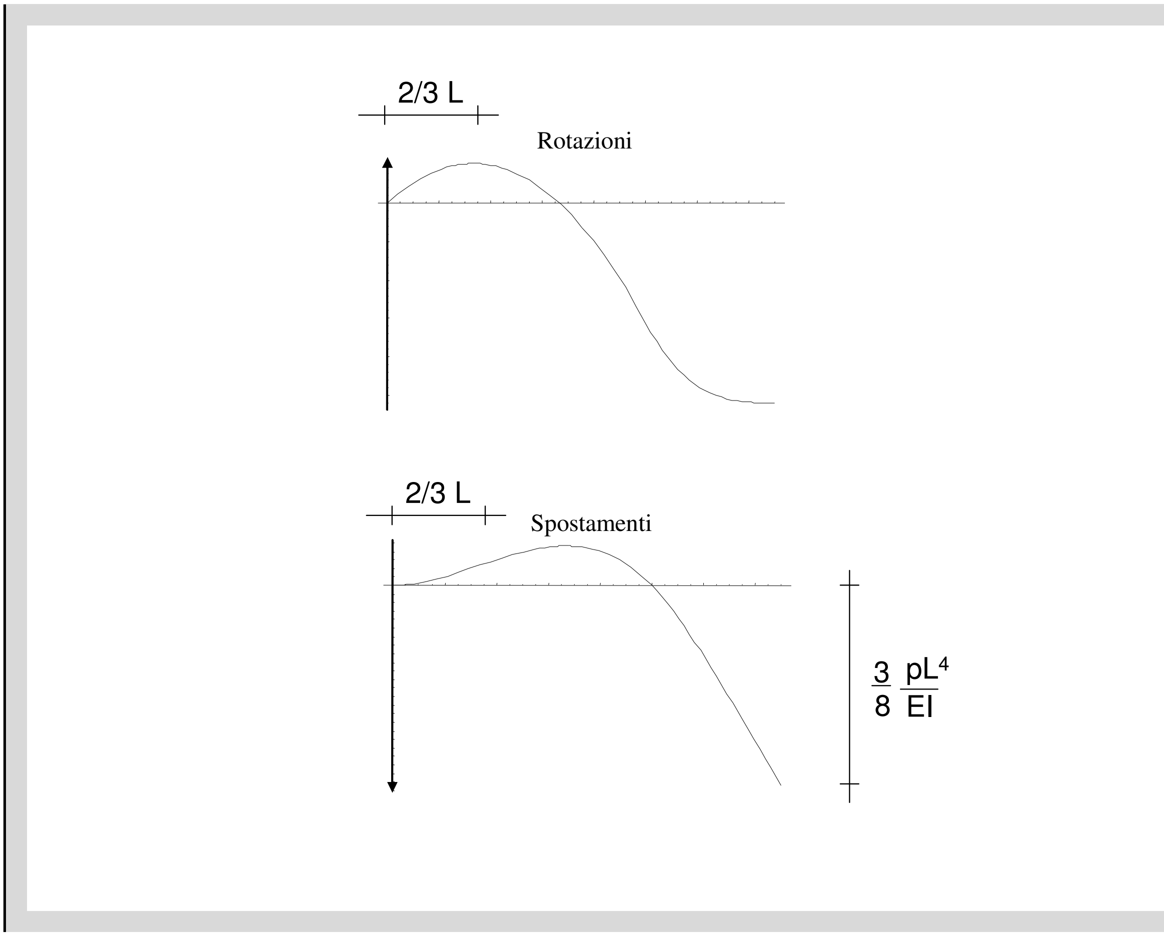
■ Passo 4 - Tracciamento del diagramma di rotazione e spostamento

Per tracciare il diagramma delle rotazioni e degli spostamenti si hanno le seguenti informazioni:

1. il diagramma delle rotazioni sara' quadratico nella prima parte, cubico nella seconda

2. il diagramma delle rotazioni dovra' anullarsi in corrispondenza dell'incastro, ed avra' tangenza orizzontale in corrispondenza dell'estremo libero e del punto x_3^*.

3. il diagramma degli spostamenti si annulla nell'incastro, dove avra' tangenza orizzontale. Si avra' un punto di flesso in x_3^*, segnalando un cambio di curvatura. Il punto di minimo spostamento si avra' dove si annullano le rotazioni.



Passo 5 - Determinazione del valore massimo dello spostamento

Un semplice sguardo al diagramma permette di asserire che l'abbassamento massimo si verifica in corrispondenza dell'estremo libero, e vale:

$$v_{2\,max} = v_2\,(L) = \frac{3\,pL^4}{8\,EI} \tag{21}$$